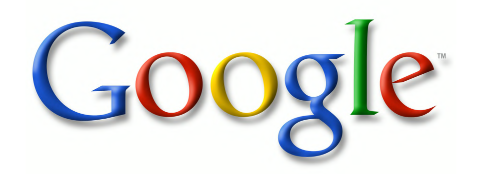
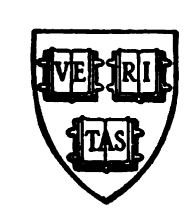
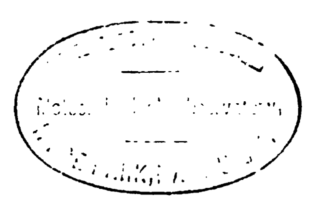
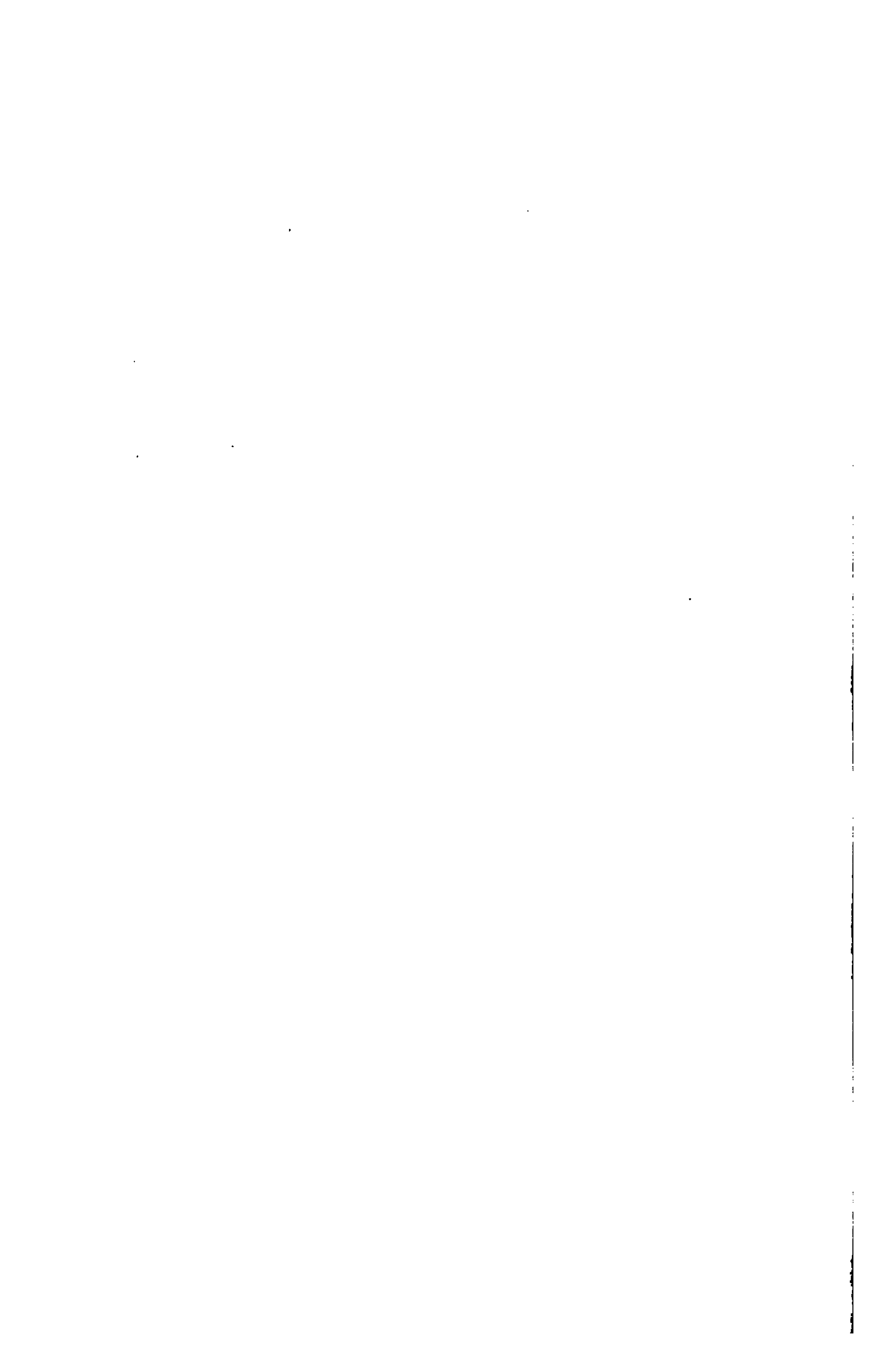



VE RI
TAS

Dr. Wilhelm Schur.
Berlin.





# Beiträge

zur

# meteorologischen Optik

und

# zu verwandten Wissenschaften.

In zwanglosen Heften

herausgegeben

von

***Johann August Grunert,***

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Erfurt, der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg und der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig, auswärtigem Mitgliede der Königlich Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, correspondirendem Mitgliede der Königlich Bairischen Akademie der Wissenschaften zu München und der Königlich Schwedischen Societät der Wissenschaften zu Upsala, ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Danzig, Halle, Marburg und Leipzig.

Erster Theil. Erstes Heft.

Mit einer lithographirten Tafel.

Leipzig, 1848.

Verlag von E. B. Schwickert.



# I.

# Theorie des Regenbogens.

Von dem Herausgeber.

## Einleitung.

Die Theorie des Regenbogens, so wie sie unter den älteren Physikern und Mathematikern zuerst durch Newton, ohne der grösseren Anzahl seiner allerdings auch mehrfach verdienten Vorgänger, durch welche diese Theorie vorbereitet wurde, jetzt weiter zu gedenken, in der meisten Vollendung dargestellt worden ist, gehört unstreitig zu dem Schönsten, was auf dem Felde der mathematischen Naturforschung, ja der Naturforschung überhaupt, jemals geleistet worden ist, und darf unbedenklich als ein wahres Muster für die Art und Weise, wie eine Naturerscheinung erklärt werden soll, aufgestellt werden. Indess scheint dieselbe doch noch Einiges zu wünschen übrig zu lassen, was auch schon andere mathematische Physiker gefühlt haben, indem z. B. einer der ausgezeichnetsten deutschen Astronomen, der auch als Staatsmann mit Recht hochberühmte und hochgeachtete vormalige Königlich Sächsische Staatsminister, Herr B. v. Lindenau, sich in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wisssenschaften, herausgegeben von B. von Lindenau und J. G. F. Bohnenberger. Zweiter Band. Stuttgart. 1816. S. 350. auf folgende Art über diese Theorie äussert: „Wir mögen bei dieser Gelegenheit den Wunsch nicht unterdrücken, dass ein gewandter Physico-Mathematiker die Theorie des Regenbogens überhaupt einer neuen eigenthümlichen Behandlung unterwerfen möchte; denn wenn auch unsere

heutige Theorie nach Halley, Newton, Bernoulli u. A. das Hauptsächlichste dieser Erscheinungen genügend darstellt, so kommen einmal doch noch bei weitem nicht befriedigend daraus zu erklärende Erscheinungen vor, und dann liegt auch in jener Theorie selbst eine gewisse Verwickelung, die uns glauben lässt, dass der rechte Weg darinnen noch nicht genommen worden sei.“ Wenn auch diese Worte schon im Jahre 1816 geschrieben sind, so, glaube ich, haben dieselben doch auch gegenwärtig noch ihre volle Richtigkeit; denn ich wüsste nicht, dass seit jener Zeit Etwas von Bedeutung für die weitere Ausbildung der mathematischen Theorie dieser das Interesse eines jeden denkenden Menschen in so hohem Grade lebhaft in Anspruch nehmenden prachtvollen Naturerscheinung geleistet worden wäre, da dieselbe, wie man sie z. B. — unter den vorhandenen Lehr- und Wörterbüchern der Physik und Meteorologie nach meiner Ansicht am besten — in dem Lehrbuche der Meteorologie von L. F. Kämtz. Dritter Band. Halle. 1836. S. 151. hauptsächlich nach Schmidt (Analytische Optik. S. 431.) dargestellt findet, sich von der älteren Theorie nicht wesentlich unterscheidet, und auch bei der Darstellung in diesem älteren Gewande namentlich rücksichtlich der nothwendigen Allgemeinheit und Bestimmtheit der betreffenden analytischen Ausdrücke manche Punkte unberücksichtigt lässt, die nach meiner Ansicht nicht unberücksicht bleiben dürfen, wenn man der Darstellung alle erforderliche Strenge verleihen will. Ich halte es daher keineswegs für überflüssig, diese Theorie einmal ganz von Neuem vorzunehmen, und werde dieselbe in der vorliegenden Abhandlung auf zwei verschiedenen Wegen darstellen, von denen der erste sich der älteren, allerdings durch ihren mehr geometrischen Charakter sich vortheilhaft auszeichnenden, und namentlich durch diesen mehr geometrischen Charakter das Interesse in Anspruch nehmenden Richtung im Wesentlichen zwar anschliesst, der Darstellung aber alle nöthige geometrische Strenge und die gehörige Allgemeinheit zu verleihen sucht, der zweite dagegen sich der Hülfsmittel bedient, welche die neuere analytische Geometrie namentlich dann, wenn man möglichst grosse Allgemeinheit zu erstreben beabsichtigt, in so reichlichem Maasse darbietet, wobei zugleich bemerkt werden mag, dass dieser zweite Weg hauptsächlich von den in meinen Optischen Untersuchungen. Erster Theil. Leipzig. 1846. S. 34. Nr. 50. entwickelten allgemeinen Grundformeln der Zurückwerfung und Brechung des Lichts seinen Auslauf nehmen wird. Dann werde ich aber auch hauptsächlich meine Ansicht über diejenigen Punkte darlegen, welche, von der

Newton'schen Theorie unberücksichtigt gelassen, nach den schon von Pemberton und Hellwag in älterer Zeit versuchten Erklärungen, namentlich einige neuere Physiker, insbesondere Venturi und Brandes von der einen, so wie Young, Arago und Airy von der anderen Seite, so viel als möglich aufzuklären sich bemühet haben. Ueberhaupt werde ich in dieser Abhandlung, ausser meinen eigenen Untersuchungen und vielfachen Entwickelungen, zugleich den ganzen gegenwärtigen wahren Bestand unserer Kenntnisse von dem Regenbogen dem Leser vorzulegen versuchen, so weit es ohne zu grosse Weitläufigkeit und — was ich absichtlich hier ausdrücklich bemerke — ohne mich auf jetzt nicht in meiner Absicht liegende ausführlichere Untersuchungen über die neuere physikalische Theorie des Lichts, welche letzteren mich die dieser Abhandlung gesteckten Gränzen weit zu überschreiten nöthigen würden, einzulassen, geschehen kann. Will man es als einen Mangel dieser Abhandlung erklären, dass ich mich in derselben auf die neuere physikalische Theorie des Lichts, namentlich rücksichtlich eigentlicher analytischer Entwickelungen, für jetzt nur wenig einlasse, so muss ich mir das gefallen lassen; ich kann nun einmal meine Ansichten über diesen Gegenstand, welche ich weiter unten ausführlicher auseinandersetzen werde, nicht aufgeben, will aber damit keinesweges in Abrede stellen, dass ich späterhin, wenn mich die weitere Fortsetzung meiner oben erwähnten optischen Untersuchungen specieller auf die neuere physikalische Theorie des Lichts führen wird, noch zu diesen Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf die Theorie des Regenbogens in einer derselben gewidmeten zweiten Abhandlung zurückkehren werde, bis zu welchem Zeitpunkte sich also die an diesen meinen optischen Untersuchungen überhaupt Interesse nehmenden geehrten Leser zu gedulden belieben mögen. Eine allgemeine Kenntniss des Phänomens des Regenbogens an sich und der Grundzüge der Newton'schen Theorie desselben glaube ich in dieser Abhandlung voraussetzen zu dürfen berechtigt zu sein, indem ich in derselben nicht das wiederholen will, was ein Jeder in den gewöhnlichen physikalischen Lehr- und Wörterbüchern leicht nachlesen kann; und eben so wenig halte ich es für nöthig, mich in dieser Abhandlung über die gleichfalls schon häufig behandelte Geschichte der Theorie des Regenbogens zu verbreiten, über welche z. B. Brandes in dem betreffenden Artikel des neuen Gehler'schen physikalischen Wörterbuchs alles Wissenswerthe in ziemlicher Vollständigkeit zusammengestellt hat, worauf mir daher hier zu verweisen erlaubt sein mag.

# Theorie des Regenbogens.

## §. 1.

Alles kommt bei der Entwickelung der Theorie des Regenbogens zuerst auf die sorgfältige Betrachtung des Wegs an, welchen ein Lichtstrahl verfolgt, der, nachdem er an dem Umfange eines Kreises, in dessen Ebene alle folgenden Betrachtungen angestellt werden, von Aussen her in diesen Kreis tretend, eine Brechung erlitten hat, an der inneren concaven Seite dieses Kreises eine oder einige Zurückwerfungen erleidet, und dann, nachdem er eine zweite Brechung an dem Umfange des Kreises erlitten hat, wieder aus demselben heraustritt. Dieser Untersuchung müssen aber einige geometrische Betrachtungen vorausgeschickt werden, welche an sich zwar sehr einfach, aber für die in Rede stehende Untersuchung von der grössten Wichtigkeit sind, und deshalb, wie wir jetzt in den beiden nächstfolgenden Paragraphen zuvörderst versuchen wollen, mit möglichster Allgemeinheit und Strenge angestellt werden müssen, weil ohne diese Allgemeinheit und Strenge der ganzen folgenden Untersuchung eine sichere Grundlage fehlen würde.

## §. 2.

Wir wollen uns einen um den Mittelpunkt $O$ mit beliebigem Halbmesser beschriebenen Kreis, und von dem Mittelpunkte $O$ aus zwei Halbmesser $OA$ und $OA'$ desselben gezogen denken, welche die Peripherie des Kreises in den Punkten $A$ und $A'$ schneiden. Diese beiden Halbmesser schliessen an dem Mittelpunkte $O$ zwei sich zu $2\pi$ *) ergänzende Winkel ein, von denen wir im Folgenden nur den einen bestimmt in's Auge fassen und durch $\Omega$ bezeichnen wollen, wo also $\Omega$ positiv und nicht grösser als $2\pi$ ist. Die Verlängerungen der beiden Halbmesser $OA$ und $OA'$ über ihre in der Peripherie des Kreises liegenden Endpunkte $A$ und $A'$ hinaus seien $AB$ und $A'B'$, welche Linien also ganz ausserhalb des um $O$ be-

*) Wir wollen in dem ganzen einschliesslich bis §. 9. reichenden ersten Theile dieser Theorie des Regenbogens, wenigstens in den allgemeinen Formeln, absichtlich überall diese Art der Winkelmessung, nicht die Messung durch Grade gebrauchen.

schriebenen Kreises liegen. Von den Punkten $A$ und $A'$ aus ziehe man ebenfalls ganz ausserhalb dieses Kreises zwei Linien $AC$ und $A'C'$, welche entweder beide innerhalb oder beide ausserhalb des vorher durch $\Omega$ bezeichneten, $2\pi$ nicht übersteigenden Winkels liegen, und mit den ausserhalb des Kreises liegenden Verlängerungen $AB$ und $A'B'$ der Halbmesser $OA$ und $OA'$ über die Punkte $A$ und $A'$ hinaus zwei einander gleiche spitze Winkel $BAC$ und $B'A'C'$ einschliessen, welche wir im Folgenden beide durch $i$ bezeichnen wollen. Der Durchschnittspunkt der beiden nöthigenfalls rückwärts über die Punkte $A$ und $A'$ hinaus verlängerten Linien $AC$ und $A'C'$ sei $Q$. Endlich werde der von den als von dem Punkte $Q$ ausgehend betrachteten Linien $QC$ und $QC'$ an dem Punkte $Q$ als seiner Spitze eingeschlossene, $2\pi$ nicht übersteigende, von dem Punkte $Q$ aus nach derselben Seite wie von dem Punkte $O$ aus der Winkel $\Omega$ hin liegende, und, jenachdem der Punkt $Q$ in dem Winkel $\Omega$ selbst oder in seinem Ergänzungswinkel zu $2\pi$ liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Winkel durch $\Theta$ bezeichnet. Dann hat man, um zwischen den Winkeln $\Omega$, $\Theta$, $i$ eine Gleichung zu finden, die folgenden Fälle zu unterscheiden.

Wenn, wie durch Taf. I. Fig. 1. erläutert wird, der Winkel $\Omega$ kleiner als $\pi$ ist und die Linien $AC$ und $A'C'$ beide innerhalb desselben liegen; so ist, wie leicht erhellen wird, in dem Vierecke $AOA'Q$ entweder

$$\Omega + \Theta + 2(\pi - i) = 2\pi$$

oder

$$(2\pi - \Omega) + (-\Theta) + 2i = 2\pi;$$

also, wie hieraus leicht folgt,

$$\Theta + \Omega = 2i.$$

Wenn, wie durch Taf. I. Fig. 2. erläutert wird, der Winkel $\Omega$ kleiner als $\pi$ ist und die Linien $AC$ und $A'C'$ beide ausserhalb desselben liegen; so ist, wie leicht erhellen wird, in dem Vierecke $AOA'Q$ immer

$$\Omega + (2\pi - \Theta) + 2i = 2\pi;$$

also, wie hieraus leicht folgt:

$$\Theta - \Omega = 2i.$$

Wenn, wie durch Taf. I. Fig. 3. erläutert wird, der Winkel $\Omega$ grösser als $\pi$ ist und die Linien $AC$ und $A'C'$ beide innerhalb desselben liegen; so ist, wie leicht erhellen wird, in dem Vierecke $AOA'Q$ immer

$$(2\pi - \Omega) + (-\Theta) + 2i = 2\pi;$$

also, wie hieraus leicht folgt,

$$\Theta + \Omega = 2i.$$

Wenn, wie durch Taf. I. Fig. 4. erläutert wird, der Winkel $\Omega$ grösser als $\pi$ ist und die Linien $AC$ und $A'C'$ beide ausserhalb desselben liegen; so ist, wie leicht erhellen wird, in dem Vierecke $AOA'Q$ entweder

$$\Omega + (2\pi - \Theta) + 2i = 2\pi$$

oder

$$(2\pi - \Omega) + \{2\pi - (-\Theta)\} + 2(\pi - i) = 2\pi;$$

also, wie hieraus leicht folgt, entweder

$$\Theta - \Omega = 2i$$

oder

$$\Theta - \Omega = 2i - 4\pi.$$

Mit Ausnahme des letzten Falls, in welchem

$$\Theta - \Omega = 2i - 4\pi = 2(i - 2\pi)$$

ist, sind die Summe $\Theta + \Omega$ und die Differenz $\Theta - \Omega$ nach dem Vorhergehenden offenbar stets positive Grössen, da dieselben ja durch die positive Grösse $2i$ dargestellt werden. Nur in dem letzten vorher erwähnten Falle ist, weil unter den gemachten Voraussetzungen offenbar $2(i - 2\pi)$ negativ ist, die Differenz $\Theta - \Omega$ eine negative Grösse.

Halten wir diese letztere Bemerkung fest, so fällt auf der Stelle in die Augen, dass sich aus der vorhergehenden Betrachtung im Allgemeinen das folgende Resultat ziehen lässt:

Es ist immer

$$1)\quad \Theta \pm \Omega = 2i,$$

**wenn man in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die beiden im Vorhergehenden durch $AC$ und $A'C'$ bezeichneten Linien innerhalb oder ausserhalb des Winkels $\Omega$ liegen, und, im Fall sich die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung als negativ erweisen sollte, im zweiten der beiden vorher erwähnten Fälle, wo man das untere Zeichen nehmen muss, der Winkel $i$ um eine ganze Peripherie, d. h. um $2\pi$ vermindert wird, bevor man ihn in die obige Gleichung einführt.**

Die Bedeutung der einzelnen Symbole, nach den im Vorherge-

henden darüber gegebenen strengen und sichern Vorschriften, braucht hier nicht wiederholt zu werden, da sie aus dem Obigen mit vollkommener Deutlichkeit und Bestimmtheit ersichtlich ist.

§. 3.

In den um den Mittelpunkt $O$ mit beliebigem Halbmesser beschriebenen Kreis in Taf. I. Fig. 5. wollen wir nun von dem in seiner Peripherie beliebig angenommenen Punkte $A_1$ an die Sehne $A_1A_2$; hierauf von dem Punkte $A_2$ an die der ersten gleiche Sehne $A_2A_3$, dann von dem Punkte $A_3$ an die den zwei ersten gleiche Sehne $A_3A_4$, von dem Punkte $A_4$ an die den drei ersten gleiche Sehne $A_4A_5$, überhaupt auf diese Weise immer nach derselben Seite hin die $n$ sämmtlich unter einander gleichen Sehnen

$$A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4,\ A_4A_5, \ldots, A_nA_{n+1}$$

eintragen. Ziehen wir dann die Halbmesser

$$OA_1,\ OA_2,\ OA_3,\ OA_4,\ OA_5, \ldots, OA_{n+1}$$

und bezeichnen die sämmtlich unter einander gleichen spitzen Winkel an den Grundlinien der gleichschenkeligen Dreiecke

$$OA_1A_2,\ OA_2A_3,\ OA_3A_4, \ldots, OA_nA_{n+1}$$

durch $\omega$; so ist der Winkel, welchen man durchlaufen muss, um auf dem Wege

$$A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5 \ldots A_{n+1}$$

von dem Halbmesser $OA_1$ an zu dem Halbmesser $OA_{n+1}$ zu gelangen, offenbar

$$n(\pi - 2\omega).$$

Den $2\pi$ nicht übersteigenden Winkel aber, welchen man nach derselben Richtung hin wie vorher durchlaufen muss, um von dem Halbmesser $OA_1$ zu dem Halbmesser $OA_{n+1}$ zu gelangen, wollen wir durch $\Omega$ bezeichnen, und jetzt zu bestimmen suchen. Zu dem Ende bezeichne $k$ die positive ganze Zahl, für welche

$$k.2\pi \overline{\overline{<}}\ n(\pi - 2\omega) < (k+1).2\pi$$

oder

$$2k\pi \overline{\overline{<}}\ n(\pi - 2\omega) < 2(k+1)\pi$$

ist, so ist

$$k \overline{\overline{<}}\ \frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi} < k+1,$$

und folglich, wenn wir die grösste in dem positiven Bruche

$$\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}$$

enthaltene positive ganze Zahl durch

$$G\left(\frac{n(\pi - 2\omega}{2\pi}\right)$$

bezeichnen, offenbar

$$k = G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right).$$

Wenn nun zuerst

$$n(\pi - 2\omega)$$

kleiner als $2\pi$ ist, so ist nach dem Obigen offenbar

$$\Omega\ (= n\pi - 2\omega),$$

was keiner weiteren Erläuterung bedarf. Wenn aber

$$n(\pi - 2\omega)$$

grösser als $2\pi$ ist, so muss man, um auf dem Wege

$$A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5 \ldots A_{n+1}$$

von dem Halbmesser $OA_1$ zu dem Halbmesser $OA_{n+1}$ zu gelangen, offenbar zuerst den Bogen $2k\pi$ durchlaufen, wodurch man auf dem vorhergehenden Wege von dem Halbmesser $OA_1$, bei beliebig oftmaliger Ueberschreitung desselben, bis wieder zu dem Halbmesser $OA_1$ gelangt, und dann muss man sich von dem Halbmesser $OA_1$ bis zu dem Halbmesser $OA_{n+1}$ noch durch den Bogen

$$n(\pi - 2\omega) - 2k\pi$$

bewegen, welcher, weil

$$2k\pi \overline{\overline{<}}\ n(\pi - 2\omega) < (2k + 1)\pi$$

ist, offenbar $2\pi$ nicht übersteigt; daher ist klar, dass in diesem Falle

$$\Omega = n(\pi - 2\omega) - 2k\pi,$$

d. i. nach dem Obigen

$$\Omega = n(\pi - 2\omega) - 2G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right).\pi$$

oder

$$\Omega = n(\pi - 2\omega) - G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right).2\pi$$

gesetzt werden muss. Für

$$n(\pi - 2\omega) < 2\pi$$

ist offenbar

$$G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right) = 0,$$

und da nun in diesem Falle nach dem Vorhergehenden

$$\Omega = n(\pi - 2\omega)$$

ist, so kann auch in diesem Falle

$$\Omega = n(\pi - 2\omega) - G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right).2\pi$$

gesetzt werden. Wenn endlich

$$n(\pi - 2\omega) = 2\pi$$

ist, so ist

$$G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right) = 1,$$

und aus der Gleichung

$$\Omega = n(\pi - 2\omega) - G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right).2\pi$$

ergiebt sich also $\Omega = 0$, was, wie auf der Stelle erhellet, der Natur der Sache keineswegs widerspricht, vielmehr derselben ganz gemäss ist. Daher sind wir nach der vorhergehenden Betrachtung vollkommen berechtigt, in allen Fällen, also in völliger Allgemeinheit,

$$2)\ \Omega = n(\pi - 2\omega) - G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right).2\pi$$

zu setzen.

Wird der von $OA_1$ an nach einer der vorhergehenden entgegengesetzten Richtung bis zu $OA_{n+1}$ durchlaufene, $2\pi$ nicht übersteigende Bogen durch $(\Omega)$ bezeichnet, so ist offenbar

$$(\Omega) = 2\pi - \Omega,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$3)\ (\Omega) = \left\{1 + G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right)\right\}.2\pi - n(\pi - 2\omega).$$

Auch sind offenbar $(\Omega)$ und $\Omega$ die $2\pi$ nicht übersteigenden, von $OA_{n+1}$ bis zu $OA_1$ respective nach der durch die Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$. .... vorgezeichneten oder nach der entgegengesetzten Richtung hin durchlaufenen Bogen.

§. 4.

Wir wollen nun annehmen, dass in der Figur des vorhergehenden Paragraphen, auf die wir uns hier wieder beziehen, $A_1 A_2$ ein durch Brechung bei dem Punkte $A_1$ in den um den Mittelpunkt $O$ beschriebenen Kreis getretener Strahl sei, welcher nach und nach bei den Punkten

$$A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots A_n$$

eine

$$1ste, 2te, 3te, 4te, \ldots (n-1)te$$

Zurückwerfung erleidet, und vermöge einer zweiten Brechung bei dem Punkte $A_{n+1}$ wieder aus dem Kreise heraustritt. Der Einfalls- und Brechungswinkel bei dem Punkte $A_1$ seien respective $i$ und $i_1$; so ist offenbar $i_1$ mit dem im vorhergehenden Paragraphen durch $\omega$ bezeichneten Winkel einerlei, und der Einfalls- und Brechungswinkel bei dem Punkte $A_{n+1}$ sind, wie auf der Stelle aus der Natur der Sache erhellet, was einer weiteren Erläuterung hier nicht bedarf, respective $i_1$ und $i$. Der $2\pi$ nicht übersteigende Winkel, welchen man nach der durch die Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$,.... vorgezeichneten Richtung hin durchlaufen muss, um von $A_{n+1}$ bis zu $A_1$ zu gelangen, oder der $2\pi$ nicht übersteigende Winkel, welchen man nach einer der vorhergehenden entgegengesetzten Richtung hin durchlaufen muss, um von $A_1$ bis zu $A_{n+1}$ zu gelangen, ist der im vorhergehenden Paragraphen durch $(\Omega)$ bezeichnete Winkel. Den $2\pi$ nicht übersteigenden Winkel aber, welchen der bei $A_1$ einfallende und der bei $A_{n+1}$ ausfahrende Strahl vor und nach der Brechung bei diesen Punkten mit einander einschliessen, indem wir diesen Winkel von dem Durschnittspunkte der beiden in Rede stehenden Strahlen an immer nach derselben Seite hin nehmen wie von dem Mittelpunkte $O$ des Kreises an den Winkel $(\Omega)$, und denselben als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem der Durchschnittspunkt der beiden in Rede stehenden Strahlen innerhalb des Winkels $(\Omega)$ selbst oder innerhalb seines Ergänzungswinkels zu $2\pi$ liegt, wollen wir im Folgenden durch $\Theta$ bezeichnen. Nehmen wir hierzu nun noch, dass im vorliegenden Falle, wie eine ganz einfache Betrachtung, deren Anstellung einem Jeden füglich selbst überlassen werden kann, zeigt, der bei $A_1$ einfallende und der bei $A_{n+1}$ ausfahrende Strahl offenbar immer beide innerhalb des Winkels $(\Omega)$ liegen müssen; so ergeben sich auf der Stelle aus den Gleichungen 1) und 3), wenn man nur in denselben die Bezeichnung nach den jetzt eingeführten Symbolen gehörig modificirt, die beiden Gleichungen

$$\Theta + (\Omega) = 2i$$

und

$$(\Omega) = \left\{1 + G\left(\frac{n(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right)\right\} . 2\pi - n(\pi - 2i_1),$$

durch deren Verbindung mit einander man dann ferner auf der Stelle die nachstehende, eine Hauptgrundlage der ganzen folgenden Untersuchung bildende Gleichung erhält:

$$\Theta + \left\{1 + G\left(\frac{n(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right)\right\} . 2\pi - n(\pi - 2i_1) = 2i.$$

Legen wir aber im Folgenden nicht wie bisher $n - 1$, sondern vielmehr $n$ Zurückwerfungen auf der inneren concaven Seite des Kreises unseren allgemeinen Betrachtungen zum Grunde, so müssen wir in dieser Gleichung $n + 1$ für $n$ setzen, und erhalten dadurch sogleich nach einer ganz einfachen Transformation die folgende Gleichung:

$$4)\quad \Theta - (n+1)(\pi - 2i_1) + G\left(\frac{(n+1)(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) . 2\pi = 2(i - \pi),$$

mit welcher man noch, wenn in Bezug auf den Punkt, bei welchem vermöge einer in demselben Statt findenden Brechung der Strahl in den Kreis tritt, der reciproke Brechungsexponent durch $\mu$ bezeichnet wird, die unmittelbar aus dem dioptrischen Grundgesetze fliessende Gleichung

$$5)\quad \sin i_1 = \mu \sin i$$

zu verbinden hat. Vermittelst dieser Gleichung kann man, wenn der Winkel $i$ gegeben ist, den Winkel $i_1$, und aus den Winkeln $i$ und $i_1$ dann ferner vermittelst der Gleichung 4) den Winkel $\Theta$ berechnen, durch welchen letzteren Winkel die gegenseitige Lage des einfallenden und ausfahrenden Strahls bestimmt wird.

## §. 5.

Der Winkel $\Theta$ ist nach dem Vorhergehenden eine Function von $i$, und es kann also

$$\Theta = F(i)$$

gesetzt werden. Lässt man nun $i$ die beliebige Veränderung $\Delta i$ erleiden, und bezeichnet wie gewöhnlich die dadurch herbeigeführte Veränderung von $\Theta$ durch $\Delta\Theta$; so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze bekanntlich

$$\varDelta\Theta = \frac{\partial\Theta}{\partial i}\cdot\frac{\varDelta i}{1}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial i^2}\cdot\frac{\varDelta i^2}{1.2}$$

$$+\frac{\partial^3\Theta}{\partial i^3}\cdot\frac{\varDelta i^3}{1.2.3}$$

u. s. w.

$$+\frac{\partial^{k-1}\Theta}{\partial i^{k-1}}\cdot\frac{\varDelta i^{k-1}}{1\ldots(k-1)}$$

$$+F^{(k)}(i+\varrho\varDelta i).\frac{\varDelta i^k}{1\ldots k},$$

wo $\varrho$ eine gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet. Soll für der Null unendlich nahe kommende Werthe von $\varDelta i$ der entsprechende Werth von $\varDelta\Theta$ der Null besonders nahe kommen, so muss man nach einem in der Differentialrechnung häufig angewandten und aus derselben hinreichend bekannten Princip die Grösse $i$ so bestimmen, dass der entsprechende Werth des ersten Differentialquotienten von $\Theta$ in Bezug auf die unabhängige Variable $i$ verschwindet, d. h. dass

$$\frac{\partial\Theta}{\partial i}=0$$

wird, weil dann nach dem Obigen die Veränderung $\varDelta\Theta$ von $\Theta$ die Form

$$\varDelta\Theta = \frac{\partial^2\Theta}{\partial i^2}\cdot\frac{\varDelta i^2}{1.2}+\frac{\partial^3\Theta}{\partial i^3}\cdot\frac{\varDelta i^3}{1.2.3}$$

$$+\frac{\partial^4\Theta}{\partial i^4}\cdot\frac{\varDelta i^4}{1.2.3.4}$$

u. s. w.

$$+\frac{\partial^{k-1}\Theta}{\partial i^{k-1}}\cdot\frac{\varDelta i^{k-1}}{1\ldots(k-1)}$$

$$+F^{(k)}(i+\varrho\varDelta i).\frac{\varDelta i^k}{1\ldots k}$$

annimmt, und also bloss Glieder enthält, welche in Bezug auf die der Null unendlich nahe kommende Grösse $\varDelta i$ von der zweiten oder einer höheren, überhaupt von einer die erste übersteigenden Ordnung sind.

Wenden wir dies nun aber auf den im vorhergehenden Para-

graphen ausführlich betrachteten Fall an, so ist klar, dass, wenn wir den Einfallswinkel $i$ der Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial i} = 0$$

gemäss bestimmen, und uns dann den im vorhergehenden Paragraphen betrachteten Kreis von einem nach einer gewissen Richtung hin sich bewegenden Strahle in dem Punkte seiner Peripherie getroffen denken, welchem der mittelst der vorhergehenden Bedingungsgleichung bestimmte Einfallswinkel entspricht, die allen parallel mit diesem Strahle unendlich nahe bei dem in Rede stehenden Punkte einfallenden Strahle entsprechenden ausfahrenden Strahlen auch wenigstens mit sehr, oder eigentlich mit möglichst grosser Annäherung einander parallel sein werden, eben weil die einfallenden Strahlen unter einander parallel angenommen werden, und weil der von den einfallenden und ausfahrenden Strahlen eingeschlossene Winkel bei der im Vorhergehenden zum Grunde gelegten Bestimmung des Einfallswinkels für der Null unendlich nahe kommende Aenderungen dieses Winkels die, absolut genommen, so viel als möglich kleinste Aenderung erleidet.

Werden parallel und sehr nahe bei einander einfallende Strahlen nach den an dem Kreise erlittenen Ablenkungen bei ihrem Austritte aus demselben nach allen möglichen Richtungen hin zerstreu't, so werden natürlich die ausfahrenden Strahlen keinen besonders merklich hervortretenden Eindruck auf ein dieselben auffangendes Auge hervorzubringen im Stande sein. Das Entgegengesetzte findet aber offenbar Statt, wenn die parallel und sehr nahe bei einander einfallenden Strahlen nach den an dem Kreise erlittenen Ablenkungen auch bei ihrem Austritte aus demselben wenigstens nahe einander parallel bleiben. Deshalb pflegt man Strahlen von der letzteren Beschaffenheit, deren Bestimmungsmethode sich aus dem Vorhergehenden von selbst ergiebt, wirksame Strahlen zu nennen, eine Benennung, welche wir ihrer Zweckmässigkeit wegen auch im Folgenden stets beibehalten wollen.

## §. 6.

Behufs der für das Folgende sehr wichtigen Ermittelung der wirksamen Strahlen müssen wir uns nun zunächst mit der Auflösung der Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial i} = 0$$

beschäftigen, zu welchem Ende zuerst die allgemeine Entwickelung des Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Theta}{\partial i}$$

erforderlich ist.

Nach 4) ist allgemein

$$\Theta - (n+1)(\pi - 2i_1) + G\left(\frac{(n+1)(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) . 2\pi = 2(i - \pi),$$

also, wenn $i$ die Veränderung $\Delta i$ erleidet, und die dadurch herbeigeführten Veränderungen von $i_1$ und $\Theta$ durch $\Delta i_1$ und $\Delta\Theta$ bezeichnet werden:

$$\left.\begin{array}{l} \Theta + \Delta\Theta - (n+1)(\pi - 2(i_1 + \Delta i_1)) \\ + G\left(\frac{(n+1)(\pi - 2(i_1 + \Delta i_1))}{2\pi}\right) . 2\pi \end{array}\right\} = 2(i + \Delta i - \pi).$$

Weil nun, wie aus der im Obigen festgestellten Bedeutung der Symbole

$$G\left(\frac{(n+1)(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) \text{ und } G\left(\frac{(n+1)(\pi - 2(i_1 + \Delta i_1))}{2\pi}\right)$$

auf der Stelle ganz von selbst hervorgeht, für der Null unendlich nahe kommende Werthe von $\Delta i$ jedenfalls

$$G\left(\frac{(n+1)(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) = G\left(\frac{(n+1)(\pi - 2(i_1 + \Delta i_1))}{2\pi}\right)$$

ist; so folgt aus den beiden obigen Gleichungen durch Subtraction der ersten von der zweiten für der Null unendlich nahe kommende Werthe von $\Delta i$ sogleich die Gleichung

$$\Delta\Theta + 2(n+1)\Delta i_1 = 2\Delta i,$$

also

$$\frac{\Delta\Theta}{\Delta i} = 2\left\{1 - (n+1)\frac{\Delta i_1}{\Delta i}\right\},$$

und folglich, wenn man sich $\Delta i$ der Null nähern lässt, und auf beiden Seiten dieser Gleichung zu den Gränzen übergeht:

$$6) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial i} = 2\left\{1 - (n+1)\frac{\partial i_1}{\partial i}\right\},$$

woraus sich durch fernere Differentiation sehr leicht die für jedes positive ganze, die Einheit übersteigende, $k$ geltende Gleichung

$$7)\quad \frac{\partial^k \Theta}{\partial i^k} = -\; 2(n+1)\,\frac{\partial^k i_1}{\partial i^k}$$

ergiebt.

Weil nun nach 5)

$$\sin i_1 = \mu \sin i$$

ist, so ist

$$\frac{\partial \sin i_1}{\partial i} = \frac{\partial \sin i_1}{\partial i_1} \cdot \frac{\partial i_1}{\partial i} = \mu\,\frac{\partial \sin i}{\partial i},$$

d. i. nach den Principien der Differentialrechnung

$$\cos i_1\,\frac{\partial i_1}{\partial i} = \mu \cos i,$$

also

$$8)\quad \frac{\partial i_1}{\partial i} = \mu\,\frac{\cos i}{\cos i_1},$$

und folglich nach 6)

$$9)\quad \frac{\partial \Theta}{\partial i} = 2\left\{1 - (n+1)\mu\,\frac{\cos i}{\cos i_1}\right\},$$

wo immer $i_1$ mittelst der Gleichung

$$\sin i_1 = \mu \sin i$$

zu bestimmen ist.

Um noch den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2},$$

welchen wir nachher auch gebrauchen werden, zu entwickeln, müssen wir nach Anleitung der Gleichung 7) zuvörderst den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 i_1}{\partial i^2}$$

entwickeln. Nach der Gleichung 8) ist aber

$$\frac{\partial^2 i_1}{\partial i^2} = \mu\,\frac{\cos i_1\,\frac{\partial \cos i}{\partial i} - \cos i\,\frac{\partial \cos i_1}{\partial i}}{\cos i_1^{\,2}},$$

d. i.

$$\frac{\partial^2 i_1}{\partial i^2} = \mu\,\frac{-\sin i \cos i_1 - \cos i\,\frac{\partial \cos i_1}{\partial i_1}\cdot\frac{\partial i_1}{\partial i}}{\cos i_1^{\,2}},$$

also

$$\frac{\partial^2 i_1}{\partial i^2} = -\mu \frac{\sin i \cos i_1 - \cos i \sin i_1 \frac{\partial i_1}{\partial i}}{\cos i_1^2},$$

und folglich nach 8)

$$10) \quad \frac{\partial^2 i_1}{\partial i^2} = -\mu \frac{\sin i \cos i_1 - \mu \cos i^2 \tang i_1}{\cos i_1^2},$$

also nach 7)

$$11) \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n+1)\mu \frac{\sin i \cos i_1 - \mu \cos i^2 \tang i_1}{\cos i_1^2},$$

oder auch

$$12) \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n+1)\mu \frac{\sin i \cos i_1^2 - \mu \cos i^2 \sin i_1}{\cos i_1^3},$$

oder auch, weil

$$\mu = \frac{\sin i_1}{\sin i}$$

ist:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n+1)\mu \frac{\sin i^2 \cos i_1^2 - \cos i^2 \sin i_1^2}{\sin i \cos i_1^3},$$

d. i., wie hieraus leicht folgt:

$$13) \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n+1)\mu \frac{\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{\sin i \cos i_1^3}.$$

Endlich findet man auch leicht aus 12):

$$14) \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n+1)\mu \sin i \frac{\cos i_1^2 - \mu^2 \cos i^2}{\cos i_1^3},$$

oder

$$15) \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n+1)\mu \frac{\sin i}{\cos i_1}\left\{1 - \mu^2 \left(\frac{\cos i}{\cos i_1}\right)^2\right\}.$$

Bei der Entwickelung der höheren Differentialquotienten von $\Theta$ in Bezug auf die veränderliche Grösse $i$ im Allgemeinen wollen wir jetzt nicht verweilen, da wir derselben bei unserer folgenden Untersuchung nicht bedürfen.

Zur Bestimmung der wirksamen Strahlen erhält man nun aus 9) unmittelbar die Gleichung

$$1 - (n + 1)\mu \frac{\cos i}{\cos i_1} = 0,$$

mit welcher man noch die bekannte Grundgleichung

$$\sin i_1 = \mu \sin i$$

verbinden muss, so dass man also jetzt zwischen den beiden positiven spitzen Winkeln $i$ und $i_1$ die beiden Gleichungen

$$16)\quad \begin{cases} \sin i_1 = \mu \sin i, \\ \cos i_1 = (n + 1)\mu \cos i \end{cases}$$

hat, mittelst welcher sich diese beiden Winkel bestimmen lassen.

Um den Winkel $i_1$ aus diesen beiden Gleichungen zu eliminiren, quadrire man dieselben und addire sie dann zu einander, so ergiebt sich auf der Stelle

$$\begin{aligned} 1 &= \mu^2 \sin i^2 + (n + 1)^2 \mu^2 \cos i^2 \\ &= (n + 1)^2 \mu^2 - \{(n + 1)^2 - 1\}\mu^2 \sin i^2 \\ &= \mu^2 + \{(n + 1)^2 - 1\}\mu^2 \cos i^2, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} n(n + 2)\mu^2 \sin i^2 &= (n + 1)^2 \mu^2 - 1, \\ n(n + 2)\mu^2 \cos i^2 &= 1 - \mu^2; \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} n(n + 2)\mu^2 \sin i^2 &= \{(n + 1)\mu - 1\}\{(n + 1)\mu + 1\}, \\ n(n + 2)\mu^2 \cos i^2 &= (1 - \mu)(1 + \mu); \end{aligned}$$

woraus, da $\sin i$ und $\cos i$ stets positive Grössen sind, sogleich

$$17)\quad \begin{cases} \sin i = \dfrac{1}{\mu}\sqrt{\dfrac{(n + 1)^2 \mu^2 - 1}{n(n + 2)}}, \\ \cos i = \dfrac{1}{\mu}\sqrt{\dfrac{1 - \mu^2}{n(n + 2)}}; \end{cases}$$

oder

$$18)\quad \begin{cases} \sin i = \dfrac{1}{\mu}\sqrt{\dfrac{\{(n + 1)\mu - 1\}\{(n + 1)\mu + 1\}}{n(n + 2)}}, \\ \cos i = \dfrac{1}{\mu}\sqrt{\dfrac{(1 - \mu)(1 + \mu)}{n(n + 2)}} \end{cases}$$

folgt.

Verbindet man diese Gleichungen mit den Gleichungen 16), so erhält man

$$19)\quad \begin{cases} \sin i_1 = \sqrt{\dfrac{(n+1)^2\mu^2-1}{n(n+2)}}, \\[2ex] \cos i_1 = (n+1)\sqrt{\dfrac{1-\mu^2}{n(n+2)}} \end{cases}$$

oder

$$20)\quad \begin{cases} \sin i_1 = \sqrt{\dfrac{\{(n+1)\mu-1\}\{(n+1)\mu+1\}}{n(n+2)}}. \\[2ex] \cos i_1 = (n+1)\sqrt{\dfrac{(1-\mu)(1+\mu)}{n(n+2)}} \end{cases}$$

Aus diesen Formeln erhellet auch auf der Stelle, dass die Möglichkeit unsers Problems dadurch bedingt wird, dass $\mu$ eine Mittelgrösse zwischen

$$\frac{1}{n+1} \text{ und } 1,$$

d. h. in einer bekannten Bezeichnung, dass

$$\mu = M\left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$$

ist.

Man kann die Winkel $i$ und $i_1$ noch auf eine andere bemerkenswerthe Art berechnen. Aus den beiden Gleichungen

$$\sin i_1 = \mu \sin i,$$
$$\cos i_1 = (n+1)\mu \cos i$$

folgt nämlich leicht

$$\sin i \pm \sin i_1 = (1 \pm \mu) \sin i,$$
$$\cos i \pm \cos i_1 = \{1 \pm (n+1)\mu\} \cos i;$$

also nach bekannten goniometrischen Formeln,

$$2\sin {}^1\!/_2(i+i_1)\cos {}^1\!/_2(i-=i_1)\ (1+\mu)\sin i,$$
$$2\cos {}^1\!/_2(i+i_1)\sin {}^1\!/_2(i-i_1) = (1-\mu)\sin i$$

und

$$2\cos {}^1\!/_2(i+i_1)\cos {}^1\!/_2(i-i_1) = \{1+(n+1)\mu\}\cos i,$$
$$-2\sin {}^1\!/_2(i+i_1)\sin {}^1\!/_2(i-i_1) = \{1-(n+1)\mu\}\cos i.$$

Daher ist

$$tang\,{}^1\!/_2\,(i+i_1)\,cot\,{}^1\!/_2\,(i-i_1)=\frac{1+\mu}{1-\mu},$$

$$-\,cot\,{}^1\!/_2\,(i+i_1)\,cot\,{}^1\!/_2\,(i-i_1)=\frac{1+(n+1)\mu}{1-(n+1)\mu};$$

und hieraus durch Division und Multiplication:

$$tang\,{}^1\!/_2\,(i+i_1)^2=-\frac{(1+\mu)\{1-(n+1)\mu\}}{(1-\mu)\{1+(n+1)\mu\}},$$

$$tang\,{}^1\!/_2\,(i-i_1)^2=-\frac{(1-\mu)\{1-(n+1)\mu\}}{(1+\mu)\{1+(n+1)\mu\}};$$

oder

$$tang\,{}^1\!/_2\,(i+i_1)^2=\frac{(1+\mu)\{(n+1)\mu-1\}}{(1-\mu)\{(n+1)\mu+1\}},$$

$$tang\,{}^1\!/_2\,(i-i_1)^2=\frac{(1-\mu)\{(n+1)\mu-1\}}{(1+\mu)\{(n+1)\mu+1\}}.$$

Weil $i$ und $i_1$ positive spitze Winkel sind, so ist offenbar auch ${}^1\!/_2\,(i+i_1)$ ein positiver spitzer Winkel, und daher $tang\,{}^1\!/_2\,(i+i_1)$ positiv. Weil ferner nach dem Obigen, wenn das Problem überhaupt möglich sein soll, was vorher jederzeit besonders zu untersuchen ist, $\mu<1$ sein muss, und bekanntlich

$$sin\,i_1=\mu\,sin\,i$$

ist, so ist $i_1<i$, und folglich auch $tang\,{}^1\!/_2\,(i-i_1)$ positiv. Daher ist nach dem Vorhergehenden

$$21)\quad\begin{cases} tang\,{}^1\!/_2\,(i+i_1)=\sqrt{\dfrac{(1+\mu)\{(n+1)\mu-1\}}{(1-\mu)\{(n+1)\mu+1\}}},\\[2ex] tang\,{}^1\!/_2\,(i-i_1)=\sqrt{\dfrac{(1-\mu)\{(n+1)\mu-1\}}{(1+\mu)\{(n+1)\mu+1\}}};\end{cases}$$

oder, wenn man

$$22)\quad K=\sqrt{\frac{(n+1)\mu-1}{(n+1)\mu+1}}$$

setzt:

$$23)\quad\begin{cases} tang\,{}^1\!/_2\,(i+i_1)=K\sqrt{\dfrac{1+\mu}{1-\mu}},\\[2ex] tang\,{}^1\!/_2\,(i-i_1)=K\sqrt{\dfrac{1-\mu}{1+\mu}}.\end{cases}$$

Hat man mittelst dieser Formeln $\frac{1}{2}(i+i_1)$ und $\frac{1}{2}(i-i_1)$ berechnet, wobei man nicht zu übersehen hat, dass diese Winkel beide positiv und spitz sind; so findet man $i$ und $i_1$ mittelst der Formeln

$$24)\begin{cases} i = \frac{1}{2}(i+i_1) + \frac{1}{2}(i-i_1), \\ i_1 = \frac{1}{2}(i+i_1) - \frac{1}{2}(i-i_1). \end{cases}$$

Hat man aber $i$ und $i_1$, so findet man den entsprechenden Werth von $\Theta$ mittelst der aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden allmeinen Formel

$$25)\ \Theta = 2(i-\pi) + (n+1)(\pi-2i_1) - G\left(\frac{(n+1)(\pi-2i_1)}{2\pi}\right).2\pi.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\sin i_1 = \mu \sin i,\ \cos i_1 = (n+1)\mu \cos i$$

folgt

$$26)\ \tang i_1 = \frac{1}{n+1}\tang i,\ \tang i = (n+i)\tang i_1.$$

Führt man nun die vorhergehenden Ausdrücke von $\cos i_1$ und $\tang i_1$ in den aus dem Obigen bekannten Ausdruck des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n+1)\mu \frac{\sin i \cos i_1 - \mu \cos i^2 \tang i_1}{\cos i_1^2}$$

ein, so erhält man nach leichter Rechnung als entsprechenden Werth dieses zweiten Differentialquotienten die Grösse

$$\frac{2n(n+2)}{(n+1)^2}\tang i,$$

und da dieser Werth des zweiten Differentialquotienten offenbar eine positive Grösse ist, so folgt aus der allgemeinen Theorie der Maxima und Minima, welche hier aus der Differentialrechnung als bekannt vorausgesetzt wird, das bemerkenswerthe Resultat, dass für die wirksamen Strahlen der entsprechende Werth des Winkels $\Theta$ ein Minimum ist, indem nämlich nach dem Vorhergehenden die aus der Differentialrechnung bekannten Bedingungen eines Minimums im vorliegenden Falle vollständig erfüllt sind.

Für den Uebergang eines Strahls aus Luft in Wasser kann man

$$\mu = 0{,}749$$

setzen.

Wenn also in diesem Falle $n = 1$ ist, so ist nach 21)

$$tang\ {}^1/_2(i + i_1) = \sqrt{\frac{1,749 . 0,498}{0,251 . 2,498}},$$

$$tang\ {}^1/_2(i - i_1) = \sqrt{\frac{0,251 . 0,498}{1,749 . 2,498}}.$$

Ist dagegen $n = 2$, so ist

$$tang\ {}^1/_2(i + i_1) = \sqrt{\frac{1,749 . 1,247}{0,251 . 3,247}},$$

$$tang\ {}^1/_2(i - i_1) = \sqrt{\frac{0,251 . 1,247}{1,749 . 3,247}}.$$

Für $n = 3$ ist

$$tang\ {}^1/_2(i + i_1) = \sqrt{\frac{1,749 . 1,996}{0,251 . 3,996}},$$

$$tang\ {}^1/_2(i - i_1) = \sqrt{\frac{0,251 . 1,996}{1,749 . 3,996}}.$$

Für $n = 4$ endlich ist

$$tang\ {}^1/_2(i + i_1) = \sqrt{\frac{1,749 . 2,745}{0,251 . 4,745}},$$

$$tang\ {}^1/_2(i - i_1) = \sqrt{\frac{0,251 . 2,745}{1,749 . 4,745}}.$$

Die Rechnung nach diesen Formeln führt man am besten auf folgende Art, wobei wir jedoch $i$ und $i_1$ nur bis auf Minuten genau angeben wollen.

Für $n = 1$:

$log$ 1,749 = 0,2427898
$log$ 0,251 = 0,3996737 — 1
$log$ 0,498 = 0,6972293 — 1
$log$ 2,498 = 0,3975924

| | | |
|---|---|---|
| 0,2427898 | 0,3996737 — 1 | 0,6972293 — 1 |
| 0,3996737 — 1 | 0,2427898 | 0,3975924 |
| 0,8431161 | 0,1568839 — 1 | 0,2996369 — 1 |

$$\begin{array}{r} 0{,}8431161 \\ 0{,}2996369 - 1 \\ \hline 2)\ 0{,}1427530 \\ \hline 0{,}0713765 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}1568839 - 1 \\ 0{,}2996369 - 1 \\ \hline 2)\ 0{,}4565208 - 2 \\ \hline 0{,}2282604 - 1 \end{array}$$

$$log\ tang\ {}^1/_2\,(i + i_1) = 10{,}0713765 - 10$$
$$log\ tang\ {}^1/_2\,(i - i_1) = 9{,}2282604 - 10$$

$$\begin{array}{rl} {}^1/_2\,(i + i_1) = & 49^0.\ 41' \\ {}^1/_2\,(i - i_1) = & 9\ .\ 36 \\ \hline i = & 59^0.\ 17' \\ i_1 = & 40^0.\ \ 5' \end{array}$$

Für $n = 2$:

$$\begin{array}{l} log\ 1{,}749 = 0{,}2427898 \\ log\ 0{,}251 = 0{,}3996737 - 1 \\ log\ 1{,}247 = 0{,}0958665 \\ log\ 3{,}247 = 0{,}5114823 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}2427898 \\ 0{,}3996737 - 1 \\ \hline 0{,}8431161 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}3996737 - 1 \\ 0{,}2427898 \\ \hline 0{,}1568839 - 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}0958665 \\ 0{,}5114823 \\ \hline 0{,}5843842 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}8431161 \\ 0{,}5843842 - 1 \\ \hline 2)\ 0{,}4275003 \\ \hline 0{,}2137502 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}1568839 - 1 \\ 0{,}5843842 - 1 \\ \hline 2)\ 0{,}7412681 - 2 \\ \hline 0{,}3706342 - 1 \end{array}$$

$$log\ tang\ {}^1/_2\,(i + i_1) = 10{,}2137502 - 10$$
$$log\ tang\ {}^1/_2\,(i - i_1) = 9{,}3706342 - 10$$

$$\begin{array}{rl} {}^1/_2\,(i + i_1) = & 58^0.\ 33' \\ {}^1/_2\,(i - i_1) = & 13\ .\ 12 \\ \hline i = & 71^0\ .\ 45' \\ i_1 = & 45^0\ .\ 21' \end{array}$$

Für $n = 3$:

$$\begin{array}{l} log\ 1{,}749 = 0{,}2427898 \\ log\ 0{,}251 = 0{,}3996737 - 1 \\ log\ 1{,}996 = 0{,}3001605 \\ log\ 3{,}996 = 0{,}6016255 \end{array}$$

| | | |
|---|---|---|
| 0,2427898 | 0,3996737 — 1 | 0,3001605 |
| 0,3996737 — 1 | 0,2427898 | 0,6016255 |
| 0,8431161 | 0,1568839 — 1 | 0,6985350 — 1 |

| | |
|---|---|
| 0,8431161 | 0,1568839 — 1 |
| 0,6985350 — 1 | 0,6985350 — 1 |
| 2) 0,5416511 | 2) 0,8554189 — 2 |
| 0,2708256 | 0,4277095 — 1 |

$$\log \tan \tfrac{1}{2}(i + i_1) = 10{,}2708256 - 10$$
$$\log \tan \tfrac{1}{2}(i - i_1) = 9{,}4277095 - 10$$

$$\tfrac{1}{2}(i + i_1) = 61^0.\ 48'$$
$$\tfrac{1}{2}(i - i_1) = 14\ .\ 59$$
$$i = 76^0.\ 47'$$
$$i_1 = 46^0.\ 49'$$

**Für $n = 4$:**

$$\log 1{,}749 = 0{,}2427898$$
$$\log 0{,}251 = 0{,}3996737 - 1$$
$$\log 2{,}745 = 0{,}4385423$$
$$\log 4{,}745 = 0{,}6762362$$

| | | |
|---|---|---|
| 0,2427898 | 0,3996737 — 1 | 0,4385423 |
| 0,3996737 — 1 | 0,2427898 | 0,6762362 |
| 0,8431161 | 0,1568839 — 1 | 0,7623061 — 1 |

| | |
|---|---|
| 0,8431161 | 0,1568839 — 1 |
| 0,7623061 — 1 | 0,7623061 — 1 |
| 2) 0,6054222 | 2) 0,9191900 — 2 |
| 0,3027111 | 0,4595950 — 1 |

$$\log \tan \tfrac{1}{2}(i + i_1) = 10{,}3027111 - 10$$
$$\log \tan \tfrac{1}{2}(i - i_1) = 9{,}4595950 - 10$$

$$\tfrac{1}{2}(i + i_1) = 63^0.\ 31'$$
$$\tfrac{1}{2}(i - i_1) = 16\ .\ 4$$
$$i = 79^0.\ 35'$$
$$i_1 = 47^0.\ 27'$$

**Nach 25) ist nun für $n = 1$:**

$$\Theta = 2(i-\pi) + 2(\pi-2i_1) - G\left(\frac{2(\pi-2i_1)}{2\pi}\right).2\pi.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber in diesem Falle:

$$i_1 = 2405'$$
$$2i_1 = 4810$$
$$\pi - 2i_1 = 5990$$
$$2(\pi - 2i_1) = 11980$$
$$\frac{2(\pi - 2i_1)}{2\pi} = \frac{11980}{21600}$$
$$G\left(\frac{2(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) = 0$$

also nach dem Obigen

$$27)\ {}^1/_2\,\Theta = i - 2i_1$$

oder in Zahlen

$$27^*)\ \Theta = -\ 41^0.46'.$$

Woher hier das negative Zeichen kommt, wird man sich nach den im Obigen gemachten Voraussetzungen und gegebenen Bestimmungen leicht erklären können.

Nach 25) ist für $n = 2$:

$$\Theta = 2(i-\pi) + 3(\pi-2i_1) - G\left(\frac{3(\pi-2i_1)}{2\pi}\right).2\pi.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber in diesem Falle:

$$i_1 = 2721'$$
$$2i_1 = 5442$$
$$\pi - 2i_1 = 5358$$
$$3(\pi - 2i_1) = 16074$$
$$\frac{3(\pi - 2i_1)}{2\pi} = \frac{16074}{21600}$$
$$G\left(\frac{3(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) = 0$$

also nach dem Obigen

$$28)\ {}^1/_2\,\Theta = {}^1/_2\,\pi + i - 3i_1$$

oder in Zahlen

$$28^*)\ \Theta = 51^0.24'.$$

Nach 25) ist für $n = 3$:

$$\Theta = 2(i-\pi) + 4(\pi-2i_1) - G\left(\frac{4(\pi-2i_1)}{2\pi}\right).2\pi.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber in diesem Falle:

$$i_1 = 2809'$$
$$2i_1 = 5618$$
$$\pi - 2i_1 = 5182$$
$$4(\pi - 2i_1) = 20728$$
$$\frac{4(\pi - 2i_1)}{2\pi} = \frac{20728}{21600}$$
$$G\left(\frac{4(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) = 0$$

also nach dem Obigen

$$29)\quad {}^1/_2\,\Theta = \pi + i - 4i_1$$

oder in Zahlen

$$29^*)\quad \Theta = 139^0.\ 12'.$$

Nach 25) ist für $n = 4$.

$$\Theta = 2(i - \pi) + 5(\pi - 2i_1) - G\left(\frac{5(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right).2\pi.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber in diesem Falle:

$$i_1 = 2847'$$
$$2i_1 = 5694$$
$$\pi - 2i_1 = 5106$$
$$5(\pi - 2i_1) = 25530$$
$$\frac{5(\pi - 2i_1)}{2\pi} = \frac{25530}{21600}$$
$$G\left(\frac{5(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) = 1$$

also nach dem Obigen

$$30)\quad {}^1/_2\,\Theta = {}^1/_2\,\pi + i - 5i_1,$$

oder in Zahlen

$$30^*)\quad \Theta = -\ 135^0.\ 20'.$$

## §. 7.

Umgekehrt kann man nun aber auch, wenn für die wirksamen Strahlen der Winkel $\Theta$ gegeben ist, aus demselben die Winkel $i$ und $i_1$, und folglich auch die Grösse $\mu$ finden, wie wir jetzt zuvörderst für $n = 1$ zeigen wollen, indem wir immer den Fall in's Auge fassen, wenn die beiden Körper, zwischen denen die Brechung Statt findet, Luft und Wasser sind.

Nach 26) und 27) hat man nämlich die beiden folgenden Gleichungen:

$$tang\, i = 2\, tang\, i_1\,,\quad {}^1/_2\, \Theta = i - 2 i_1.$$

Also ist

$$tang\, {}^1/_2\, \Theta = \frac{tang\, i - tang\, 2 i_1}{1 + tang\, i\; tang\, 2 i_1},$$

und weil nun

$$tang\, 2 i_1 = \frac{2\, tang\, i_1}{1 - tang\, i_1^2}$$

und $tang\, i_1 = {}^1/_2\, tang\, i$ ist,

so ist

$$tang\, 2 i_1 = \frac{tang\, i}{1 - {}^1/_4\, tang\, i^2},$$

also, wenn man dies in den obigen Ausdruck von $tang\, {}^1/_2\, \Theta$ einführt:

$$tang\, {}^1/_2\, \Theta = -\frac{{}^1/_4\, tang\, i^3}{1 + {}^3/_4\, tang\, i^2},$$

woraus sich ferner leicht zur Bestimmung von $i$ die Gleichung

$$31)\quad tang\, i^3 + 3\, tang\, {}^1/_2\, \Theta\, tang\, i^2 + 4\, tang\, {}^1/_2\, \Theta = 0$$

ergiebt. Weil aber bekanntlich

$$tang\, i = 2\, tang\, i_1$$

ist, so erhält man leicht auch die Gleichung

$$32)\quad tang\, i_1^3 + {}^3/_2\, tang\, {}^1/_2\, \Theta\, tang\, i_1^2 + {}^1/_2\, tang\, {}^1/_2\, \Theta = 0.$$

Ferner ergeben sich aus den beiden vorhergehenden Gleichungen auch sehr leicht die beiden folgenden Gleichungen:

$$33)\quad cot\, i^3 + {}^3/_4\, cot\, i + {}^1/_4\, cot\, {}^1/_2\, \Theta = 0$$

und

$$34)\quad cot\, i_1^3 + 3\, cot\, i_1 + 2\, cot\, {}^1/_2\, \Theta = 0,$$

welche den wichtigen Vortheil darbieten, dass in ihnen schon das zweite Glied fehlt, und also nicht erst weggeschafft zu werden braucht.

Um die Gleichung 34) aufzulösen, setzen wir der Kürze wegen

$$cot\, {}^1/_2\, \Theta = -a,\quad cot\, i_1 = x;$$

so wird die in Rede stehende Gleichung

$$x^3 + 3x - 2a = 0.$$

Da nach 27*) offenbar $cot\, {}^1/_2\, \Theta$ eine negative Grösse ist, so ist die Grösse $a$ positiv, und die Function

$$x^3 + 3x - 2a$$

enthält also nur einen Wechsel. Folglich hat die Gleichung

$$x^3 + 3x - 2a = 0$$

nicht mehr als eine positive Wurzel. Da ferner die aus der Function

$$x^3 + 3x - 2a$$

auf bekannte Weise abgeleitete Function

$$x^3 + 3x + 2a$$

gar keinen Wechsel enthält, so hat die Gleichung

$$x^3 + 3x - 2a = 0$$

keine negative Wurzel, und diese Gleichung eines ungeraden Grades hat also nur eine reelle, und zwar positive Wurzel, welche der gesuchte Werth von

$$x = cot\, i_1$$

ist.

Wendet man aber auf die Gleichung

$$x^3 + 3x - 2a = 0$$

die Cardanische Formel an, so erhält man nach einigen ganz leichten Transformationen

$$x = \sqrt[3]{(a + \sqrt{1 + a^2})} + \sqrt[3]{(a - \sqrt{1 + a^2})}.$$

Nun ist aber

$$1 + a^2 = 1 + cot\, {}^1/_2\, \Theta^2 = cosec\, {}^1/_2\, \Theta^2,$$

also, weil nach 27*) offenbar $cosec\, {}^1/_2\, \Theta$ negativ ist,

$$\sqrt{1 + a^2} = -\, cosec\, {}^1/_2\, \Theta,$$

und folglich

$$a + \sqrt{1 + a^2} = -cot\, {}^1/_2\, \Theta - cosec\, {}^1/_2\, \Theta = -\frac{1 + cos\, {}^1/_2\, \Theta}{sin\, {}^1/_2\, \Theta},$$

$$a - \sqrt{1 + a^2} = -cot\, {}^1/_2\, \Theta + cosec\, {}^1/_2\, \Theta = \frac{1 - cos\, {}^1/_2\, \Theta}{sin\, {}^1/_2\, \Theta};$$

oder

$$a + \sqrt{1 + a^2} = -\frac{2\, cos\, {}^1/_4\, \Theta^2}{2\, sin\, {}^1/_4\, \Theta\, cos\, {}^1/_4\, \Theta} = -\, cot\, {}^1/_4\, \Theta,$$

$$a - \sqrt{1 + a^2} = \frac{2\, sin\, {}^1/_4\, \Theta^2}{2\, sin\, {}^1/_4\, \Theta\, cos\, {}^1/_4\, \Theta} = tang\, {}^1/_4\, \Theta.$$

Daher ist

$$x = \cot i_1 = \sqrt[3]{-\cot {}^1/_4\Theta} + \sqrt[3]{\tang {}^1/_4\Theta},$$

oder

$$35)\quad \cot i_1 = \sqrt[3]{-\cot {}^1/_4\Theta} - \sqrt[3]{-\tang {}^1/_4\Theta},$$

oder auch

$$36)\quad \cot i_1 = \sqrt[3]{\tang {}^1/_4\Theta} - \sqrt[3]{\cot {}^1/_4\Theta},$$

wo nun aber die Grössen unter den Wurzelzeichen negativ sind.

Hat man auf diese Weise $i_1$ gefunden, so ergiebt sich $i$ mittelst der aus dem Obigen bekannten Formel

$$37)\quad \tang i = 2 \tang i_1,$$

und $\mu$ erhält man dann mittelst eines der beiden folgenden ebenfalls aus dem Obigen bekannten Ausdrücke:

$$38)\quad \mu = \frac{\sin i_1}{\sin i} = {}^1/_2 . \frac{\cos i_1}{\cos i}.$$

§. 8.

Für $n = 2$ haben wir nach 26) und 28) die beiden folgenden Gleichungen:

$$\tang i = 3 \tang i_1,\ {}^1/_2\Theta = {}^1/_2\pi + i - 3i_1.$$

Also ist

$$\cot {}^1/_2\Theta = -\tang(i - 3i_1) = -\frac{\tang i - \tang 3i_1}{1 + \tang i \tang 3i_1}.$$

Weil aber bekanntlich

$$\tang 3i_1 = \frac{3\tang i_1 - \tang i_1{}^3}{1 - 3\tang i_1{}^2},$$

und nach dem Vorhergehenden

$$\tang i_1 = {}^1/_3 \tang i$$

ist, so ist

$$\tang 3i_1 = \frac{27\tang i - \tang i^3}{27 - 9\tang i^2},$$

und folglich, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$\cot {}^1/_2\Theta = \frac{8\tang i^3}{27 + 18\tang i^2 - \tang i^4},$$

woraus sich ferner leicht die Gleichung

$$39)\quad \tang i^4 + 8\tang {}^1/_2\Theta \tang i^3 - 18\tang i^2 - 27 = 0,$$

oder die Gleichung

$$40)\quad tang\, i_1^4 + {}^8/_3\, tang\, {}^1/_2\, \Theta\, tang\, i_1^3 - 2\, tang\, i_1^2 - {}^1/_3 = 0$$

ergiebt. Diese beiden Gleichungen kann man aber auch auf die folgende Form bringen:

$$41)\quad cot\, i^4 + {}^2/_3\, cot\, i^2 - {}^8/_{27}\, tang\, {}^1/_2\, \Theta\, cot\, i - {}^1/_{27} = 0$$

und

$$42)\quad cot\, i_1^4 + 6\, cot\, i_1^2 - 8\, tang.\, {}^1/_2\, \Theta\, cot\, i_1 - 3 = 0.$$

Um die letzte Gleichung aufzulösen, setze man der Kürze wegen

$$a = tang\, {}^1/_2\, \Theta,\; x = cot\, i_1,$$

wo nach 28*) die Grösse $a$ positiv ist; so wird die in Rede stehende Gleichung

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3 = 0.$$

Da die Function

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3$$

nur einen Wechsel enthält, so kann die Gleichung

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3 = 0$$

nicht mehr als eine positive Wurzel haben. Da ferner auch die aus der Function

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3$$

auf bekannte Weise abgeleitete Function

$$x^4 + 6x^2 + 8ax - 3$$

nur einen Wechsel enthält, so kann die Gleichung

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3 = 0$$

auch nicht mehr als eine negative Wurzel haben. Weil aber das letzte Glied dieser Gleichung eines geraden Grades negativ ist, so hat dieselbe nach einem aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen bekannten Satze wirklich zwei reelle Wurzeln, von denen die eine positiv, die andere negativ ist, und ihre beiden andern Wurzeln sind nach dem Vorhergehenden imaginär. Die reelle positive Wurzel liefert den Werth der gesuchten Grösse $x = cot\, i_1$, da nach dem Obigen bekanntlich diese Grösse nur positiv sein kann, weil $i_1$ positiv und nicht grösser als $^1/_2\, \pi$ ist.

Um nun die Gleichung

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3 = 0$$

aufzulösen, setzen wir

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3 = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r),$$

d. i.

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3$$
$$= x^4 + (q + r - p^2)\,x^2 - p\,(q - r)\,x + qr,$$

woraus sich zur Bestimmung von $p$, $q$, $r$ die Gleichungen

$$q + r - p^2 = 6,$$
$$p(q - r) = 8a,$$
$$qr = -3$$

ergeben. Aus den beiden Gleichungen

$$q + r = p^2 + 6,$$
$$q - r = \frac{8a}{p}$$

erhält man

$$2q = p^2 + \frac{8a}{p} + 6,$$

$$2r = p^2 - \frac{8a}{p} + 6;$$

folglich

$$4qr = (p^2 + 6)^2 - \frac{64a^2}{p^2} = p^4 + 12p^2 - \frac{64a^2}{p^2} + 36,$$

und daher wegen der dritten der obigen Gleichungen zwischen den Grössen $p$, $q$, $r$:

$$p^4 + 12p^2 - \frac{64a^2}{p^2} + 36 = -12,$$

$$p^6 + 12p^4 + 48p^2 - 64a^2 = 0.$$

Setzt man jetzt

$$p^2 = u - 4,$$

so ist

$$\begin{aligned} p^6 &= u^3 - 12u^2 + 48u - 64, \\ 12p^4 &= \phantom{u^3 - {}} 12u^2 - 96u + 192, \\ 48p^2 &= \phantom{u^3 - 12u^2 - {}} 48u - 192, \\ -64a^2 &= \phantom{u^3 - 12u^2 - 48u} - 64a^2; \end{aligned}$$

also

$$p^6 + 12p^4 + 48p^2 - 64a^2 = u^3 - 64\,(1 + a^2),$$

folglich

$$u^3 - 64\,(1 + a^2) = 0, \quad u^3 = 64(1 + a^2),$$

also

$$u = 4\sqrt[3]{1+a^2}.$$

Folglich ist

$$p^2 = u - 4 = 4(\sqrt[3]{1+a^2} - 1),$$

$$p^2+6 = u + 2 = 4\sqrt[3]{1+a^2} + 2;$$

also nach dem Obigen

$$p = \pm 2\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2} - 1)},$$

$$q = 2\sqrt[3]{1+a^2}+1 \pm \frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}},$$

$$r = 2\sqrt[3]{1+a^2}+1 \mp \frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}},$$

Hat man mittelst dieser Formeln $p$, $q$, $r$ gefunden, so erhält man die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung des vierten Grades durch Auflösung der beiden folgenden Gleichungen des zweiten Grades:

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$x^2 - px + r = 0.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$p = \pm f,\ q = g \pm h,\ r = g \mp h$$

wo die Bedeutung der Symbole $f$, $g$, $h$ aus dem Obigen ganz von selbst erhellen wird; so werden die beiden Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0$$

und

$$x^2 - px + r = 0$$

respective

$$x^2 \pm fx + g \pm h = 0$$

und

$$x^2 \mp fx + g \mp h = 0,$$

und liefern also offenbar bloss die beiden Gleichungen

$$x^2 + fx + g + h = 0$$

und

$$x^2 - fx + g - h = 0,$$

weshalb es augenscheinlich genügt, bloss

$$p = 2\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)},$$

$$q = 2\sqrt[3]{1+a^2}+1+\frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}},$$

$$r = 2\sqrt[3]{1+a^2}+1-\frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}}$$

zu setzen, und dann die beiden Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$x^2 - px + r = 0$$

aufzulösen.

Löst man diese beiden Gleichungen wirklich auf, so erhält man

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q},$$
$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - r}.$$

Aber nach dem Vorhergehenden

$$\tfrac{1}{4}p^2 - q = -\sqrt[3]{1+a^2}-2-\frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}},$$

$$\tfrac{1}{4}p^2 - r = -\sqrt[3]{1+a^2}-2+\frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}};$$

also

$$x = -\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)} \pm \sqrt{\left\{-\sqrt[3]{1+a^2}-2-\frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}}\right\}},$$

$$x = \sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)} \pm \sqrt{\left\{-\sqrt[3]{1+a^2}-2+\frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}}\right\}};$$

wo die beiden ersten Wurzeln offenbar imaginär sind, und von den beiden letzten Wurzeln das obere Zeichen augenscheinlich die eine positive Wurzel liefert, welche nach dem Obigen die Gleichung nur haben kann, und die im vorliegenden Falle auch allein brauchbar ist.

Weil bekanntlich $a = tang\ \tfrac{1}{2}\Theta$ ist, so ist

$$\sqrt[3]{1+a^2} = \sec {}^1/_2\, \Theta^{\frac{2}{3}},$$

und folglich

$$43) \begin{cases} x = -\sqrt{(\sec {}^1/_2\, \Theta^{\frac{2}{3}} - 1)} \pm \sqrt{\left\{-2 - \sec {}^1/_2\, \Theta^{\frac{2}{3}} - \frac{2 \tan {}^1/_2\, \Theta}{\sqrt{(\sec {}^1/_2\, \Theta^{\frac{2}{3}} - 1)}}\right\}}, \\ x = \sqrt{(\sec {}^1/_2\, \Theta^{\frac{2}{3}} - 1)} \pm \sqrt{\left\{-2 - \sec {}^1/_2\, \Theta^{\frac{2}{3}} + \frac{2 \tan {}^1/_2\, \Theta}{\sqrt{(\sec {}^1/_2\, \Theta^{\frac{2}{3}} - 1)}}\right\}}; \end{cases}$$

wodurch also völlig entwickelte Ausdrücke der vier Wurzeln unserer Gleichung des vierten Grades gefunden sind, und diese Gleichung daher jetzt vollständig aufgelöst ist, was wohl als ein besonders bemerkenswerthes Resultat der ganzen vorhergehenden Untersuchung betrachtet werden darf.

Setzt man

$$44) \quad \sec U = \sec {}^1/_2\, \Theta^{\frac{1}{3}},$$

wo $U$ positiv und nicht grösser als ${}^1/_2\pi$ sein soll, so ist

$$\sec {}^1/_2\, \Theta^{\frac{2}{3}} - 1 = \sec U^2 - 1 = \tan U^2,$$

und folglich

$$\sqrt{(\sec {}^1/_2\, \Theta^{\frac{2}{3}} - 1)} = \tan U;$$

also

$$45) \begin{cases} x = -\tan U \pm \sqrt{(-2 - \sec U^2 - 2 \tan {}^1/_2\, \Theta \cot U)}, \\ x = \tan U \pm \sqrt{(-2 - \sec U^2 + 2 \tan {}^1/_2\, \Theta \cot U)}; \end{cases}$$

oder

$$46) \begin{cases} x = -\tan U \pm \sqrt{\left\{-\sec U^2 - \frac{2 \sin ({}^1/_2\, \Theta + U)}{\cos {}^1/_2\, \Theta \sin U}\right\}}, \\ x = \tan U \pm \sqrt{\left\{-\sec U^2 + \frac{2 \sin ({}^1/_2\, \Theta - U)}{\cos {}^1/_2\, \Theta \sin U}\right\}}. \end{cases}$$

Für $\cot i_1$ erhält man hieraus nach den oben gemachten Bemerkungen den folgenden Ausdruck:

$$47) \quad \cot i_1 = \tan U + \sqrt{\left\{-\sec U^2 + \frac{2 \sin ({}^1/_2\, \Theta - U)}{\cos {}^1/_2\, \Theta \sin U}\right\}},$$

oder

$$48) \quad \cot i_1 = \tan U + \sec U \sqrt{\left\{-1 + \frac{2 \sin ({}^1/_2\, \Theta - U) \cos U}{\cos {}^1/_2\, \Theta \tan U}\right\}}.$$

Berechnet man den Hülfswinkel $V$ mittelst der Formel

$$49)\quad \cos V = \sqrt{\frac{\cos {}^1\!/_2\,\Theta \operatorname{tang} U}{2\sin({}^1\!/_2\,\Theta - U)\cos U}},$$

und nimmt denselben positiv und nicht grösser als ${}^1\!/_2\pi$, so wird

$$\cot i_1 = \operatorname{tang} U + \sec U \sqrt{\sec V^2 - 1},$$

d. i.

$$50)\quad \cot i_1 = \operatorname{tang} U + \sec U \operatorname{tang} V,$$

oder

$$51)\quad \cot i_1 = \frac{\sin V + \sin U \cos V}{\cos U \cos V}.$$

Berechnete man nun noch den Hülfswinkel $W$ mittelst der Formel

$$52)\quad \sin W = \sin U \cos V,$$

so wäre, wie man leicht findet:

$$53)\quad \cot i_1 = \frac{2\sin {}^1\!/_2(V + W)\cos {}^1\!/_2(V - W)}{\cos U \cos V}.$$

Hat man aber $i_1$, so ergiebt sich $i$ mittelst der aus dem Obigen bekannten Formel

$$54)\quad \operatorname{tang} i = 3 \operatorname{tang} i_1,$$

und $\mu$ erhält man mittelst eines der beiden folgenden Ausdrücke:

$$55)\quad \mu = \frac{\sin i_1}{\sin i} = {}^1\!/_3 . \frac{\cos i_1}{\cos i}.$$

Stellen wir die sämmtlichen zur Berechnung von $\mu$ aus $\Theta$ erforderlichen Formeln nach dem Vorhergehenden in ihrer zur numerischen Rechnung bequemsten Form zusammen, so erhalten wir:

$$56)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos U &= \cos {}^1\!/_2\,\Theta^{\frac{1}{3}},\\
\cos V &= \left\{\frac{\cos {}^1\!/_2\,\Theta \operatorname{tang} U}{2\sin({}^1\!/_2\,\Theta - U)\cos U}\right\}^{\frac{1}{2}},\\
\sin W &= \sin U \cos V,\\
\cot i_1 &= \frac{2\sin {}^1\!/_2(V + W)\cos {}^1\!/_2(V - W)}{\cos U \cos V},\\
\cot i &= {}^1\!/_3 \cot i_1,\\
\mu &= \frac{\sin i_1}{\sin i} = {}^1\!/_3 . \frac{\cos i_1}{\cos i}.
\end{aligned}\right.$$

§. 9.

In der Kürze wollen wir nun auch noch den Fall, wenn $n=3$ ist, betrachten.

In diesem Falle hat man nach 26) und 29) die beiden Gleichungen

$$tang\, i = 4\, tang\, i_1,\ {}^1/_2\, \Theta = \pi + i - 4 i_1.$$

Also ist

$$tang\, {}^1/_2\, \Theta = tang\, (i - 4i_1) = \frac{tang\, i - tang\, 4i_1}{1 + tang\, i\, tang\, 4i_1}.$$

Weil nun bekanntlich

$$tang\, 4i_1 = \frac{4\, tang\, i_1 - 4\, tang\, i_1^3}{1 - 6\, tang\, i_1^2 + tang\, i_1^4}$$

ist, so ist, wie man leicht findet,

$$tang\, {}^1/_2\, \Theta = \frac{-20\, tang\, i_1^3 - 4\, tang\, i_1^5}{1 + 10\, tang\, i_1^2 - 15\, tang\, i_1^4},$$

woraus sich ferner leicht die Gleichung

$$57)\ \left.\begin{array}{l} tang\, i_1^6 + {}^{15}/_4\, tang\, {}^1/_2\, \Theta\, tang\, i_1^4 \\ \quad - 5\, tang\, i_1^3 \\ \quad - {}^5/_2\, tang\, {}^1/_2\, \Theta\, tang\, i_1^2 \\ \quad - {}^1/_4\, tang\, {}^1/_2\, \Theta \end{array}\right\} = 0$$

oder die Gleichung

$$58)\ \left.\begin{array}{l} tang\, i^5 + 15\, tang\, {}^1/_2\, \Theta\, tang\, i^4 \\ \quad - 80\, tang\, i^3 \\ \quad - 160\, tang\, {}^1/_2\, \Theta\, tang\, i^2 \\ \quad - 256\, tang\, {}^1/_2\, \Theta \end{array}\right\} = 0$$

ergiebt. Man kann diese beiden Gleichungen aber auch leicht auf die folgende Form bringen:

$$59)\ \left.\begin{array}{l} cot\, i_1^5 + 10\, cot\, i_1^3 \\ \quad + 20\, cot\, {}^1/_2\, \Theta\, cot\, i_1^2 \\ \quad - 15\, cot\, i_1 \\ \quad - 4\, cot\, {}^1/_2\, \Theta \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$60)\quad \left.\begin{aligned} cot\, i^5 &+ {}^5/_8\, cot\, i^3 \\ &+ {}^5/_{16}\, cot\, {}^1/_2\, \Theta\, cot\, i^2 \\ &- {}^{15}/_{256}\, cot\, i \\ &- {}^1/_{256}\, cot\, {}^1/_2\, \Theta \end{aligned}\right\} = 0.$$

Nach 29*) sind $tang\, {}^1/_2\, \Theta$ und $cot\, {}^1/_2\, \Theta$ positive Grössen. Also sind die letzten Glieder der obigen Gleichungen negativ, und alle positiven Glieder folgen in denselben ohne Unterbrechung auf das erste Glied. Daher hat nach einem bekannten Satze der allgemeinen Theorie der Gleichungen jede der obigen Gleichungen eine, aber auch nur eine reelle positive Wurzel.

## §. 10.

Der bisher befolgten Methode der Entwickelung, die sich allerdings durch ihre Einfachheit und auch dadurch empfiehlt, dass sie im Ganzen nur ein geringes Maass mathematischer Kenntnisse in Anspruch nimmt, steht dessenungeachtet der nicht unwichtige Umstand entgegen, dass sie nur auf den speciellen Fall des Kreises anwendbar ist und überhaupt ihrem Wesen nach einer Erweiterung nicht fähig sein dürfte, so dass man also schon dann, wenn man statt des Kreises etwa die Ellipse in Betrachtung ziehen wollte, was für die Theorie des Regenbogens, wie wir späterhin sehen werden, aus einem besonderen Grunde von Wichtigkeit ist, zu einer andern Methode seine Zuflucht zu nehmen genöthigt sein würde. Wir wollen daher jetzt die vorige Untersuchung, indem wir uns bei derselben der von der neueren analytischen Geometrie in reichlichem Maasse dargebotenen Hülfsmittel bedienen, noch auf einem von dem bisher befolgten ganz verschiedenen Wege anstellen, und wollen zugleich statt eines Kreises die denselben als einen besondern Fall unter sich begreifende Ellipse setzen, wenigstens so weit dies, ohne uns in zu grosse Weitläufigkeiten verwickeln zu müssen, geschehen kann. Zuerst müssen wir aber noch die folgende bloss geometrische Betrachtung über die Normalen der Ellipse vorausschicken.

## §. 11.

Wenn wie gewöhnlich

$$61)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung einer Ellipse ist, und durch $X$, $Y$ die Coordinaten eines beliebigen bestimmten Punktes $(XY)$ in derselben bezeichnet

werden, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie bekanntlich

$$62)\ y - Y = -\frac{\partial X}{\partial Y}(x - X)$$

die Gleichung der diesem Punkte entsprechenden Normale der Ellipse. Aus der Gleichung 61) der Ellipse folgt durch Differentiation auf der Stelle

$$\frac{x}{a^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{y}{b^2} = 0,\ \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{a^2 y}{b^2 x};$$

also

$$\frac{\partial X}{\partial Y} = -\frac{a^2 Y}{b^2 X},$$

und die Gleichung der dem Punkte $(XY)$ der Ellipse entsprechenden Normale derselben ist folglich nach dem Vorhergehenden

$$63)\ y - Y = \frac{a^2 Y}{b^2 X}(x - X).$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser Normale mit der Axe der $x$ durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$; so ist $\mathfrak{Y} = 0$, und folglich nach 63)

$$-Y = \frac{a^2 Y}{b^2 X}(\mathfrak{X} - X),\ \mathfrak{X} - X = -\frac{b^2}{a^2} X;$$

also

$$\mathfrak{X} = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) X = \frac{a^2 - b^2}{a^2} X = \frac{e^2}{a^2} X,$$

wo $e$ seine aus der Lehre von der Ellipse hinreichend bekannte Bedeutung hat.

Die Coordinaten des Punktes $(XY)$ in Bezug auf ein durch den Punkt $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ als Anfang gelegtes, dem primitiven Systeme der $xy$ paralleles Coordinatensystem sind nach den bekannten allgemeinen Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$X - \mathfrak{X} = \frac{b^2}{a^2} X,\ Y - \mathfrak{Y} = Y.$$

Ist nun $R$ die Entfernung des Punktes $(XY)$ von dem Punkte $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$, und bezeichnet $N$ den Winkel, welchen der von dem Punkte $(XY)$ an nach dem äusseren Raume der Ellipse hin liegende Theil der diesem Punkte entsprechenden Normale der Ellipse mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt $(XY)$ gelegten,

dem primitiven Systeme der $xy$ parallelen Cordinatensystems einschliesst, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der in Rede stehenden Axe an durch den Coordinatenwinkel des entsprechenden Coordinatensystems hindurch von 0 bis 360° zählt; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$X - \mathfrak{X} = R\cos N,\quad Y - \mathfrak{Y} = R\sin N;$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$R\cos N = \frac{b^2}{a^2}X,\quad R\sin N = Y;$$

also, weil bekanntlich

$$R = \sqrt{(X - \mathfrak{X})^2 + (Y - \mathfrak{Y})^2} = \frac{\sqrt{b^4X^2 + a^4Y^2}}{a^2}$$

ist:

$$b^2X = \cos N\sqrt{b^4X^2 + a^4Y^2},\quad a^2Y = \sin N\sqrt{b^4X^2 + a^4Y^2};$$

folglich

$$64)\quad \cos N = \frac{b^2X}{\sqrt{b^4X^2 + a^4Y^2}},\quad \sin N = \frac{a^2Y}{\sqrt{b^4X^2 + a^4Y^2}}.$$

Bezieht sich der Winkel $(N)$ auf den von dem Punkte $(XY)$ an nach dem inneren Raume der Ellipse hin liegenden Theil der Normale derselben in diesem Punkte, und wird ganz auf ähnliche Art, wie vorher, der Winkel $N$ genommen; so ist offenbar entweder

$$(N) = N + 180^0$$

oder

$$N = (N) + 180^0,$$

also überhaupt

$$(N) = N \pm 180^0,$$

und folglich allgemein

$$\cos(N) = -\cos N,\quad \sin(N) = -\sin N;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$65)\quad \cos(N) = -\frac{b^2X}{\sqrt{b^4X^2 + a^4Y^2}},\quad \sin(N) = -\frac{a^2Y}{\sqrt{b^4X^2 + a^4Y^2}}.$$

## §. 12.

Nach dieser vorläufigen, für das Folgende wichtigen Betrachtung über die Normalen der Ellipse wollen wir uns jetzt, auf ganz ähnliche Art wie früher bei dem Kreise, einen Strahl denken,

welcher, aus dem äusseren Raume der Ellipse herkommend, dieselbe in dem Punkte $(XY)$ trifft. Der 180° nicht übersteigende Winkel, welchen der von dem Punkte $(XY)$ an nach dem äusseren Raume der Ellipse, d. h. nach der Seite hin, von welcher der Strahl her kommt, also der Richtung der Bewegung des Strahls entgegen liegende Theil desselben mit dem von dem Punkte $(XY)$ an nach dem äusseren Raume der Ellipse hin liegenden Theile der diesem Punkte entsprechenden Normale derselben einschliesst, sei $V$. Durch den Punkt $(XY)$ denken wir uns ein dem primitiven Systeme der $xy$ paralleles Coordinatensystem gelegt, und bezeichnen, unter der Voraussetzung, dass der Strahl in dem Punkte $(XY)$ an der Ellipse eine Brechung erleidet, die von dem als von dem Punkte $(XY)$ ausgehend gedachten einfallenden und gebrochenen Strahle mit dem positiven Theile der ersten Axe des in Rede stehenden Coordinatensystems eingeschlossenen, von diesem Theile der ersten Axe an durch den Coordinatenwinkel des Systems hindurch von 0 bis 360° gezählten Winkel respective durch $U$ und $U'$; so ist, wie leicht erhellen wird, nach den in meinen Optischen Untersuchungen. Erster Theil. Leipzig. 1846. S. 34. Nr. 50. entwickelten allgemeinen optischen Grundformeln, wenn man nur die dort gebrauchten Zeichen nach den hier eingeführten Bezeichnungen gehörig modificirt, weil hier offenbar immer $V < 90°$ ist:

$$66)\left\{\begin{aligned}\cos U' &= -\mu\cos U + \cos N(\mu\cos V - \sqrt{1-\mu^2\sin V^2}),\\ \sin U' &= -\mu\sin U + \sin N(\mu\cos V - \sqrt{1-\mu^2\sin V^2});\end{aligned}\right.$$

wo $\mu$ und $N$ ihre schon aus dem Vorhergehenden bekannten Bedeutungen haben. Nun ist aber nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie allgemein

$$\cos V = \cos U\cos N + \sin U\sin N,$$

d. i. allgemein

$$\cos V = \cos(U-N),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\cos U' = -\mu\cos U + \cos N\{\mu\cos(U-N) - \sqrt{1-\mu^2\sin(U-N)^2}\},$$

$$\sin U' = -\mu\sin U + \sin N\{\mu\cos(U-N) - \sqrt{1-\mu^2\sin(U-N)^2}\};$$

also, weil

$$\begin{aligned}&-\cos U + \cos N\cos(U-N)\\ =&-\cos U + \cos U\cos N^2 + \sin U\sin N\cos N\\ =&-\cos U\sin N^2 + \sin U\sin N\cos N\\ =&\ \sin N(\sin U\cos N - \cos U\sin N) = \sin N\sin(U-N)\end{aligned}$$

und

$$-\sin U + \sin N \cos(U - N)$$
$$= -\sin U + \sin U \sin N^2 + \cos U \sin N \cos N$$
$$= -\sin U \cos N^2 + \cos U \sin N \cos N$$
$$= -\cos N(\sin U \cos N - \cos U \sin N) = -\cos N \sin(U - N)$$

ist:

$$67)\ \begin{cases} \cos U' = \mu \sin N \sin(U-N) - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin(U-N)^2}, \\ \sin U' = -\mu \cos N \sin(U-N) - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin(U-N)^2}. \end{cases}$$

Der gebrochene Strahl treffe jetzt die Ellipse in dem Punkte $(X_1 Y_1)$; so ist, wenn der Strahl in diesem Punkte eine Zurückwerfung erleidet, nach den allgemeinen optischen Grundformeln, indem die Bedeutung der im Folgenden gebrauchten Symbole aus dem Vorhergehenden gewiss ganz von selbst ohne alle weitere Erläuterung erhellen wird:

$$\cos U_1' = -\cos U_1 + \cos(N_1)(\cos V_1 + \sqrt{1 - \sin V_1^2}),$$

$$\sin U_1' = -\sin U_1 + \sin(N_1)(\cos V_1 + \sqrt{1 - \sin V_1^2}).$$

Nun ist aber nach dem schon vorher angewandten bekannten Satze der analytischen Geometrie allgemein

$$\cos V_1 = \cos U_1 \cos(N_1) + \sin U_1 \sin(N_1),$$

d. i. allgemein

$$\cos V_1 = \cos(U_1 - (N_1)),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\cos U_1' = -\cos U_1 + \cos(N_1)\{\cos(U_1 - (N_1)) \pm \cos(U_1 - (N_1))\},$$
$$\sin U_1' = -\sin U_1 + \sin(N_1)\{\cos(U_1 - (N_1)) \pm \cos(U_1 - (N_1))\};$$

wo die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen, nun aber die Frage entsteht, welche dieser Zeichen man zu nehmen hat, die auf folgende Art leicht beantwortet werden kann.

Nähme man die unteren Zeichen, so erhielte man

$$\cos U_1' = -\cos U_1, \quad \sin U_1' = -\sin U_1;$$

also

$$\tang U_1' = \tang U_1.$$

Die Gleichungen der geraden Linien, in denen der einfallende und zurückgeworfene Strahl liegen, sind aber bekanntlich

$$y - Y_1 = (x - X_1) \tang U_1$$

und

$$y - Y_1 = (x - X_1)\ tang\ U_1',$$

so dass also diese beiden geraden Linien im Allgemeinen zusammenfallen würden, wenn man die untern Zeichen nehmen wollte, was jedenfalls ungereimt ist. Daher muss man die oberen Zeichen nehmen.

Nimmt man aber diesem gemäss in den beiden obigen Gleichungen die oberen Zeichen, so werden diese Gleichungen

$$\cos U_1' = -\cos U_1 + 2\cos(N_1)\cos(U_1 - (N_1)),$$
$$\sin U_1' = -\sin U_1 + 2\sin(N_1)\cos(U_1 - (N_1));$$

d. i.

$$\cos U_1' = -\cos U_1 + 2\cos(N_1)^2\cos U_1 + 2\sin(N_1)\cos(N_1)\sin U_1,$$
$$\sin U_1' = -\sin U_1 + 2\sin(N_1)^2\sin U_1 + 2\sin(N_1)\cos(N_1)\cos U_1$$

oder

$$\cos U_1' = -\{1 - 2\cos(N_1)^2\}\cos U_1 + 2\sin(N_1)\cos(N_1)\sin U_1,$$
$$\sin U_1' = -\{1 - 2\sin(N_1)^2\}\sin U_1 + 2\sin(N_1)\cos(N_1)\cos U_1;$$

d. i. nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\cos U_1' = \cos U_1\cos 2(N_1) + \sin U_1\sin 2(N_1),$$
$$\sin U_1' = -\sin U_1\cos 2(N_1) + \cos U_1\sin 2(N_1);$$

also

$$\cos U_1' = \cos(U_1 - 2(N_1)),$$
$$\sin U_1' = -\sin(U_1 - 2(N_1)).$$

Nun ist aber offenbar entweder

$$U_1 = U' + 180^0$$

oder

$$U' = U_1 + 180^0,$$

also

$$U_1 = U' \pm 180^0,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\cos U_1' = \cos(U' - 2(N_1) \pm 180^0),$$
$$\sin U_1' = -\sin(U' - 2(N_1) \pm 180^0);$$

d. i. allgemein

$$68)\ \begin{cases}\cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)),\\ \sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1)).\end{cases}$$

Der zurückgeworfene Strahl treffe nun ferner die Ellipse in dem Punkte $(X_2 Y_2)$, und erleide in demselben eine Brechung; so ist, indem die Bedeutung aller im Folgenden gebrauchten Symbole

$$p = 2\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)},$$

$$q = 2\sqrt[3]{1+a^2}+1+\frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}},$$

$$r = 2\sqrt[3]{1+a^2}+1-\frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}}$$

zu setzen, und dann die beiden Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$x^2 - px + r = 0$$

aufzulösen.

Löst man diese beiden Gleichungen wirklich auf, so erhält man

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q},$$
$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - r}.$$

Aber nach dem Vorhergehenden

$$\tfrac{1}{4}p^2 - q = -\sqrt[3]{1+a^2}-2-\frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}},$$

$$\tfrac{1}{4}p^2 - r = -\sqrt[3]{1+a^2}-2+\frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}};$$

also

$$x = -\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)} \pm \sqrt{\left\{-\sqrt[3]{1+a^2}-2-\frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}}\right\}},$$

$$x = \sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)} \pm \sqrt{\left\{-\sqrt[3]{1+a^2}-2+\frac{2a}{\sqrt{(\sqrt[3]{1+a^2}-1)}}\right\}};$$

wo die beiden ersten Wurzeln offenbar imaginär sind, und von den beiden letzten Wurzeln das obere Zeichen augenscheinlich die eine positive Wurzel liefert, welche nach dem Obigen die Gleichung nur haben kann, und die im vorliegenden Falle auch allein brauchbar ist.

Weil bekanntlich $a = tang\ \tfrac{1}{2}\,\Theta$ ist, so ist

$$\sqrt[3]{1+a^2} = \sec \tfrac{1}{2}\Theta^{\frac{2}{3}},$$

und folglich

$$43)\begin{cases} x = -\sqrt{(\sec \tfrac{1}{2}\Theta^{\frac{2}{3}}-1)} \pm \sqrt{\left\{-2-\sec \tfrac{1}{2}\Theta^{\frac{2}{3}} - \dfrac{2\, tang\, \tfrac{1}{2}\Theta}{\sqrt{(\sec \tfrac{1}{2}\Theta^{\frac{2}{3}}-1)}}\right\}}, \\ x = \sqrt{(\sec \tfrac{1}{2}\Theta^{\frac{2}{3}}-1)} \pm \sqrt{\left\{-2-\sec \tfrac{1}{2}\Theta^{\frac{2}{3}} + \dfrac{2\, tang\, \tfrac{1}{2}\Theta}{\sqrt{(\sec \tfrac{1}{2}\Theta^{\frac{2}{3}}-1)}}\right\}}; \end{cases}$$

wodurch also völlig entwickelte Ausdrücke der vier Wurzeln unserer Gleichung des vierten Grades gefunden sind, und diese Gleichung daher jetzt vollständig aufgelöst ist, was wohl als ein besonders bemerkenswerthes Resultat der ganzen vorhergehenden Untersuchung betrachtet werden darf.

Setzt man

$$44)\quad \sec U = \sec \tfrac{1}{2}\Theta^{\frac{2}{3}},$$

wo $U$ positiv und nicht grösser als $\tfrac{1}{2}\pi$ sein soll, so ist

$$\sec \tfrac{1}{2}\Theta^{\frac{2}{3}} - 1 = \sec U^2 - 1 = tang\, U^2,$$

und folglich

$$\sqrt{(\sec \tfrac{1}{2}\Theta^{\frac{2}{3}} - 1)} = tang\, U;$$

also

$$45)\begin{cases} x = -\,tang\, U \pm \sqrt{(-2-\sec U^2 - 2\, tang\, \tfrac{1}{2}\Theta \cot U)}, \\ x = \phantom{-}tang\, U \pm \sqrt{(-2-\sec U^2 + 2\, tang\, \tfrac{1}{2}\Theta \cot U)}; \end{cases}$$

oder

$$46)\begin{cases} x = -\,tang\, U \pm \sqrt{\left\{-\sec U^2 - \dfrac{2\sin(\tfrac{1}{2}\Theta + U)}{\cos \tfrac{1}{2}\Theta \sin U}\right\}}, \\ x = \phantom{-}tang\, U \pm \sqrt{\left\{-\sec U^2 + \dfrac{2\sin(\tfrac{1}{2}\Theta - U)}{\cos \tfrac{1}{2}\Theta \sin U}\right\}}. \end{cases}$$

Für $\cot i_1$ erhält man hieraus nach den oben gemachten Bemerkungen den folgenden Ausdruck:

$$47)\quad \cot i_1 = tang\, U + \sqrt{\left\{-\sec U^2 + \frac{2\sin(\tfrac{1}{2}\Theta - U)}{\cos \tfrac{1}{2}\Theta \sin U}\right\}},$$

oder

$$48)\quad \cot i_1 = tang\, U + \sec U \sqrt{\left\{-1 + \frac{2\sin(\tfrac{1}{2}\Theta - U)\cos U}{\cos \tfrac{1}{2}\Theta\, tang\, U}\right\}}.$$

Für zwei Brechungen und zwei Zurückwerfungen hat man dagegen nach dem Vorhergehenden die folgenden Formeln:

$$73)\left\{\begin{aligned}
\cos U' &= \mu \sin N \sin(U-N) - \cos N \sqrt{1-\mu^2 \sin(U-N)^2},\\
\sin U' &= -\mu \cos N \sin(U-N) - \sin N \sqrt{1-\mu^2 \sin(U-N)^2};\\
\cos U_1' &= -\cos(U'-2(N_1)),\\
\sin U_1' &= \sin(U'-2(N_1));\\
\cos U_2' &= -\cos(U_1'-2(N_2)),\\
\sin U_2' &= \sin(U_1'-2(N_2));\\
\cos U_3' &= -\frac{1}{\mu}\sin(N_3)\sin(U_2'-(N_3)) - \cos(N_3)\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}(\sin U_2'-(N_3))^2},\\
\sin U_3' &= -\frac{1}{\mu}\cos(N_3)\sin(U_2'-(N_3)) - \sin(N_3)\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(U_2'-(N_3))^2}.
\end{aligned}\right.$$

Wie man die betreffenden Formeln für zwei Brechungen und eine grössere Anzahl von Zurückwerfungen zu construiren haben würde, unterliegt hiernach keinem Zweifel, und bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Zur Bestimmung von

$$N,\ (N_1),\ (N_2),\ (N_3)$$

hat man nach §. 11. die folgenden Formeln:

$$74)\left\{\begin{aligned}
\cos N &= \frac{b^2 X}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}, & \sin N &= \frac{a^2 Y}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}};\\
\cos(N_1) &= -\frac{b^2 X_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}}, & \sin(N_1) &= -\frac{a^2 Y_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}};\\
\cos(N_2) &= -\frac{b^2 X_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}, & \sin(N_2) &= -\frac{a^2 Y_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}};\\
\cos(N_3) &= -\frac{b^2 X_3}{\sqrt{b^4 X_3^2 + a^4 Y_3^2}}, & \sin(N_3) &= -\frac{a^2 Y_3}{\sqrt{b^4 X_3^2 + a^4 Y_2^2}};
\end{aligned}\right.$$

und es kommt also, um die Lage des letzten gebrochenen Strahls vollkommen bestimmen zu können, bloss noch auf die Entwickelung der Coordinaten

$$X_1,\ Y_1;\ X_2,\ Y_2;\ X_3,\ Y_3$$

an, mit welcher wir uns daher im folgenden Paragraphen zunächst beschäftigen wollen.

## §. 13.

Die Gleichung des ersten gebrochenen Strahls ist bekanntlich

$$y - Y = (x - X)\,tang\,U'.$$

Also ist, da der Punkt $(X_1\,Y_1)$ in diesem Strahle liegt,

$$Y_1 - Y = (X_1 - X)\,tang\,U'.$$

Nun ist aber, weil $(X\,Y)$ und $(X_1\,Y_1)$ Punkte der Ellipse sind,

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1,\ \left(\frac{X_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y_1}{b}\right)^2 = 1;$$

also

$$\frac{X^2 + X_1^2}{x^2} + \frac{Y^2 + Y_1^2}{b^2} = 2,$$

und folglich

$$\frac{(X - X_1)^2}{a^2} + \frac{(Y - Y_1)^2}{b^2} = 2\left(1 - \frac{XX_1}{a^2} - \frac{YY_1}{b^2}\right)$$

$$= 2\left\{1 + \frac{X(X - X_1)}{a^2} + \frac{Y(Y - Y_1)}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}\right\}$$

$$= 2\left\{\frac{X(X - X_1)}{a^2} + \frac{Y(Y - Y_1)}{b^2}\right\}$$

oder

$$\frac{(X_1 - X)^2}{a^2} + \frac{(Y_1 - Y)^2}{b^2} = -2\left\{\frac{X(X_1 - X)}{a^2} + \frac{Y(Y_1 - Y)}{b^2}\right\},$$

d. i. nach dem Obigen

$$(X_1 - X)^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{tang\,U'^2}{b^2}\right)$$

$$= -2\left\{\frac{X(X_1 - X)}{a^2} + \frac{Y(X_1 - X)\,tang\,U'}{b^2}\right\},$$

also, weil offenbar im Allgemeinen nicht $X_1 - X = 0$ ist:

$$(X_1 - X)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{tang\,U'^2}{b^2}\right) = -2\left(\frac{X}{a^2} + \frac{Y\,tang\,U'}{b^2}\right).$$

Folglich ist, wie man leicht findet:

$$75)\left\{\begin{aligned} X_1 - X &= -2\,\frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2}\,\cos U', \\ Y_1 - Y &= -2\,\frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2}\,\sin U'; \end{aligned}\right.$$

oder

$$76)\begin{cases} X_1 = X - 2\dfrac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2} \cos U', \\[2ex] Y_1 = Y - 2\dfrac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2} \sin U'. \end{cases}$$

Ganz eben so ist aber

$$77)\begin{cases} X_2 = X_1 - 2\dfrac{a^2 Y_1 \sin U_1' + b^2 X_1 \cos U_1'}{a^2 \sin U_1'^2 + b^2 \cos U_1'^2} \cos U_1', \\[2ex] Y_2 = Y_1 - 2\dfrac{a^2 Y_1 \sin U_1' + b^2 X_1 \cos U_1'}{a^2 \sin U_1'^2 + b^2 \cos U_1'^2} \sin U_1'; \end{cases}$$

und

$$78)\begin{cases} X_3 = X_2 - 2\dfrac{a^2 Y_2 \sin U_2' + b^2 X_2 \cos U_2'}{a^2 \sin U_2'^2 + b^2 \cos U_2'^2} \cos U_2', \\[2ex] Y_3 = Y_2 - 2\dfrac{a^2 Y_2 \sin U_2' + b^2 X_2 \cos U_2'}{a^2 \sin U_2'^2 + b^2 \cos U_2'^2} \sin U_2'; \end{cases}$$

und wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel.

## §. 14.

Stellen wir nun die sämmtlichen gefundenen Formeln übersichtlich und so zusammen, dass sogleich deutlich erkannt werden kann, wie dieselben bei der Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls nach und nach in Anwendung zu bringen sind, so erhalten wir zuerst für zwei Brechungen und eine Zurückwerfung:

$$79)\quad \cos N = \frac{b^2 X}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}, \quad \sin N = \frac{a^2 Y}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}};$$

$$\cos U' = \mu \sin N \sin(U-N) - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin(U-N)^2},$$

$$\sin U' = -\mu \cos N \sin(U-N) - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin(U-N)^2};$$

$$X_1 = X - 2\frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2} \cos U',$$

$$Y_1 = Y - 2\frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2} \sin U';$$

$$\cos(N_1) = -\frac{b^2 X_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}}, \quad \sin(N_1) = -\frac{a^2 Y_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}};$$

$$\cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)),$$

$$\sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1));$$

$$X_2 = X_1 - 2\frac{a^2 Y_1 \sin U_1' + b^2 X_1 \cos U_1'}{a^2 \sin U_1'^2 + b^2 \cos U_1'^2} \cos U_1',$$

$$Y_2 = Y_1 - 2\frac{a^2 Y_1 \sin U_1' + b^2 X_1 \cos U_1'}{a^2 \sin U_1'^2 + b^2 \cos U_1'^2} \sin U_1';$$

$$\cos(N_2) = -\frac{b^2 X_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}, \quad \sin(N_2) = -\frac{a^2 Y_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}};$$

$$\cos U_2' = -\frac{1}{\mu} \sin(N_2) \sin(U_1' - (N_2)) - \cos(N_2) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(U_1' - (N_2))^2},$$

$$\sin U_2' = \frac{1}{\mu} \cos(N_2) \sin(U_1' - (N_2)) - \sin(N_2) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(U_1' - (N_2))^2}.$$

Für zwei Brechungen und zwei Zurückwerfungen hat man dagegen folgenden Formeln:

$$80) \quad \cos N = \frac{b^2 X}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}, \quad \sin N = \frac{a^2 Y}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}};$$

$$\cos U' = \mu \sin N \sin(U - N) - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin(U - N)^2},$$

$$\sin U' = -\mu \cos N \sin(U - N) - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin(U - N)^2};$$

$$X_1 = X - 2\frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2} \cos U',$$

$$Y_1 = Y - 2\frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2} \sin U';$$

$$\cos(N_1) = -\frac{a^2 X_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}}, \quad \sin(N_1) = -\frac{b^2 Y_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}};$$

$$\cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)),$$

$$\sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1));$$

$$X_2 = X_1 - 2\frac{a^2 Y_1 \sin U_1' + b^2 X_1 \cos U_1'}{a^2 \sin U_1'^2 + b^2 \cos U_1'^2} \cos U_1',$$

$$Y_2 = Y_1 - 2\frac{a^2 Y_1 \sin U_1' + b^2 X_1 \cos U_1'}{a^2 \sin U_1'^2 + b^2 \cos U_1'^2} \sin U_1';$$

$$\cos(N_2) = -\frac{b^2 X_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}, \quad \sin(N_2) = -\frac{a^2 Y_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}};$$

$$\cos U_2' = -\cos(U_1' - 2(N_2)),$$

$$\sin U_2' = \sin(U_1' - 2(N_2));$$

$$X_3 = X_2 - 2\,\frac{a^2 Y_2 \sin U_2' + b^2 X_2 \cos U_2'}{a^2 \sin U_2'^2 + b^2 \cos U_2'^2} \cos U_2',$$

$$Y_3 = Y_2 - 2\,\frac{a^2 Y_2 \sin U_2 + b^2 X_2 \cos U_2'}{a^2 \sin U_2'^2 + b^2 \cos U_2'^2} \sin U_2';$$

$$\cos(N_3) = -\frac{b^2 X_3}{\sqrt{b^4 X_3^2 + a^4 Y_3^2}}, \quad \sin(N_3) = -\frac{a^2 Y_3}{\sqrt{b^4 X_3^2 + a^4 Y_3^2}};$$

$$\cos U_3' = -\frac{1}{\mu}\sin(N_3)\sin(U_2' - (N_3)) - \cos(N_3)\sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2}\sin(U_2' - (N_3))^2},$$

$$\sin U_3' = \frac{1}{\mu}\cos(N_3)\sin(U_2' - (N_3)) - \sin(N_3)\sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2}\sin(U_2' - (N_3))^2}.$$

Wie man in anderen complicirteren Fällen die betreffenden Formeln zu construiren hat, kann hiernach nicht im Geringsten zweifelhaft sein.

Auch würden sich aus den obigen Formeln noch eine ziemlich grosse Anzahl anderer Formeln ableiten lassen, die für jetzt jedoch absichtlich von uns übergangen, im Laufe der Untersuchung aber allerdings noch vorkommen werden. Die grössere Leichtigkeit der Rechnung, welche diese noch abzuleitenden Formeln vielleicht gestatten dürften, ist indess, streng genommen, wenigstens zum Theil eigentlich nur scheinbar, und ich glaube selbst, ohne übrigens auf weitere Erörterungen hierüber mich jetzt einzulassen, mich zu der Behauptung berechtigt halten zu dürfen, dass nur in den obigen Formeln die völlig strenge und allgemeine, nicht der geringsten Unbestimmtheit Raum lassende Auflösung unsers Problems enthalten ist, und dass es einfachere Formeln zur Auflösung desselben überhaupt nicht giebt, wenn man sich nicht der Verlegenheit aussetzen will, bei der Entscheidung über gewisse übrig bleibende Unbestimmtheiten rücksichtlich der Lage der verschiedenen Linien zu anderweitigen, nicht durch die Formeln selbst unmittelbar dargebotenen und von selbst an die Hand gegebenen Beurtheilungen seine Zuflucht nehmen zu müssen, was doch in allen Fällen gewiss wenigstens unangenehm, jedenfalls aber den Forderungen, die man

an eine vorzüglich durch ihre Strenge und Evidenz sich auszeichnen sollende Wissenschaft zu machen sich berechtigt halten darf, keineswegs gemäss und gehörig entsprechend ist. In der Folge werden an verschiedenen Orten noch einzelne Bemerkungen vorkommen, in denen die so eben ausgesprochenen Ansichten und Behauptungen nähere Erläuterung finden werden.

§. 15.

Wenn die im Vorhergehenden betrachtete Ellipse ein Kreis ist, so ist $a = b$, und man kann dann offenbar, was der Erleichterung der Rechnung wegen vortheilhaft ist, die Axe der $x$ immer den einfallenden Strahlen parallel, und den positiven Theil dieser Axe von dem Mittelpunkte des Kreises an nach der Gegend hin nehmen, von welcher die einfallenden Strahlen her kommen, wo dann augenscheinlich der aus dem Vorhergehenden bekannte Winkel $U = 0$ ist. Bezeichnen wir nun den Halbmesser dieses Kreises durch $R$, so dass

$$81)\quad x^2 + y^2 = R^2$$

seine Gleichung ist, so ergeben sich nach 79) für zwei Brechungen und eine Zurückwerfung zur Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls die folgenden Formeln:

$$82)\quad \cos N = \frac{X}{R},\ \sin N = \frac{Y}{R};$$

$$\cos U' = -\mu \sin N \sin N - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2},$$

$$\sin U' = \mu \cos N \sin N - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2};$$

$$X_1 = X - 2(Y \sin U' + X \cos U') \cos U'$$
$$= -X \cos 2U' - Y \sin 2U',$$

$$Y_1 = Y - 2(Y \sin U' + X \cos U') \sin U'$$
$$= -X \sin 2U' + Y \cos 2U';$$

$$\cos(N_1) = -\frac{X_1}{R},\ \sin(N_1) = -\frac{Y_1}{R};$$

$$\cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)),$$

$$\sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1));$$

$$X_2 = X_1 - 2(Y_1 \sin U_1' + X_1 \cos U_1') \cos U_1'$$
$$= -X_1 \cos 2U_1' - Y_1 \sin 2U_1',$$

$$Y_2 = Y_1 - 2(Y_1 \sin U_1' + X_1 \cos U_1') \sin U_1'$$
$$= -X_1 \sin 2U_1' + Y_1 \cos 2U_1';$$

$$\cos(N_2) = -\frac{X_2}{R},\ \sin(N_2) = -\frac{Y_2}{R};$$

$$\cos U_2' = -\frac{1}{\mu}\sin(N_2)\sin(U_1' - (N_2)) - \cos(N_2)\sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2}\sin(U_1' - (N_2))^2},$$

$$\sin U_2' = \frac{1}{\mu}\cos(N_2)\sin(U_1' - (N_2)) - \sin(N_2)\sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2}\sin(U_1' - (N_2))^2}.$$

Für zwei Brechungen und zwei Zurückwerfungen hat man dagegen nach 80) die folgenden Formeln:

$$83)\quad \cos N = \frac{X}{R},\ \sin N = \frac{Y}{R};$$

$$\begin{aligned}
\cos U' &= -\mu \sin N \sin N - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2},\\
\sin U' &= \mu \cos N \sin N - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2};\\
X_1 &= X - 2(Y \sin U' + X \cos U')\cos U'\\
&= -X \cos 2U' - Y \sin 2U',\\
Y_1 &= Y - 2(Y \sin U' + X \cos U')\sin U'\\
&= -X \sin 2U' + Y \cos 2U';
\end{aligned}$$

$$\cos(N_1) = -\frac{X_1}{R},\ \sin(N_1) = -\frac{Y_1}{R};$$

$$\begin{aligned}
\cos U_1' &= -\cos(U' - 2(N_1)),\\
\sin U_1' &= \sin(U' - 2(N_1));\\
X_2 &= X_1 - 2(Y_1 \sin U_1' + X_1 \cos U_1')\cos U_1'\\
&= -X_1 \cos 2U_1' - Y_1 \sin 2U_1',\\
Y_2 &= Y_1 - 2(Y_1 \sin U_1' + X_1 \cos U_1')\sin U_1'\\
&= -X_1 \sin 2U_1' + Y_1 \cos 2U_1';
\end{aligned}$$

$$\cos(N_2) = -\frac{X_2}{R},\ \sin(N_2) = -\frac{Y_2}{R};$$

$$\begin{aligned}
\cos U_2' &= -\cos(U_1' - 2(N_2)),\\
\sin U_2' &= \sin(U_1' - 2(N_2));\\
X_3 &= X_2 - 2(Y_2 \sin U_2' + X_2 \cos U_2')\cos U_2'\\
&= -X_2 \cos 2U_2' - Y_2 \sin 2U_2',\\
Y_3 &= Y_2 - 2(Y_2 \sin U_2' + X_2 \cos U_2')\sin U_2'\\
&= -X_2 \sin 2U_2' + Y_2 \cos 2U_2';
\end{aligned}$$

$$\cos(N_3) = -\frac{X_3}{R},\ \sin(N_3) = -\frac{Y_3}{R};$$

$$\cos U_3' = -\frac{1}{\mu}\sin(N_3)\sin(U_2'-(N_3)) - \cos(N_3)\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(U_2'-(N_3))^2},$$

$$\sin U_3' = \frac{1}{\mu}\cos(N_3)\sin(U_2'-(N_3)) - \sin(N_3)\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(U_2'-(N_3))^2}.$$

Hiernach wird man bei dem Kreise auch für zwei Brechungen und jede beliebige Anzahl von Zurückwerfungen die betreffenden Formeln immer leicht aufzustellen im Stande sein.

## §. 16.

Zuvörderst wollen wir nun den Fall eines Kreises weiter entwickeln, indem wir uns dabei lediglich der im vorhergehenden Paragraphen zusammengestellten Formeln bedienen, und der Kürze wegen, was in diesem Falle offenbar verstattet ist, $R=1$ setzen.

Unter dieser Voraussetzung ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$X_1 = -\cos N\cos 2U' - \sin N\sin 2U'$$
$$= -\cos(N-2U'),$$
$$Y_1 = -\cos N\sin 2U' + \sin N\cos 2U'$$
$$= \sin(N-2U');$$
$$\cos(N_1) = \cos(N-2U'),$$
$$\sin(N_1) = -\sin(N-2U');$$
$$\cos 2(N_1) = \cos 2(N-2U'),$$
$$\sin 2(N_1) = -\sin 2(N-2U');$$
$$\cos U_1' = -\cos 2(N_1)\cos U' - \sin 2(N_1)\sin U'$$
$$= -\cos 2(N-2U')\cos U' + \sin 2(N-2U')\sin U'$$
$$= -\cos(2N-3U'),$$
$$\sin U_1' = \cos 2(N_1)\sin U' - \sin 2(N_1)\cos U'$$
$$= \cos 2(N-2U')\sin U' + \sin 2(N-2U')\cos U'$$
$$= \sin(2N-3U');$$
$$\cos 2U_1' = \cos 2(2N-3U'),$$
$$\sin 2U_1' = -\sin 2(2N-3U');$$
$$X_2 = \cos(N-2U')\cos 2(2N-3U') + \sin(N-2U')\sin 2(2N-3U')$$
$$= \cos(3N-4U'),$$
$$Y_2 = -\cos(N-2U')\sin 2(2N-3U') + \sin(N-2U')\cos 2(2N-3U')$$
$$= -\sin(3N-4U');$$

$$\cos(N_2) = -\cos(3N - 4U'),$$
$$\sin(N_2) = \sin(3N - 4U');$$
$$\cos 2(N_2) = \cos 2(3N - 4U'),$$
$$\sin 2(N_2) = -\sin 2(3N - 4U');$$

$$\cos U_2' = -\cos 2(N_2)\cos U_1' - \sin 2(N_2)\sin U_1'$$
$$= \cos 2(3N-4U')\cos(2N-3U') + \sin 2(3N-4U')\sin(2N-3U')$$
$$= \cos(4N - 5U'),$$
$$\sin U_2' = \cos 2(N_2)\sin U_1' - \sin 2(N_2)\cos U_1'$$
$$= \cos 2(3N-4U')\sin(2N-3U') - \sin 2(3N-4U')\cos(2N-3U')$$
$$= -\sin(4N - 5U');$$
$$\cos 2U_2' = \cos 2(4N - 5U'),$$
$$\sin 2U_2' = -\sin 2(4N - 5U');$$
$$X_3 = -\cos(3N-4U')\cos 2(4N-5U') - \sin(3N-4U')\sin 2(4N-5U')$$
$$= -\cos(5N - 6U'),$$
$$Y_3 = \cos(3N-4U')\sin 2(4N-5U') - \sin(3N-4U')\cos 2(4N-5U')$$
$$= \sin(5N - 6U');$$
$$\cos(N_3) = \cos(5N - 6U'),$$
$$\sin(N_3) = -\sin(5N - 6U');$$
$$\cos 2(N_3) = \cos 2(5N - 6U'),$$
$$\sin 2(N_3) = -\sin 2(5N - 6U');$$
$$\cos U_3' = -\cos 2(N_3)\cos U_2' - \sin 2(N_3)\sin U_2'$$
$$= -\cos 2(5N-6U')\cos(4N-5U') - \sin 2(5N-6U')\sin(4N-5U')$$
$$= -\cos(6N - 7U'),$$
$$\sin U_3' = \cos 2(N_3)\sin U_2' - \sin 2(N_3)\cos U_2'$$
$$= -\cos 2(5N-6U')\sin(4N-5U') + \sin 2(5N-6U')\cos(4N-5U')$$
$$= \sin(6N - 7U');$$
$$\cos 2U_3' = \cos 2(6N - 7U'),$$
$$\sin 2U_3' = -\sin 2(6N - 7U');$$
$$X_4 = \cos(5N-6U')\cos 2(6N-7U') + \sin(5N-6U')\sin 2(6N-7U')$$
$$= \cos(7N - 8U'),$$
$$Y_4 = -\cos(5N-6U')\sin 2(6N-7U') + \sin(5N-6U')\cos 2(6N-7U')$$
$$= -\sin(7N - 8U');$$
$$\cos(N_4) = -\cos(7N - 8U'),$$
$$\sin(N_4) = \sin(7N - 8U').$$

Diese Rechnung, deren weiterer Fortgang klar vor Augen liegt,

ist hier so weit geführt worden, wie es für zwei Brechungen und drei Zurückwerfungen erforderlich ist. Für zwei Brechungen und eine Zurückwerfung muss man bei den Formeln für $\cos(N_2)$, $\sin(N_2)$; für zwei Brechungen und zwei Zurückwerfungen muss man bei den Formeln für $\cos(N_3)$, $\sin(N_3)$ stehen bleiben.

Für zwei Brechungen und eine Zurückwerfung ist nun

$$\begin{aligned}\cos(U_1'-(N_2)) &= \cos(N_2)\cos U_1' + \sin(N_2)\sin U_1' \\ &= \cos(3N-4U')\cos(2N-3U') + \sin(3N-4U')\sin(2N-3U') \\ &= \cos(N-U'),\\ \sin(U_1'-(N_2)) &= \cos(N_2)\sin U_1' - \sin(N_2)\cos U_1' \\ &= -\cos(3N-4U')\sin(2N-3U') + \sin(3N-4U')\cos(2N-3U') \\ &= \sin(N-U');\end{aligned}$$

und zur Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls hat man also nach dem Obigen in diesem Falle die folgenden Formeln:

$$X_2 = \cos(3N-4U'),$$
$$Y_2 = -\sin(3N-4U');$$

$$\cos U_2' = -\frac{1}{\mu}\sin(3N-4U')\sin(N-U') + \cos(3N-4U')\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2},$$

$$\sin U_2' = -\frac{1}{\mu}\cos(3N-4U')\sin(N-U') - \sin(3N-4U')\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2}.$$

Für zwei Brechungen und zwei Zurückwerfungen ist

$$\begin{aligned}\cos(U_2'-(N_3)) &= \cos(N_3)\cos U_2' + \sin(N_3)\sin U_2' \\ &= \cos(5N-6U')\cos(4N-5U') + \sin(5N-6U')\sin(4N-5U') \\ &= \cos(N-U'),\\ \sin(U_2'-(N_3)) &= \cos(N_3)\sin U_2' - \sin(N_3)\cos U_2' \\ &= -\cos(5N-6U')\sin(4N-5U') + \sin(5N-6U')\cos(4N-5U') \\ &= \sin(N-U');\end{aligned}$$

und zur Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls hat man also nach dem Obigen in diesem Falle die folgenden Formeln:

$$X_3 = -\cos(5N-6U'),$$
$$Y_3 = \sin(5N-6U');$$

$$\cos U_3' = \frac{1}{\mu}\sin(5N-6U')\sin(N-U')$$

$$-\cos(5N-6U')\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2},$$

$$\sin U_3' = \frac{1}{\mu}\cos(5N-6U')\sin(N-U')$$

$$+\sin(5N-6U')\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2}.$$

Für zwei Brechungen und drei Zurückwerfungen ist:

$$\cos(U_3'-(N_4)) = \cos(N_4)\cos U_3' + \sin(N_4)\sin U_3'$$
$$= \cos(7N-8U')\cos(6N-7U') + \sin(7N-8U')\sin(6N-7U')$$
$$= \cos(N-U'),$$
$$\sin(U_3'-(N_4)) = \cos(N_4)\sin U_3' - \sin(N_4)\cos U_3'$$
$$= -\cos(7N-8U')\sin(6N-7U') + \sin(7N-8U')\cos(6N-7U')$$
$$= \sin(N-U');$$

und zur Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls hat man also in diesem Falle die folgenden Formeln:

$$X_4 = \cos(7N-8U'),$$
$$Y_4 = -\sin(7N-8U');$$

$$\cos U_4' = -\frac{1}{\mu}\sin(7N-8U')\sin(N-U')$$

$$+\cos(7N-8U')\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2},$$

$$\sin U_4' = -\frac{1}{\mu}\cos(7N-8U')\sin(N-U')$$

$$-\sin(7N-8U')\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen könnte, ist klar. Bei der ferneren Entwickelung dieser Formeln wollen wir uns jedoch der Kürze wegen für jetzt bloss auf die zwei ersten der drei vorhergehenden Fälle beschränken, werden aber die Rechnung so führen, dass die Art und Weise des weiteren Fortgangs derselben klar und deutlich vor Augen liegt, und ein Jeder die betreffenden Formeln leicht zu entwickeln im Stande ist. Späterhin werden wir übrigens auf diesen Gegenstand nochmals in grösserer Allgemeinheit

zurückkommen, indem wir uns absichtlich für jetzt auf die Entwickelungen beschränken, welche für die Theorie des Regenbogens unbedingt erforderlich sind.

Weil nach dem Obigen

$$\cos U' = -\mu \sin N \sin N - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2},$$
$$\sin U' = \mu \cos N \sin N - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\cos(N - U') = \cos N \cos U' + \sin N \sin U'$$
$$= -\sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2},$$
$$\sin(N - U') = \sin N \cos U' - \cos N \sin U'$$
$$= -\mu \sin N;$$
$$\cos 2(N - U') = \cos(N - U')^2 - \sin(N - U')^2$$
$$= 1 - 2\mu^2 \sin N^2,$$
$$\sin 2(N - U') = 2 \sin(N - U') \cos(N - U')$$
$$= 2\mu \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2};$$
$$\cos 4(N - U') = \cos 2(N - U') \cos 2(N - U') - \sin 2(N - U') \sin 2(N - U')$$
$$= 1 - 8\mu^2 \sin N^2 + 8\mu^4 \sin N^4,$$
$$\sin 4(N - U') = \sin 2(N - U') \cos 2(N - U') + \cos 2(N - U') \sin 2(N - U)$$
$$= 4\mu \sin N (1 - 2\mu^2 \sin N^2) \sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2};$$
$$\cos 6(N - U') = \cos 4(N - U') \cos 2(N - U') - \sin 4(N - U') \sin 2(N - U')$$
$$= 1 - 18\mu^2 \sin N^2 + 48\mu^4 \sin N^4 - 32\mu^6 \sin N^6,$$
$$\sin 6(N - U') = \sin 4(N - U') \cos 2(N - U') + \cos 4(N - U') \sin 2(N - U')$$
$$= 2\mu \sin N (3 - 16\mu^2 \sin N^2 + 16\mu^4 \sin N^4) \sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2},$$

u. s. w.

Hieraus ergiebt sich aber ferner ohne alle Schwierigkeit:

$$\cos(3N - 4U') = \cos 4(N - U') \cos N + \sin 4(N - U') \sin N$$
$$= (1 - 8\mu^2 \sin N^2 + 8\mu^4 \sin N^4) \cos N$$
$$+ 4\mu \sin N^2 (1 - 2\mu^2 \sin N^2) \sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2},$$
$$\sin(3N - 4U') = \sin 4(N - U') \cos N - \cos 4(N - U') \sin N$$
$$= -(1 - 8\mu^2 \sin N^2 + 8\mu^4 \sin N^4) \sin N$$
$$+ 4\mu \sin N \cos N (1 - 2\mu^2 \sin N^2) \sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2};$$
$$\cos(5N - 6U') = \cos 6(N - U') \cos N + \sin 6(N - U') \sin N$$
$$= (1 - 18\mu^2 \sin N^2 + 48\mu^4 \sin N^4 - 32\mu^6 \sin N^6) \cos N$$
$$+ 2\mu \sin N^2 (3 - 16\mu^2 \sin N^2 + 16\mu^4 \sin N^4) \sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2},$$

$$\sin(5N-6U') = \sin 6(N-U')\cos N - \cos 6(N-U')\sin N$$
$$= -(1-18\mu^2\sin N^2+48\mu^4\sin N^4-32\mu^6\sin N^6)\sin N$$
$$+ 2\mu\sin N\cos N(3-16\mu^2\sin N^2+16\mu^4\sin N^4)\sqrt{1-\mu^2\sin N^2};$$

u. s. w.

Weil nun nach dem Obigen

$$\cos N = X,\ \sin N = Y$$

und

$$\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2} = \sqrt{1-Y^2} = X$$

ist, wobei man zu beachten hat, dass unter den gemachten Voraussetzungen offenbar $X$ positiv ist; so erhält man aus dem Obigen für zwei Brechungen und eine Zurückwerfung zur Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls leicht die folgenden Ausdrücke:

$$84)\quad X_2 = X(1-8\mu^2Y^2+8\mu^4Y^4)$$
$$+ 4\mu Y^2(1-2\mu^2Y^2)\sqrt{1-\mu^2Y^2},$$
$$Y_2 = Y(1-8\mu^2Y^2+8\mu^4Y^4)$$
$$- 4\mu XY(1-2\mu^2Y^2)\sqrt{1-\mu^2Y^2};$$
$$\cos U_2' = (X^2-Y^2)(1-8\mu^2Y^2+8\mu^4Y^4)$$
$$+ 8\mu XY^2(1-2\mu^2Y^2)\sqrt{1-\mu^2Y^2},$$
$$\sin U_2' = 2XY(1-8\mu^2Y^2+8\mu^4Y^4)$$
$$- 4\mu Y(X^2-Y^2)(1-2\mu^2Y^2)\sqrt{1-\mu^2Y^2}.$$

Die Gleichung der geraden Linie, in welcher der letzte gebrochene Strahl liegt, ist

$$85)\quad y-Y_2 = (x-X_2)\tan U_2',$$

und kann also nach dem Vorhergehenden auch leicht vollständig entwickelt werden.

Für zwei Brechungen und zwei Zurückwerfungen erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$86)\quad X_3 = -X(1-18\mu^2Y^2+48\mu^4Y^4-32\mu^6Y^6)$$
$$-2\mu Y^2(3-16\mu^2Y^2+16\mu^4Y^4)\sqrt{1-\mu^2Y^2},$$
$$Y_3 = -Y(1-18\mu^2Y^2+48\mu^4Y^4-32\mu^6Y^6)$$
$$+2\mu XY(3-16\mu^2Y^2+16\mu^4Y^4)\sqrt{1-\mu^2Y^2};$$

$$\cos U_3' = -(X^2-Y^2)(1-18\mu^2Y^2+48\mu^4Y^4-32\mu^6Y^6)$$
$$-4\mu XY^2(3-16\mu^2Y^2+16\mu^4Y^4)\sqrt{1-\mu^2Y^2},$$
$$\sin U_3' = -2XY(1-18\mu^2Y^2+48\mu^4Y^4-32\mu^6Y^6)$$
$$+2\mu Y(X^2-Y^2)(3-16\mu^2Y^2+16\mu^4Y^4)\sqrt{1-\mu^2Y^2}.$$

Die Gleichung der geraden Linie, in welcher der letzte gebrochene Strahl liegt, ist

$$87)\quad y - Y_3 = (x - X_3)\,tang\,U_3',$$

und kann also nach den vorhergehenden Formeln auch leicht in vollständig entwickelter Gestalt dargestellt werden.

## §. 17.

Um nun die Punkte des Kreises zu bestimmen, welchen unter Voraussetzung paralleler Strahlen in den beiden vorhergehenden Fällen die wirksamen Strahlen entsprechen, muss man die beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial U_2'}{\partial X} \text{ und } \frac{\partial U_3'}{\partial X}$$

entwickeln, und dieselben der Null gleich setzen, was nach den in §. 5. angestellten Betrachtungen jetzt einer besonderen Erläuterung gewiss nicht mehr bedürfen wird. Am leichtesten führt man aber die Entwickelung dieser beiden Differentialquotienten auf folgende Art aus.

Aus 84) ergiebt sich zuvörderst

$$(X^2-Y^2)\cos U_2' + 2XY\sin U_2'$$
$$= \{(X^2-Y^2)^2 + 4X^2Y^2\}(1-8\mu^2Y^2+8\mu^4Y^4),$$
$$2XY\cos U_2' - (X^2-Y^2)\sin U_2'$$
$$= 4\mu Y\{(X^2-Y^2)^2+4X^2Y^2\}(1-2\mu^2Y^2)\sqrt{1-\mu^2Y^2};$$

d. i., weil

$$(X^2-Y^2)^2 + 4X^2Y^2 = (X^2+Y^2)^2 = 1$$

ist:

$$(X^2-Y^2)\cos U_2' + 2XY\sin U_2' = 1-8\mu^2Y^2+8\mu^4Y^4,$$
$$2XY\cos U_2' - (X^2-Y^2)\sin U_2' = 4\mu Y(1-2\mu^2Y^2)\sqrt{1-\mu^2Y^2}.$$

Weil nun aber

$$X^2+Y^2 = 1$$

ist, so ist

$$X + Y\frac{\partial Y}{\partial X} = 0,\ \frac{\partial Y}{\partial X} = -\frac{X}{Y};$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial (X^2 - Y^2)}{\partial X} = 4X,\ \frac{\partial . XY}{\partial X} = -\frac{X^2 - Y^2}{Y};$$

$$\frac{\partial (1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4)}{\partial X} = 16\mu^2 X(1 - 2\mu^2 Y^2).$$

Differentiirt man nun die Gleichung

$$(X^2 - Y^2)\cos U_2' + 2XY\sin U_2' = 1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4,$$

so erhält man nach leichter Rechnung

$$\{2XY\cos U_2' - (X^2 - Y^2)\sin U_2'\}\left(2 + Y\frac{\partial U_2'}{\partial X}\right)$$
$$= 16\mu^2 XY(1 - 2\mu^2 Y^2),$$

also nach dem Obigen, wenn man zugleich aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}.\left(2 + Y\frac{\partial U_2'}{\partial X}\right) = 4\mu X,$$

woraus sich sogleich

$$88)\quad \frac{\partial U_2'}{\partial X} = \frac{2(2\mu X - \sqrt{1 - \mu^2 Y^2})}{Y\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}}$$

ergiebt.

Auf ganz ähnliche Art ist nach 86)

$$(X^2 - Y^2)\cos U_3' + 2XY\sin U_3'$$
$$= -(1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6),$$
$$2XY\cos U_3' - (X^2 - Y^2)\sin U_3'$$
$$= -2\mu Y(3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4)\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}.$$

Auch ergiebt sich leicht durch Differentiation

$$\frac{\partial (1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6)}{\partial X}$$
$$= 12\mu^2 X(3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4).$$

Differentiirt man aber die Gleichung

$$(X^2 - Y^2)\cos U_3' + 2XY\sin U_3'$$
$$= -(1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6),$$

so erhält man nach leichter Rechnung

$$\cdot\left\{2XY\cos U_3' - (X^2 - Y^2)\sin U_3'\right\}\left(2 + Y\frac{\partial U_3'}{\partial X}\right)$$

$$= -12\mu^2 XY(3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4),$$

also nach dem Obigen, wenn man zugleich aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\sqrt{1-\mu^2 Y^2}.\left(2 + Y\frac{\partial U_3'}{\partial X}\right) = 6\mu X,$$

woraus sich sogleich

$$89)\quad \frac{\partial U_3'}{\partial X} = \frac{2(3\mu X - \sqrt{1-\mu^2 Y^2})}{Y\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}$$

ergiebt.

Wir wollen nun auch noch die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 U_2'}{\partial X^2} \text{ und } \frac{\partial^2 U_3'}{\partial X^2}$$

entwickeln.

Zuerst ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial U_2'}{\partial X} = -\frac{2}{Y} + \frac{4\mu X}{Y\sqrt{1-\mu^2 Y^2}},$$

also, wenn man differentiirt:

$$\frac{\partial^2 U_2'}{\partial X^2} = \frac{2}{Y^2}\cdot\frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{4\mu X}{Y^2\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}\cdot\frac{\partial Y}{\partial X}$$

$$+ \frac{4\mu}{Y}\cdot\frac{1 - \mu^2 Y^2 + \mu^2 XY\frac{\partial Y}{\partial X}}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}$$

$$= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{4\mu X^2}{Y^3\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} + \frac{4\mu(1-\mu^2)}{Y(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}$$

$$= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{4\mu(X^2 + Y^2) - 4\mu^3 Y^2(1 + X^2)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}$$

$$= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{4\mu - 4\mu^3(1 - X^2)(1 + X^2)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}$$

$$= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{4\mu - 4\mu^3(1 - X^4)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}.$$

also

$$90)\quad \frac{\partial^2 U_2'}{\partial X^2} = -\frac{2}{Y^3}\left\{ X - \frac{2\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \right\}.$$

Auf ähnliche Art ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial U_3'}{\partial X} = -\frac{2}{Y} + \frac{6\mu X}{Y\sqrt{1-\mu^2 Y^2}},$$

also, wenn man differentiirt:

$$\frac{\partial^2 U_3'}{\partial X^2} = \frac{2}{Y^2}\cdot\frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{6\mu X}{Y^2\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}\cdot\frac{\partial Y}{\partial X}$$

$$+\frac{6\mu}{Y}\cdot\frac{1-\mu^2 Y^2 + \mu^2 XY\frac{\partial Y}{\partial X}}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}$$

$$= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{6\mu X^2}{Y^3\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} + \frac{6\mu(1-\mu^2)}{Y(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}$$

$$= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{6\mu(X^2+Y^2) - 6\mu^3 Y^2(1+X^2)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}$$

$$= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{6\mu - 6\mu^3(1-X^2)(1+X^2)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}$$

$$= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{6\mu - 6\mu^3(1-X^4)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}},$$

also

$$91)\quad \frac{\partial^2 U_3'}{\partial X^2} = -\frac{2}{Y^3}\left\{ X - \frac{3\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \right\}.$$

## §. 18.

Setzen wir nun

$$\frac{\partial U_2'}{\partial X} = \frac{2(2\mu X - \sqrt{1-\mu^2 Y^2})}{Y\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} = 0,$$

so erhalten wir die Gleichung

$$2\mu X - \sqrt{1-\mu^2 Y^2} = 0,$$

oder

$$2\mu X = \sqrt{1-\mu^2 Y^2},$$

woraus sich

$$4\mu^2 X^2 = 1 - \mu^2 Y^2 = 1 - \mu^2(1 - X^2) = 1 - \mu^2 + \mu^2 X^2,$$

also

$$3\mu^2 X^2 = 1 - \mu^2 = (1 - \mu)(1 + \mu),$$

folglich

$$X^2 = \frac{1 - \mu^2}{3\mu^2} = \frac{(1 - \mu)(1 + \mu)}{3\mu^2},$$

$$Y^2 = 1 - X^2 = \frac{4\mu^2 - 1}{3\mu^2} = \frac{(2\mu - 1)(2\mu + 1)}{3\mu^2};$$

also, weil $X$ im vorliegenden Falle unter den gemachten Voraussetzungen jedenfalls positiv sein muss,

$$92)\quad \begin{cases} X = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}} = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{(1-\mu)(1+\mu)}{3}}, \\ Y = \pm\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{4\mu^2-1}{3}} = \pm\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{(2\mu-1)(2\mu+1)}{3}} \end{cases}$$

ergiebt.

Berechnen wir den diesen Werthen von $X$ und $Y$ entsprechenden Werth des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 U_2'}{\partial X^2} = -\frac{2}{Y^3}\left\{X - \frac{2\mu(1 - \mu^2(1 - X^4))}{(1 - \mu^2 Y^2)\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}}\right\},$$

so ist zuvörderst

$$1 - \mu^2(1 - X^4) = 1 - \mu^2 + \mu^2 X^4 = 1 - \mu^2 + \frac{(1 - \mu^2)^2}{9\mu^2}$$
$$= \frac{(1 - \mu^2)(1 + 8\mu^2)}{9\mu^2},$$

also

$$2\mu(1 - \mu^2(1 - X^4)) = \frac{2(1 - \mu^2)(1 + 8\mu^2)}{9\mu};$$

und

$$1 - \mu^2 Y^2 = 1 - \frac{4\mu^2 - 1}{3} = \frac{4(1 - \mu^2)}{3},$$

$$\sqrt{1 - \mu^2 Y^2} = 2\sqrt{\frac{1 - \mu^2}{3}},$$

$$(1 - \mu^2 Y^2)\sqrt{1 - \mu^2 Y^2} = \frac{8(1 - \mu^2)\sqrt{1 - \mu^2}}{3\sqrt{3}}.$$

Folglich ist

$$\frac{2\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} = \frac{1+8\mu^2}{4\sqrt{3}.\mu\sqrt{1-\mu^2}},$$

also

$$X - \frac{2\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}} - \frac{1+8\mu^2}{4\sqrt{3}.\mu\sqrt{1-\mu^2}}$$

$$= \frac{4(1-\mu^2)-(1+8\mu^2)}{4\sqrt{3}.\mu\sqrt{1-\mu^2}} = \frac{(1-4\mu^2)\sqrt{3}}{4\mu\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Daher ist für die obigen Werthe von $X$ und $Y$, wie man leicht findet:

$$93)\quad \frac{\partial^2 U_2'}{\partial X^2} = \pm\frac{9\mu^3}{2\sqrt{(1-\mu^2)(4\mu^2-1)}}.$$

Aus den obigen Ausdrücken von $X$ und $Y$ ergiebt sich auf der Stelle, dass unser Problem nur unter der Voraussetzung, dass

$$\mu = M\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$$

ist, möglich ist. Weil man, dies vorausgesetzt, nach dem Vorhergehenden der zweite Differentialquotient positiv oder negativ ist, jenachdem man in dem obigen Ausdrucke von $Y$ das obere oder untere Zeichen nimmt, so ist nach der Lehre von den Maximis und Minimis der Winkel $U_2'$ ein Minimum oder ein Maximum, jenachdem man in dem obigen Ausdrucke von $Y$ das obere oder untere Zeichen nimmt, d. h. jenachdem $Y$ positiv oder negativ ist.

## §. 19.

Für die im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Werthe von $X$ und $Y$ wollen wir nun die Gleichung des letzten gebrochenen Strahls vollständig entwickeln.

Weil

$$X = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}},\quad Y = \pm\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{4\mu^2-1}{3}}$$

ist, so ist zuvörderst, wie man nach einigen leichten Reductionen findet:

$$1-8\mu^2 Y^2+8\mu^4 Y^4 = \frac{41-160\mu^2+128\mu^4}{9},$$

$$(1-2\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2} = \frac{2(5-8\mu^2)}{3}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}};$$

folglich

$$X(1-8\mu^2Y^2+8\mu^4Y^4)=\frac{41-160\mu^2+128\mu^4}{9\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}},$$

$$Y(1-8\mu^2Y^2+8\mu^4Y^4)=\pm\frac{41-160\mu^2+128\mu^4}{9\mu}\sqrt{\frac{4\mu^2-1}{3}};$$

ferner

$$4\mu Y^2(1-2\mu^2Y^2)\sqrt{1-\mu^2Y^2}=-\frac{8(5-28\mu^2+32\mu^4)}{9\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}},$$

$$4\mu XY(1-2\mu^2Y^2)\sqrt{1-\mu^2Y^2}=\pm\frac{8(5-13\mu^2+8\mu^4)}{9\mu}\sqrt{\frac{4\mu^2-1}{3}};$$

also nach 84)

$$94)\begin{cases} X_2=\dfrac{1+64\mu^2-128\mu^4}{9\mu}\sqrt{\dfrac{1-\mu^2}{3}}, \\ Y_2=\pm\dfrac{1-56\mu^2+64\mu^4}{9\mu}\sqrt{\dfrac{4\mu^2-1}{3}}. \end{cases}$$

Ferner ist

$$(X^2-Y^2)(1-8\mu^2Y^2+8\mu^4Y^4)$$
$$=\frac{82-525\mu^2+1056\mu^4-640\mu^6}{27\mu^2},$$

$$2XY(1-8\mu^2Y^2+8\mu^4Y^4)$$
$$=\pm\frac{2(41-160\mu^2+128\mu^4)\sqrt{(1-\mu^2)(4\mu^2-1)}}{27\mu^2};$$

und

$$8\mu XY^2(1-2\mu^2Y^2)\sqrt{1-\mu^2Y^2}$$
$$=-\frac{16(5-33\mu^2+60\mu^4-32\mu^6)}{27\mu^2},$$

$$4\mu Y(X^2-Y^2)(1-2\mu^2Y^2)\sqrt{1-\mu^2Y^2}$$
$$=\pm\frac{8(10-41\mu^2+40\mu^4)\sqrt{(1-\mu^2)(4\mu^2-1)}}{27\mu^2};$$

also nach 84):

$$95)\quad \begin{cases} \cos U_2' = \dfrac{2+3\mu^2+96\mu^4-128\mu^6}{27\mu^2}, \\ \sin U_2' = \pm\dfrac{(2+8\mu^2-64\mu^4)\sqrt{(1-\mu^2)(4\mu^2-1)}}{27\mu^2}. \end{cases}$$

Also ist die Gleichung des letzten gebrochenen Strahls:

$$96)\quad y \mp \frac{1-56\mu^2+64\mu^4}{9\mu}\sqrt{\frac{4\mu^2-1}{3}}$$

$$= \pm\frac{(2+8\mu^2-64\mu^4)\sqrt{(1-\mu^2)(4\mu^2-1)}}{2+3\mu^2+96\mu^4-128\mu^6}\left(x-\frac{1+64\mu^2-128\mu^4}{9\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}}\right).$$

Wollte man $\mu$ aus $U_2'$ bestimmen, so müsste man die folgende Gleichung, welche in Beziehung auf $\mu^2$ als unbekannte Grösse vom dritten Grade ist, auflösen:

$$97)\quad 128\mu^6-96\mu^4-3(1-9\cos U_2')\mu^2-2=0,$$

worüber wir uns hier der Kürze wegen jetzt nicht weiter verbreiten wollen.

Setzt man

$$\mu^4-{}^1/_8\mu^2-{}^1/_{32}=0$$

und löst diese Gleichung auf, so erhält man.

$$\mu^2={}^1/_{16}\pm{}^3/_{16}=\begin{cases}{}^1/_4\\ -{}^1/_8\end{cases}$$

Also ist

$$\mu^4-{}^1/_8\mu^2-{}^1/_{32}=(\mu^2-{}^1/_4)(\mu^2+{}^1/_8),$$

$$2+8\mu^2-64\mu^4=-2(4\mu^2-1)(8\mu^2+1);$$

folglich nach dem Obigen

$$98)\quad \sin U_2' = \mp\frac{2(4\mu^2-1)(8\mu^2+1)\sqrt{(1-\mu^2)(4\mu^2-1)}}{27\mu^2}$$

$$= \mp\frac{2(2\mu-1)(2\mu+1)(8\mu^2+1)\sqrt{(1-\mu)(1+\mu)(2\mu-1)(2\mu+1)}}{27\mu^2}.$$

Aus

$$\cos U_2' = \frac{2+3\mu^2+96\mu^4-128\mu^6}{27\mu^2}$$

folgt auch

$$1 - \cos U_2' = -\frac{2(1 - 12\mu^2 + 48\mu^4 - 64\mu^6)}{27\mu^2},$$

d. i.

$$2 \sin \tfrac{1}{2} U_2'^{\,2} = -\frac{2(1 - 4\mu^2)^3}{27\mu^2},$$

und folglich

$$\sin \tfrac{1}{2} U_2'^{\,2} = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{4\mu^2 - 1}{3}\right)^3.$$

Weil nun offenbar $\sin \tfrac{1}{2} U_2'$ immer positiv ist, so ist

$$99)\quad \sin \tfrac{1}{2} U_2' = \frac{1}{\mu}\sqrt{\left(\frac{4\mu^2 - 1}{3}\right)^3}$$

$$= \frac{4\mu^2 - 1}{3\mu}\sqrt{\frac{4\mu^2 - 1}{3}}$$

$$= \frac{(2\mu - 1)(2\mu + 1)}{3\mu}\sqrt{\frac{(2\mu - 1)(2\mu + 1)}{3}}.$$

Auch ist

$$1 + \cos U_2' = \frac{2(1 + 15\mu^2 + 48\mu^4 - 64\mu^6)}{27\mu^2},$$

und folglich, weil, wie man leicht findet,

$$1 + 15\mu^2 + 48\mu^4 - 64\mu^6 = (1 - \mu^2)(1 + 16\mu^2 + 64\mu^4)$$
$$= (1 - \mu^2)(1 + 8\mu^2)^2$$

ist,

$$\cos \tfrac{1}{2} U_2'^{\,2} = \frac{(1 - \mu^2)(1 + 8\mu^2)^2}{27\mu^2},$$

also

$$100)\quad \cos \tfrac{1}{2} U_2' = \pm \frac{1 + 8\mu^2}{3\mu}\sqrt{\frac{1 - \mu^2}{3}},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem $\tfrac{1}{2} U_2'$ kleiner oder grösser als 180° ist.

§. 20.

Setzen wir ferner

$$\frac{\partial U_3'}{\partial X} = \frac{2(3\mu X - \sqrt{1 - \mu^2 Y^2})}{Y\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}} = 0,$$

so erhalten wir die Gleichung

$$3\mu X - \sqrt{1-\mu^2 Y^2} = 0$$

oder

$$3\mu X = \sqrt{1-\mu^2 Y^2},$$

woraus sich

$$9\mu^2 X^2 = 1 - \mu^2 Y^2 = 1-\mu^2(1-X^2) = 1-\mu^2+\mu^2 X^2,$$

also

$$8\mu^2 X^2 = 1-\mu^2 = (1-\mu)(1+\mu),$$

folglich

$$X^2 = \frac{1-\mu^2}{8\mu^2} = \frac{(1-\mu)(1+\mu)}{8\mu^2},$$

$$Y^2 = 1 - X^2 = \frac{9\mu^2-1}{8\mu^2} = \frac{(3\mu-1)(3\mu+1)}{8\mu^2};$$

also, weil $X$ im vorliegenden Falle unter den gemachten Voraussetzungen jedenfalls positiv sein muss:

$$101)\quad \begin{cases} X = \dfrac{1}{2\mu}\sqrt{\dfrac{1-\mu^2}{2}} = \dfrac{1}{2\mu}\sqrt{\dfrac{(1-\mu)(1+\mu)}{2}}, \\[2ex] Y = \pm\dfrac{1}{2\mu}\sqrt{\dfrac{9\mu^2-1}{2}} = \pm\dfrac{1}{2\mu}\sqrt{\dfrac{(3\mu-1)(3\mu+1)}{2}} \end{cases}$$

ergiebt.

Um den entsprechenden Werth des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 U_3'}{\partial X^2} = -\frac{2}{Y^3}\left\{X - \frac{3\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}\right\}$$

zu berechnen, haben wir zuvörderst

$$1-\mu^2(1-X^4) = 1-\mu^2+\mu^2 X^4 = 1-\mu^2+\frac{(1-\mu^2)^2}{64\mu^2}$$

$$= \frac{(1-\mu^2)(1+63\mu^2)}{64\mu^2},$$

also

$$3\mu(1-\mu^2(1-X^4)) = \frac{3(1-\mu^2)(1+63\mu^2)}{64\mu};$$

und

$$1-\mu^2 Y^2 = 1 - \frac{9\mu^2-1}{8} = \frac{9(1-\mu^2)}{8},$$

$$\sqrt{1-\mu^2 Y^2} = {}^3\!/_2\sqrt{\frac{1-\mu^2}{2}},$$

$$(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2} = \frac{27(1-\mu^2)\sqrt{1-\mu^2}}{16\sqrt{2}}.$$

Folglich ist

$$\frac{3\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} = \frac{1+63\mu^2}{18\sqrt{2}.\mu\sqrt{1-\mu^2}},$$

also

$$X - \frac{3\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{2}} - \frac{1+63\mu^2}{18\sqrt{2}.\sqrt{1-\mu^2}}$$

$$= \frac{9(1-\mu^2)-(1+63\mu^2)}{18\sqrt{2}.\mu\sqrt{1-\mu^2}} = \frac{2(1-9\mu^2)\sqrt{2}}{9\mu\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Daher ist für die obigen Werthe von $X$ und $Y$, wie man leicht findet:

$$102)\ \frac{\partial^2 U_3'}{\partial X^2} = \pm\frac{128\mu^2}{9\sqrt{(1-\mu^2)(9\mu^2-1)}}.$$

Aus den obigen Ausdrücken von $X$ und $Y$ ergiebt sich auf der Stelle, dass unser Problem nur unter der Voraussetzung, dass

$$\mu = M(1/3, 1)$$

ist, möglich ist. Weil nun, dies vorausgesetzt, nach dem Vorhergehenden der zweite Differentialquotient positiv oder negativ ist, jenachdem man in dem obigen Ausdrucke von $Y$ das obere oder untere Zeichen nimmt, so ist nach den bekannten Principien der Lehre von den Maximis und Minimis der Winkel $U_3'$ ein Minimum oder ein Maximum, jenachdem man in dem obigen Ausdrucke von $Y$ das obere oder untere Zeichen nimmt, d. i. jenachdem $Y$ positiv oder negativ ist.

## §. 21.

Auch für die im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Werthe von $X$ und $Y$ wollen wir nun die Gleichung des letzten gebrochenen Strahls vollständig entwickeln.

Weil

$$X = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{8}},\quad Y = \pm\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{9\mu^2-1}{8}}$$

ist, so ist zuvörderst, wie man nach einigen leichten Reductionen findet:

$$1-18\mu^2 Y^2+48\mu^4 Y^4-32\mu^6 Y^6$$

$$= \frac{65-567\mu^2+1215\mu^4-729\mu^6}{16},$$

$$(3-16\mu^2 Y^2+16\mu^4 Y^4)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}$$
$$=\frac{3(21-90\mu^2+81\mu^4)}{4}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{8}};$$

folglich

$$X(1-18\mu^2 Y^2+48\mu^4 Y^4-32\mu^6 Y^6)$$
$$=\frac{65-567\mu^2+1215\mu^4-729\mu^6}{16\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{8}},$$

$$Y(1-18\mu^2 Y^2+48\mu^4 Y^4-32\mu^6 Y^6)$$
$$=\pm\frac{65-567\mu^2+1215\mu^4-729\mu^6}{16\mu}\sqrt{\frac{9\mu^2-1}{8}};$$

ferner

$$2\mu Y^2(3-16\mu^2 Y^2+16\mu^4 Y^4)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}$$
$$=-\frac{3(21-279\mu^2+891\mu^4-729\mu^6)}{16\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{8}},$$

$$2\mu XY(3-16\mu^2 Y^2+16\mu^4 Y^4)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}$$
$$=\pm\frac{3(21-111\mu^2+171\mu^4-81\mu^6)}{16\mu}\sqrt{\frac{9\mu^2-1}{8}};$$

also nach 86)

$$103)\quad\begin{cases} X_3=-\dfrac{1+135\mu^2-729\mu^4+729\mu^6}{8\mu}\sqrt{\dfrac{1-\mu^2}{8}},\\[2ex] Y_3=\mp\dfrac{1-117\mu^2+351\mu^4-243\mu^6}{8\mu}\sqrt{\dfrac{9\mu^2-1}{8}};\end{cases}$$

oder

$$104)\quad\begin{cases} X_3=-\dfrac{1+135\mu^2-729\mu^4+729\mu^6}{16\mu}\sqrt{\dfrac{1-\mu^2}{2}},\\[2ex] Y_3=\mp\dfrac{1-117\mu^2+351\mu^4-243\mu^6}{16\mu}\sqrt{\dfrac{9\mu^2-1}{2}}.\end{cases}$$

Ferner ist

$$(X^2-Y^2)(1-18\mu^2 Y^2+48\mu^4 Y^4-32\mu^6 Y^6)$$
$$=\frac{65-892\mu^2+4050\mu^4-6804\mu^6+3645\mu^8}{64\mu^2},$$

$$2XY(1-18\mu^2Y^2+48\mu^4Y^4-32\mu^6Y^6)$$
$$=\pm\frac{(65-567\mu^2+1215\mu^4-729\mu^6)\sqrt{(1-\mu^2)(9\mu^2-1)}}{64\mu^2};$$

und

$$4\mu XY^2(3-16\mu^2Y^2+16\mu^4Y^4)\sqrt{1-\mu^2Y^2}$$
$$=-\frac{3(21-300\mu^2+1170\mu^4-1620\mu^6+729\mu^8)}{64\mu^2},$$

$$2\mu Y(X^2-Y^2)(3-16\mu^2Y^2+16\mu^4Y^4)\sqrt{1-\mu^2Y^2}$$
$$=\pm\frac{3(21-195\mu^2+531\mu^4-405\mu^6)\sqrt{(1-\mu^2)(9\mu^2-1)}}{64\mu^2};$$

also nach 86)

$$105)\begin{cases}\cos U_3'=-\dfrac{1+4\mu^2+270\mu^4-972\mu^6+729\mu^8}{32\mu^2},\\[2ex] \sin U_3'=\mp\dfrac{(1+9\mu^2-189\mu^4+243\mu^6)\sqrt{(1-\mu^2)(9\mu^2-1)}}{32\mu^2}.\end{cases}$$

Die Gleichung des letzten gebrochenen Strahls ist:

$$106)\quad y\pm\frac{1-117\mu^2+351\mu^4-240\mu^6}{16\mu}\sqrt{\frac{9\mu^2-1}{2}}$$
$$=\pm\frac{(1+9\mu^2-189\mu^4+243\mu^6)\sqrt{(1-\mu^2)(9\mu^2-1)}}{1+4\mu^2+270\mu^4-972\mu^6+729\mu^8}$$
$$\times\left(x+\frac{1+135\mu^2-729\mu^4+729\mu^6}{16\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{2}}\right).$$

Will man $\mu$ aus $U_3'$ bestimmen, so muss man die Gleichung

$$107)\quad 729\mu^8-972\mu^6+270\mu^4+4(1+8\cos U_3')\mu^2+1=0,$$

welche in Beziehung auf $\mu^2$ als unbekannte Grösse vom vierten Grade ist, auflösen.

Auch ist

$$1-\cos U_3'=\frac{1+36\mu^2+270\mu^4-972\mu^6+729\mu^8}{32\mu^2},$$

$$1+\cos U_3'=-\frac{1-28\mu^2+270\mu^4-972\mu^6+729\mu^8}{32\mu^2};$$

also, wie man leicht findet:

$$108) \begin{cases} \sin {}^1/_2\, U_3'^2 = \dfrac{(1+18\mu^2-27\mu^4)^2}{64\mu^2}, \\ \cos {}^1/_2\, U_3'^2 = \dfrac{(1-\mu^2)(9\mu^2-1)^3}{64\mu^2}. \end{cases}$$

## §. 22.

Die im Vorhergehenden betrachteten Differentialquotienten werden in zwei Fällen unendlich, nämlich für

$$Y=0 \text{ und } 1-\mu^2 Y^2=0.$$

Im ersten Falle, den sich ein Jeder leicht selbst weiter zu deuten im Stande sein wird, geht die ganze Brechung und Zurückwerfung in dem den einfallenden Strahlen parallelen Durchmesser des Kreises vor sich.

Im zweiten Falle findet man leicht

$$X=\frac{1}{\mu}\sqrt{\mu^2-1}\,,\quad Y=\pm\frac{1}{\mu};$$

woraus sogleich erhellet, dass dieser Fall nur dann eintreten kann, wenn $\mu > 1$ ist; und da nun nach 82) und 83) bekanntlich

$$\cos N = X,\quad \sin N = Y$$

ist, so ist

$$\cos N = \frac{1}{\mu}\sqrt{\mu^2-1}\,,\quad \sin N = \pm\frac{1}{\mu}.$$

Nehmen wir nun, was bei dieser Betrachtung offenbar hinreicht, das obere Zeichen, so ist unter den gemachten Voraussetzungen augenscheinlich $N$ der Einfallswinkel, also nach den dioptrischen Grundgesetzen $\mu.\frac{1}{\mu}=1$ der Sinus des Brechungswinkels, der Brechungswinkel selbst also $90^0$, so dass folglich in diesem Falle der gebrochene Strahl auf dem Einfallslothe senkrecht steht, und wir daher an der Gränze aller Brechung angelangt sind, welches weiter zu deuten wir füglich dem Leser überlassen können.

Sucht man in diesem letztern Falle nach 84) und 86) die Gleichungen der letzten gebrochenen Strahlen, so erhält man zuvörderst nach 84)

$$1-8\mu^2 Y^2+8\mu^4 Y^4=1$$

und

$$\sqrt{1-\mu^2 Y^2}=0,$$

also

$$109)\begin{cases} X_2 = X.1 = X = \frac{1}{\mu}\sqrt{\mu^2-1}, \\ Y_2 = Y.1 = Y = \pm\frac{1}{\mu}. \end{cases}$$

Ferner ist

$$X^2 - Y^2 = \frac{\mu^2-2}{\mu^2},\ 2XY = \pm\frac{2\sqrt{\mu^2-1}}{\mu^2};$$

also

$$110)\ \cos U_2' = \frac{\mu^2-2}{\mu^2},\ \sin U_2' = \pm\frac{2\sqrt{\mu^2-1}}{\mu^2}.$$

Folglich ist

$$111)\ y \mp \frac{1}{\mu} = \pm\frac{2\sqrt{\mu^2-1}}{\mu^2-2}\left(x - \frac{1}{\mu}\sqrt{\mu^2-1}\right)$$

die Gleichung des letzten gebrochenen Strahls.

Auf ähnliche Art ist nach 86)

$$1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6 = -1$$

und

$$\sqrt{1-\mu^2 Y^2} = 0;$$

also

$$112)\begin{cases} X_3 = -X.-1 = X = \frac{1}{\mu}\sqrt{\mu^2-1}, \\ Y_3 = -Y.-1 = Y = \pm\frac{1}{\mu}. \end{cases}$$

Ferner ist wieder

$$X^2 - Y^2 = \frac{\mu^2-2}{\mu^2},\ 2XY = \pm\frac{2\sqrt{\mu^2-1}}{\mu^2};$$

also

$$113)\ \cos U_3' = \frac{\mu^2-2}{\mu^2},\ \sin U_3' = \pm\frac{2\sqrt{\mu^2-1}}{\mu^2}$$

und die Gleichung des letzten gebrochenen Strahls ist folglich auch jetzt

$$114)\ y \mp \frac{1}{\mu} = \pm\frac{2\sqrt{\mu^2-1}}{\mu^2-2}\left(x - \frac{1}{\mu}\sqrt{\mu^2-1}\right).$$

Da durch die Gleichung 111) oder 114) offenbar eine ganz be-

stimmte reelle gerade Linie charakterisirt wird, so wird man diese gerade Linie nur als eine gewisse Gränze zu betrachten haben, welcher die letzten gebrochenen Strahlen sich nähern, wenn die einfallenden Strahlen sich der Gränze aller Brechung nähern, ein Ausdruck, dessen Sinn man nach dem Obigen gewiss ohne weitere Erläuterung verstehen wird.

## §. 23.

Indem wir nun wieder zu den Formeln 79) und 80) für die Ellipse zurückkehren, wollen wir zuvörderst aus denselben einige andere bemerkenswerthe Formeln ableiten.

Aus den beiden Gleichungen

$$\cos N = \frac{b^2 X}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}, \quad \sin N = \frac{a^2 Y}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}$$

folgt sogleich

$$b^2 X \sin N = a^2 Y \cos N$$

oder

$$b \frac{X}{a} \sin N = a \frac{Y}{b} \cos N,$$

also

$$b^2 \left(\frac{X}{a}\right)^2 \sin N^2 = a^2 \left(\frac{Y}{b}\right)^2 \cos N^2.$$

Aus der Gleichung

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1$$

ergeben sich aber die beiden folgenden Gleichungen:

$$a^2 \left(\frac{X}{a}\right)^2 \cos N^2 + a^2 \left(\frac{Y}{b}\right)^2 \cos N^2 = a^2 \cos N^2,$$

$$b^2 \left(\frac{X}{a}\right)^2 \sin N^2 + b^2 \left(\frac{Y}{b}\right)^2 \sin N^2 = b^2 \sin N^2;$$

folglich nach dem Vorhergehenden mittelst gehöriger Substitution

$$(a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2) \left(\frac{X}{a}\right)^2 = a^2 \cos N^2,$$

$$(a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2) \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = b^2 \sin N^2.$$

Wegen der Gleichungen

$$\cos N = \frac{b^2 X}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}, \quad \sin N = \frac{a^2 Y}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}$$

haben sowohl $X$ und $\cos N$, als auch $Y$ und $\sin N$, gleiche Vorzeichen; also ist nach dem Vorhergehenden

$$115) \begin{cases} \dfrac{X}{a} = \dfrac{a \cos N}{\sqrt{a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2}}, \\ \dfrac{Y}{b} = \dfrac{b \sin N}{\sqrt{a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2}}; \end{cases}$$

oder

$$116) \begin{cases} \dfrac{X}{a} = \dfrac{\cos N}{\sqrt{\cos N^2 + \dfrac{b^2}{a^2} \sin N^2}}, \\ \dfrac{Y}{b} = \dfrac{\sin N}{\sqrt{\sin N^2 + \dfrac{a^2}{b^2} \cos N^2}}; \end{cases}$$

oder

$$117) \begin{cases} \dfrac{X}{a} = \dfrac{\cos N}{\sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{b^2}{a^2}\right) \sin N^2}}, \\ \dfrac{Y}{b} = \dfrac{\sin N}{\sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{a^2}{b^2}\right) \cos N^2}}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 115) ergiebt sich leicht

$$a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U' = \frac{a^2 b^2 \cos(N - U')}{\sqrt{a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2}},$$

und folglich, weil

$$\sqrt{a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2} = \frac{a^2 \cos N}{X} = \frac{b^2 \sin N}{Y}$$

ist:

$$a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U' = \frac{b^2 \cos(N - U')}{\cos N} X = \frac{a^2 \cos(N - U')}{\sin N} Y.$$

Also ist

$$118)\quad \begin{cases} X_1 = \left\{1 - \dfrac{2b^2 \cos(N - U')\cos U'}{\cos N(a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)}\right\} X, \\ Y_1 = \left\{1 - \dfrac{2a^2 \cos(N - U')\sin U'}{\sin N(a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)}\right\} Y; \end{cases}$$

oder

$$119)\quad \begin{cases} \dfrac{X_1}{a} = \left\{1 - \dfrac{2\cos(N - U')\cos U'}{\cos N(\cos U'^2 + \frac{a^2}{b^2}\sin U'^2)}\right\} \dfrac{X}{a}, \\ \dfrac{Y_1}{b} = \left\{1 - \dfrac{2\cos(N - U')\sin U'}{\sin N(\sin U'^2 + \frac{b^2}{a^2}\cos U'^2)}\right\} \dfrac{Y}{b}; \end{cases}$$

oder

$$120)\quad \begin{cases} \dfrac{X_1}{a} = \left\{1 - \dfrac{2\cos(N - U')\cos U'}{\cos N(1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)\sin U'^2)}\right\} \dfrac{X}{a}, \\ \dfrac{Y_1}{b} = \left\{1 - \dfrac{2\cos(N - U')\sin U'}{\sin N(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\cos U'^2)}\right\} \dfrac{Y}{b}; \end{cases}$$

oder

$$121)\quad \begin{cases} \dfrac{X_1}{a} = \left\{1 - \dfrac{\cos U'}{\cos N} \cdot \dfrac{2\cos(N - U')}{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)\sin U'^2}\right\} \dfrac{X}{a}, \\ \dfrac{Y_1}{b} = \left\{1 - \dfrac{\sin U'}{\sin N} \cdot \dfrac{2\cos(N - U')}{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\cos U'^2}\right\} \dfrac{Y}{b}. \end{cases}$$

Weil nun

$$\tang(N_1) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{Y_1}{X_1}$$

ist, so ist

$$\tang(N_1) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1 - \dfrac{2a^2 \cos(N - U')\sin U'}{\sin N(a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)}}{1 - \dfrac{2b^2 \cos(N - U')\cos U'}{\cos N(a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)}} \cdot \frac{Y}{X},$$

und folglich, weil

$$\frac{Y}{X} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\sin N}{\cos N}$$

ist:

$$tang\,(N_1) = \frac{\sin N}{\cos N} \cdot \frac{1 - \dfrac{2a^2 \cos(N - U')\sin U'}{\sin N(a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)}}{1 - \dfrac{2b^2 \cos(N - U')\cos U'}{\cos N(a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)}},$$

woraus sich

$$tang\,(N_1) = \frac{(a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)\sin N - 2a^2 \cos(N - U')\sin U'}{(a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)\cos N - 2b^2 \cos(N - U')\cos U'},$$

und hieraus ferner mittelst leichter Entwickelung

$$122)\quad tang\,(N_1) = -\frac{(a^2 - b^2)\sin N \cos U'^2 - a^2 \sin(N - 2U')}{(a^2 - b^2)\cos N \sin U'^2 - b^2 \cos(N - 2U')},$$

oder

$$123)\quad tang\,(N_1) = -\frac{\sin N \cos U'^2 - \dfrac{a^2}{e^2}\sin(N - 2U')}{\cos N \sin U'^2 - \dfrac{b^2}{e^2}\cos(N - 2U')},$$

wo

$$124)\quad \frac{a^2}{e^2} = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{-1},\quad \frac{b^2}{e^2} = -\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^{-1}$$

ist, ergiebt.

Stellt man die bekannten Formeln

$$\cos(N_1) = -\frac{b^2 X_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}},\quad \sin(N_1) = -\frac{a^2 Y_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}}$$

auf folgende Art dar:

$$\cos(\pi + (N_1)) = \frac{b^2 X_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}},\quad \sin(\pi + (N_1)) = \frac{a^2 Y_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}};$$

so erhellet aus 79) und 80) leicht, dass man $tang\,(N_2)$ aus dem vorhergehenden Ausdrucke von $tang\,(N_1)$ erhalten muss, wenn man in demselben für $N$, $U'$ respective $\pi + (N_1)$, $U_1'$ setzt, wodurch sich nach leichter Rechnung

$$125)\quad tang\,(N_2) = -\frac{\sin(N_1)\cos U_1'^2 - \dfrac{a^2}{e^2}\sin((N_1) - 2U_1')}{\cos(N_1)\sin U_1'^2 - \dfrac{b^2}{e^2}\cos((N_1) - 2U_1')}$$

ergiebt.

Wenn man aber die bekannten Formeln

$$\cos(N_2) = -\frac{b^2 X_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}, \quad \sin(N_2) = -\frac{a^2 Y_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}$$

unter der Form

$$\cos(\pi + (N_2)) = \frac{b^2 X_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}, \quad \sin(\pi + (N_2)) = \frac{a^2 Y_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}$$

darstellt, so ergiebt sich eben so aus 80), dass $tang(N_3)$ aus dem obigen Ausdrucke von $tang(N_1)$ erhalten werden muss, wenn man in demselben für $N$, $U'$ respective $\pi + (N_2)$, $U_2'$ setzt, wodurch man nach leichter Rechnung

$$126) \quad tang(N_3) = -\frac{\sin(N_2)\cos U_2'^2 - \frac{a^2}{e^2}\sin((N_2) - 2U_2')}{\cos(N_2)\sin U_2'^2 - \frac{b^2}{e^2}\cos((N_2) - 2U_2')}$$

erhält.

Nun ist aber

$$\cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)),$$
$$\sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1));$$

folglich

$$\cos 2U_1' = \cos 2(U' - 2(N_1)),$$
$$\sin 2U_1' = -\sin 2(U' - 2(N_1));$$

also

$$\sin((N_1) - 2U_1') = \sin(N_1)\cos 2(U' - 2(N_1)) + \cos(N_1)\sin 2(U' - 2(N_1))$$
$$= \sin(2U' - 3(N_1)),$$

$$\cos((N_1) - 2U_1') = \cos(N_1)\cos 2(U' - 2(N_1)) - \sin(N_1)\sin 2(U' - 2(N_1))$$
$$= \cos(2U' - 3(N_1));$$

folglich nach 125)

$$127) \quad tang(N_2) = -\frac{\sin(N_1)\cos(U' - 2(N_1))^2 - \frac{a^2}{e^2}\sin(2U' - 3(N_1))}{\cos(N_1)\sin(U' - 2(N_1))^2 - \frac{b^2}{e^2}\cos(2U' - 3(N_1))}.$$

Ferner ist

$$\cos U_2' = -\cos(U_1' - 2(N_2)),$$
$$\sin U_2' = \sin(U_1' - 2(N_2));$$

also

$$\begin{aligned}\cos U_2' &= -\cos U_1' \cos 2(N_2) - \sin U_1' \sin 2(N_2)\\ &= \cos(U' - 2(N_1)) \cos 2(N_2) - \sin(U' - 2(N_1)) \sin 2(N_2)\\ &= \cos(U' - 2(N_1) + 2(N_2)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin U_2' &= \sin U_1' \cos 2(N_2) - \cos U_1' \sin 2(N_2)\\ &= \sin(U' - 2(N_1)) \cos 2(N_2) + \cos(U' - 2(N_1)) \sin 2(N_2)\\ &= \sin(U' - 2(N_1) + 2(N_2));\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}\cos 2U_2' &= \cos 2(U' - 2(N_1) + 2(N_2)),\\ \sin 2U_2' &= \sin 2(U' - 2(N_1) + 2(N_2));\end{aligned}$$

und daher

$$\sin((N_2) - 2U_2')$$
$$= \sin(N_2)\cos 2(U' - 2(N_1) + 2(N_2)) - \cos(N_2)\sin 2(U' - 2(N_1) + 2(N_2))$$
$$= -\sin(2U' - 4(N_1) + 3(N_2)),$$

$$\cos((N_2) - 2U_2')$$
$$= \cos(N_2)\cos 2(U' - 2(N_1) + 2(N_2)) + \sin(N_2)\sin 2(U' - 2(N_1) + 2(N_2))$$
$$= \cos(2U' - 4(N_1) + 3(N_2));$$

also nach 126)

$$128)\quad \tang(N_3) =$$

$$-\frac{\sin(N_2)\cos(U' - 2(N_1) + 2(N_2))^2 + \frac{a^2}{e^2}\sin(2U' - 4(N_1) + 3(N_2))}{\cos(N_2)\sin(U' - 2(N_1) + 2(N_2))^2 - \frac{b^2}{e^2}\cos(2U' - 4(N_1) + 3(N_2))}.$$

Aus den Formeln 79) erhält man nun ferner leicht

$$\sin(U' - N) = -\mu \sin(U - N),$$

$$\sin(U_2' - (N_2)) = \frac{1}{\mu}\sin(U_1' - (N_2));$$

d. i. nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet:

$$\sin(U_2' - (N_2)) = \frac{1}{\mu}\sin(U' - 2(N_1) + (N_2)).$$

Also hat man in dem Falle zweier Brechungen und einer Zurückwerfung zur Bestimmung von $U_2'$ die folgenden Formeln:

$$129)\ \sin(U' - N) = -\mu \sin(U - N),$$

$$\tang(N_1) = -\frac{\sin N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2}\sin(N - 2U')}{\cos N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2}\cos(N - 2U')},$$

$$\tang(N_2) = -\frac{\sin(N_1)\cos(U' - 2(N_1))^2 - \frac{a^2}{e^2}\sin(2U' - 3(N_1))}{\cos(N_1)\sin(U' - 2(N_1))^2 - \frac{b^2}{e^2}\cos(2U' - 3(N_1))},$$

$$\sin(U_2' - (N_2)) = \frac{1}{\mu}\sin(U' - 2(N_1) + (N_2));$$

und zur Bestimmung von $N$ aus $X$ und $Y$ hat man auch die Formel

$$130)\ \tang N = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{Y}{X}$$

oder

$$131)\ \tang N = \frac{a}{b}\left(\frac{Y}{b} : \frac{X}{a}\right).$$

Eben so erhält man aus den Formeln 80) leicht

$$\sin(U' - N) = -\mu \sin(U - N),$$

$$\sin(U_3' - (N_3)) = \frac{1}{\mu}\sin(U_2' - (N_3));$$

d. i. nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet:

$$\sin(U_3' - (N_3)) = \frac{1}{\mu}\sin(U' - 2(N_1) + 2(N_2) - (N_3)).$$

Folglich hat man in dem Falle zweier Brechungen und zweier Zurückwerfungen zur Bestimmung des Winkels $U_3'$ die folgenden, den Formeln 129) ähnlichen Formeln:

$$132)\quad \sin(U'-N) = -\mu \sin(U-N),$$

$$\tan g(N_1) = -\frac{\sin N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2}\sin(N-2U')}{\cos N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2}\cos(N-2U')},$$

$$\tan g(N_2) = -\frac{\sin(N_1)\cos(U'-2(N_1))^2 - \frac{a^2}{e^2}\sin(2U'-3(N_1))}{\cos(N_1)\sin(U'-2(N_1))^2 - \frac{b^2}{e^2}\cos(2U'-3(N_1))},$$

$$\tan g(N_3) = -\frac{\sin(N_2)\cos(U'-2(N_1)+2(N_2))^2 + \frac{a^2}{e^2}\sin(2U'-4(N_1)+3(N_2))}{\cos(N_2)\sin(U'-2(N_1)+2(N_2))^2 - \frac{b^2}{e^2}\cos(2U'-4(N_1)+3(N_2))},$$

$$\sin(U_3' - (N_3)) = \frac{1}{\mu}\sin(U' - 2(N_1) + 2(N_2) - (N_3));$$

zu denen dann wieder auch noch die Gleichung

$$133)\quad tang\, N = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{Y}{X}$$

oder

$$134)\quad tang\, N = \frac{a}{b}\left(\frac{Y}{b} : \frac{X}{a}\right)$$

hinzuzufügen ist.

So elegant die vorhergehenden Formeln auch sind, so muss doch bemerkt werden, dass sie nicht ganz bestimmte Kriterien an die Hand geben, wie die betreffenden Winkel zu nehmen sind, und dass man also in dieser Beziehung zu anderweitigen Beurtheilungen, was freilich in einzelnen Fällen meistens leicht sein wird, seine Zuflucht nehmen, oder wieder zu den Gleichungen 79) und 80), die auf alle Fragen ganz bestimmte Antwort ertheilen, zurückgehen muss.

§. 24.

Aus der aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Gleichung

$$tang\,(N_1) = -\frac{\sin N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2}\sin(N - 2U')}{\cos N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2}\cos(N - 2U')}$$

wollen wir jetzt den Differentialquotienten

$$\frac{\partial(N_1)}{\partial N}$$

entwickeln.

Zu dem Ende setzen wir der Kürze wegen

$$P = \sin N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2}\sin(N - 2U'),$$

$$Q = \cos N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2}\cos(N - 2U');$$

dann ist, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial P}{\partial N} = \cos N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2}\cos(N - 2U')$$

$$-2\left\{\sin N \sin U' \cos U' - \frac{a^2}{e^2}\cos(N - 2U')\right\}\frac{\partial U'}{\partial N},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial N} = -\sin N \sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2}\sin(N-2U')$$

$$+\,2\left\{\cos N \sin U' \cos U' - \frac{b^2}{e^2}\sin(N-2U')\right\}\frac{\partial U'}{\partial N}.$$

Also ist

$$Q\frac{\partial P}{\partial N} - P\frac{\partial Q}{\partial N}$$

$$= \left\{\cos N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2}\cos(N-2U')\right\}$$

$$\times\left\{\cos N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2}\cos(N-2U')\right\}$$

$$+\left\{\sin N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2}\sin(N-2U')\right\}$$

$$\times\left\{\sin N \sin U'^2 - \frac{b^2}{a^2}\sin(N-2U')\right\}$$

$$-\,2\left\{\cos N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2}\cos(N-2U')\right\}$$

$$\times\left\{\sin N \sin U' \cos U' - \frac{a^2}{e^2}\cos(N-2U')\right\}\frac{\partial U'}{\partial N}$$

$$-\,2\left\{\sin N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2}\sin(N-2U')\right\}$$

$$\times\left\{\cos N \sin U' \cos U' - \frac{b^2}{e^2}\sin(N-2U')\right\}\frac{\partial U'}{\partial N}.$$

Der von $\frac{\partial U'}{\partial N}$ unabhängige Theil dieses Ausdruckes ist, wie man nach einigen leichten Reductionen findet:

$$\sin U'^2 \cos U'^2 - \left(\frac{a^2}{e^2}\sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2}\cos U'^2\right)\cos 2U' + \frac{a^2}{e^2}\cdot\frac{b^2}{e^2}.$$

Nun ist aber

$$e^4 \sin U'^2 \cos U'^2 - e^2(a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)\cos 2U' + a^2b^2$$

$$= (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)\sin U'^2 \cos U'^2 - (a^2-b^2)(a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)\cos 2U' + a^2b^2$$

$$= a^4 \sin U'^2(\cos U'^2 - \cos 2U')$$

$$+\, b^4 \cos U'^2(\sin U'^2 + \cos 2U')$$

$$-\, a^2b^2(2\sin U'^2 \cos U'^2 + \cos U'^2 \cos 2U' - \sin U'^2 \cos 2U' - 1)$$

$$= a^4 \sin U'^4 + b^4 \cos U'^4 + a^2b^2(1 - \sin U'^4 - \cos U'^4)$$

$$= a^4 \sin U'^4 + b^4 \cos U'^4$$

$$+ \; a^2 b^2 \{ (\sin U'^2 + \cos U'^2)^2 - \sin U'^4 - \cos U'^4 \}$$

$$= a^4 \sin U'^4 + b^4 \cos U'^4 + 2 a^2 b^2 \sin U'^2 \cos U'^2$$

$$= (a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)^2,$$

und der obige von $\frac{\partial U'}{\partial N}$ unabhängige Theil ist folglich

$$\left(\frac{a^2}{e^2} \sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2} \cos U'^2\right)^2.$$

Der Factor von $-2\frac{\partial U'}{\partial N}$ ist ferner, wie man leicht findet:

$$\sin N \cos N \sin U' \cos U'$$

$$-\left(\frac{a^2}{e^2} \cos N \sin U' + \frac{b^2}{e^2} \sin N \cos U'\right) \sin(N - U') + \frac{a^2}{e^2} \cdot \frac{b^2}{e^2}.$$

Nun ist aber

$$e^4 \sin N \cos N \sin U' \cos U'$$

$$- e^2 (a^2 \cos N \sin U' + b^2 \sin N \cos U') \sin(N - U') + a^2 b^2$$

$$= (a^4 - 2a^2 b^2 + b^4) \sin N \cos N \sin U' \cos U'$$

$$- (a^2 - b^2)(a^2 \cos N \sin U' + b^2 \sin N \cos U') \sin(N - U') + a^2 b^2$$

$$= a^4 \cos N \sin U' \{ \sin N \cos U' - \sin(N - U') \}$$

$$+ b^4 \sin N \cos U' \{ \cos N \sin U' + \sin(N - U') \}$$

$$- a^2 b^2 \{ 2 \sin N \cos N \sin U' \cos U' + \sin(N - U')^2 - 1 \}$$

$$= a^4 \cos N^2 \sin U'^2 + b^4 \sin N^2 \cos U'^2$$

$$- a^2 b^2 (\sin N^2 \cos U'^2 + \cos N^2 \sin U'^2 - 1)$$

$$= a^4 \cos N^2 \sin U'^2 + b^4 \sin N^2 \cos U'^2$$

$$+ a^2 b^2 (\sin N^2 \sin U'^2 + \cos N^2 \cos U'^2)$$

$$= (a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2)(a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2),$$

und der obige Factor von $-2\frac{\partial U'}{\partial N}$ ist folglich

$$\left(\frac{a^2}{e^2} \cos N^2 + \frac{b^2}{e^2} \sin N^2\right)\left(\frac{a^2}{e^2} \sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2} \cos U'^2\right).$$

Daher ist jetzt

$$Q\frac{\partial P}{\partial N} - P\frac{\partial Q}{\partial N}$$

$$= \left(\frac{a^2}{e^2} \sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2} \cos U'^2\right)^2$$

$$- 2\left(\frac{a^2}{e^2} \cos N^2 + \frac{b^2}{e^2} \sin N^2\right)\left(\frac{a^2}{e^2} \sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2} \cos U'^2\right)\frac{\partial U'}{\partial N}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$tang(N_1) = -\frac{P}{Q}$$

ist, so ist

$$sec(N_1)^2 \frac{\partial(N_1)}{\partial N} = -\frac{Q\frac{\partial P}{\partial N} - P\frac{\partial Q}{\partial N}}{Q^2},$$

und folglich, weil

$$sec(N_1)^2 = \frac{P^2 + Q^2}{Q^2}$$

ist.

$$\frac{\partial(N_1)}{\partial N} = -\frac{Q\frac{\partial P}{\partial N} - P\frac{\partial Q}{\partial N}}{P^2 + Q^2}.$$

Es ist aber auch

$$\frac{cos(N_1)^2}{Q^2} = \frac{sin(N_1)^2}{P^2},$$

und daher nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial(N_1)}{\partial N} = -\frac{cos(N_1)^2}{Q^2}\left(Q\frac{\partial P}{\partial N} - P\frac{\partial Q}{\partial N}\right)$$

$$= -\frac{sin(N_1)^2}{P^2}\left(Q\frac{\partial P}{\partial N} - P\frac{\partial Q}{\partial N}\right);$$

folglich, weil, wie man leicht findet,

$$Q = cos N\left(\frac{a^2}{e^2}sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2}cos U'^2\right) - 2\frac{b^2}{e^2}cos(N - U')cos U',$$

$$P = -sin N\left(\frac{a^2}{e^2}sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2}cos U'^2\right) - 2\frac{a^2}{e^2}cos(N - U')sin U'$$

ist:

$$135)\quad \frac{\partial(N_1)}{\partial N} = -\left\{\frac{cos(N_1)}{cos N - \frac{2b^2 cos(N - U')cos U'}{a^2 sin U'^2 + b^2 cos U'^2}}\right\}^2$$

$$\times\left\{1 - 2\frac{a^2 cos N^2 + b^2 sin N^2}{a^2 sin U'^2 + b^2 cos U'^2}\cdot\frac{\partial U'}{\partial N}\right\}$$

$$= -\left\{\frac{sin(N_1)}{sin N - \frac{2a^2 cos(N - U')sin U'}{a^2 sin U'^2 + b^2 cos U'^2}}\right\}^2$$

$$\times\left\{1 - 2\frac{a^2 cos N^2 + b^2 sin N^2}{a^2 sin U'^2 + b^2 cos U'^2}\cdot\frac{\partial U'}{\partial N}\right\}.$$

oder

$$136)\ \frac{\partial(N_1)}{\partial N} = -\left\{\frac{\cos(N_1)}{\cos N - \dfrac{2\cos(N-U')\cos U'}{\cos U'^2 + \dfrac{a^2}{b^2}\sin U'^2}}\right\}^2$$

$$\times\left\{1 - 2\,\frac{\sin N^2 + \dfrac{a^2}{b^2}\cos N^2}{\cos U'^2 + \dfrac{a^2}{b^2}\sin U'^2}\cdot\frac{\partial U'}{\partial N}\right\}$$

$$= -\left\{\frac{\sin(N_1)}{\sin N - \dfrac{2\cos(N-U')\sin U'}{\sin U'^2 + \dfrac{b^2}{a^2}\cos U'^2}}\right\}^2$$

$$\times\left\{1 - 2\,\frac{\cos N^2 + \dfrac{b^2}{a^2}\sin N^2}{\sin U'^2 + \dfrac{b^2}{a^2}\cos U'^2}\cdot\frac{\partial U'}{\partial N}\right\},$$

oder

$$137)\ \frac{\partial(N_1)}{\partial N} = -\left\{\frac{\cos(N_1)}{\cos N - \dfrac{2\cos(N-U')\cos U'}{1-\left(1-\dfrac{a^2}{b^2}\right)\sin U'^2}}\right\}^2$$

$$\times\left\{1 - 2\,\frac{1-\left(1-\dfrac{a^2}{b^2}\right)\cos N^2}{1-\left(1-\dfrac{a^2}{b^2}\right)\sin U'^2}\cdot\frac{\partial U'}{\partial N}\right\}$$

$$= -\left\{\frac{\sin(N_1)}{\sin N - \dfrac{2\cos(N-U')\sin U'}{1-\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right)\cos U'^2}}\right\}^2$$

$$\times\left\{1 - 2\,\frac{1-\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right)\sin N^2}{1-\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right)\cos U'^2}\cdot\frac{\partial U'}{\partial N}\right\}.$$

Weil aber, wie man leicht findet,

$$\cos N - 2\cos(N - U')\cos U' = -\cos(N - 2U'),$$
$$\sin N - 2\cos(N - U')\sin U' = \sin(N - 2U')$$

ist, so ist auch:

$$138)\ \frac{\partial (N_1)}{\partial N} = -\left\{\frac{\cos(N_1)}{\cos(N-2U') + \dfrac{\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\cos(N-U')\sin U' \sin 2U'}{1-\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\sin U'^2}}\right\}^2$$

$$\times\left\{1 - 2\,\frac{1-\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\cos N^2}{1-\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\sin U'^2}\cdot\frac{\partial U'}{\partial N}\right\}$$

$$= -\left\{\frac{\sin(N_1)}{\sin(N-2U') - \dfrac{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\cos(N-U')\cos U' \sin 2U'}{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\cos U'^2}}\right\}^2$$

$$\times\left\{1 - 2\,\frac{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\sin N^2}{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\cos U'^2}\cdot\frac{\partial U'}{\partial N}\right\}.$$

Der Kürze wegen wollen wir im Folgenden

$$139)\ \frac{\partial (N_1)}{\partial N} = F\left\{N,\ (N_1),\ U',\ \frac{\partial U'}{\partial N}\right\}$$

setzen, wo die Bedeutung von

$$F\left\{N,\ (N_1),\ U',\ \frac{\partial U'}{\partial N}\right\}$$

aus dem Vorhergehenden leicht von selbst erhellen wird; dann ist nach 125) und 126)

$$140)\ \frac{\partial (N_2)}{\partial (N_1)} = F\left\{(N_1),\ (N_2),\ U_1',\ \frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)}\right\}$$

und

$$141)\ \frac{\partial (N_3)}{\partial (N_2)} = F\left\{(N_2),\ (N_3),\ U_2',\ \frac{\partial U_2'}{\partial (N_2)}\right\}.$$

§. 25.

In dem Falle zweier Brechungen und einer Zurückwerfung folg aus den aus dem Obigen bekannten Gleichungen

$$\sin(U' - N) = - \mu \sin(U - N);$$
$$\cos U_1' = - \cos(U' - 2(N_1)),$$
$$\sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1));$$
$$\sin(U_2' - (N_2)) = \frac{1}{\mu} \sin(U_1' - (N_2))$$

leicht durch Differentiation:

$$\frac{\partial U'}{\partial N} = 1 + \mu \frac{\cos(U - N)}{\cos(U' - N)};$$

ferner

$$\frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} = \frac{\sin(U' - 2(N_1))}{\sin U_1'} \left(2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)}\right)$$
$$= - \frac{\cos(U' - 2(N_1))}{\cos U_1'} \left(2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)}\right),$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} = 2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)};$$

und

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N} = \frac{\partial (N_2)}{\partial N} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\cos(U_1' - (N_2))}{\cos(U_2' - (N_2))} \left(\frac{\partial U_1'}{\partial N} - \frac{\partial (N_2)}{\partial N}\right);$$

und man hat also jetzt die folgenden Formeln:

$$142) \quad \sin(U' - N) = - \mu \sin(U - N),$$
$$\frac{\partial U'}{\partial N} = 1 + \mu \frac{\cos(U - N)}{\cos(U' - N)},$$
$$\frac{\partial (N_1)}{\partial N} = F\left\{N, (N_1), U', \frac{\partial U'}{\partial N}\right\},$$
$$\frac{\partial U'}{\partial (N_1)} = \frac{\partial U'}{\partial N} : \frac{\partial (N_1)}{\partial N},$$
$$\cos U_1' = - \cos(U' - 2(N_1)),$$
$$\sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1));$$
$$\frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} = 2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)},$$
$$\frac{\partial U_1'}{\partial N} = \frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} \cdot \frac{\partial (N_1)}{\partial N},$$

$$\frac{\partial (N_2)}{\partial (N_1)} = F\left\{ (N_1),\ (N_2),\ U_1',\ \frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} \right\},$$

$$\frac{\partial (N_2)}{\partial N} = \frac{\partial (N_2)}{\partial (N_1)} \cdot \frac{\partial (N_1)}{\partial N},$$

$$\sin (U_2' - (N_2)) = \frac{1}{\mu} \sin (U_1' - (N_2)),$$

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N} = \frac{\partial (N_2)}{\partial N} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\cos (U_1' - (N_2))}{\cos (U_2' - (N_2))} \left( \frac{\partial U_1'}{\partial N} - \frac{\partial (N_2)}{\partial N} \right).$$

**Mittelst dieser Formeln, in Verbindung mit den Formeln 129), kann man den Differentialquotienten**

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N}$$

**berechnen, wenn $U$ und $N$ als gegeben angesehen werden.**

## §. 26.

**In dem Falle zweier Brechungen und zweier Zurückwerfungen folgt aus den aus dem Obigen bekannten Gleichungen**

$$\begin{aligned}
\sin (U' - N) &= - \mu \sin (U - N);\\
\cos U_1' &= - \cos (U' - 2(N_1)),\\
\sin U_1' &= \sin (U' - 2(N_1));\\
\cos U_2' &= - \cos (U_1' - 2(N_2)),\\
\sin U_2' &= \sin (U_1' - 2(N_2));\\
\sin (U_3' - (N_3)) &= \frac{1}{\mu} \sin (U_2' - (N_3))
\end{aligned}$$

**leicht durch Differentiation:**

$$\frac{\partial U'}{\partial N} = 1 + \mu \frac{\cos (U - N)}{\cos (U' - N)};$$

**ferner:**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} &= \frac{\sin (U' - 2(N_1))}{\sin U_1'} \left(2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)}\right)\\
&= - \frac{\cos (U' - 2(N_1))}{\cos U_1'} \left(2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)}\right),
\end{aligned}$$

**d. i. nach dem Vorhergehenden**

$$\frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} = 2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)};$$

**ferner**

$$\frac{\partial U_2'}{\partial (N_2)} = \frac{\sin (U_1' - 2(N_2))}{\sin U_2'} \left(2 - \frac{\partial U_1'}{\partial (N_2)}\right)$$

$$= -\frac{\cos (U_1' - 2(N_2))}{\cos U_2'} \left(2 - \frac{\partial U_1'}{\partial (N_2)}\right),$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial U_2'}{\partial (N_2)} = 2 - \frac{\partial U_1'}{\partial (N_2)},$$

endlich

$$\frac{\partial U_3'}{\partial N} = \frac{\partial (N_3)}{\partial N} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\cos (U_2' - (N_3))}{\cos (U_3' - (N_3))} \left(\frac{\partial U_2'}{\partial N} - \frac{\partial (N_3)}{\partial N}\right);$$

und man hat also jetzt die folgenden Formeln:

143) $$\sin (U' - N) = -\mu \sin (U - N),$$

$$\frac{\partial U'}{\partial N} = 1 + \mu \frac{\cos (U - N)}{\cos (U' - N)},$$

$$\frac{\partial (N_1)}{\partial N} = F\left\{N, (N_1), U', \frac{\partial U'}{\partial N}\right\},$$

$$\frac{\partial U'}{\partial (N_1)} = \frac{\partial U'}{\partial N} : \frac{\partial (N_1)}{\partial N},$$

$$\cos U_1' = -\cos (U' - 2(N_1)),$$

$$\sin U_1' = \sin (U' - 2(N_1));$$

$$\frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} = 2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)},$$

$$\frac{\partial U_1'}{\partial N} = \frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} \cdot \frac{\partial (N_1)}{\partial N},$$

$$\frac{\partial (N_2)}{\partial (N_1)} = F\left\{(N_1), (N_2), U_1', \frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)}\right\},$$

$$\frac{\partial (N_2)}{\partial N} = \frac{\partial (N_2)}{\partial (N_1)} \cdot \frac{\partial (N_1)}{\partial N},$$

$$\frac{\partial U_1'}{\partial (N_2)} = \frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} : \frac{\partial (N_2)}{\partial (N_1)},$$

$$\cos U_2' = -\cos (U_1' - 2(N_2)),$$

$$\sin U_2' = \sin (U_1' - 2(N_2));$$

$$\frac{\partial U_2'}{(\partial(N_2)} = 2 - \frac{\partial U_1'}{\partial(N_2)},$$

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N} = \frac{\partial U_2'}{\partial(N_2)} \cdot \frac{\partial(N_2)}{\partial N},$$

$$\frac{\partial(N_3)}{\partial(N_2)} = F\left\{(N_2),\ (N_3),\ U_2',\ \frac{\partial U_2'}{\partial(N_2)}\right\},$$

$$\frac{\partial(N_3)}{\partial N} = \frac{\partial(N_3)}{\partial(N_2)} \cdot \frac{\partial(N_2)}{\partial N},$$

$$\sin(U_3' + (N_3)) = \frac{1}{\mu}\sin(U_2' - (N_3)),$$

$$\frac{\partial U_3'}{\partial N} = \frac{\partial(N_3)}{\partial N} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\cos(U_2' - (N_3))}{\cos(U_3' - (N_3))}\left(\frac{\partial U_2'}{\partial N} - \frac{\partial(N_3)}{\partial N}\right).$$

Mittelst dieser Formeln, in Verbindung mit den Formeln 132), kann man den Differentialquotienten

$$\frac{\partial U_3'}{\partial N}$$

berechnen, wenn $U$ und $N$ gegeben sind.

## §. 27.

Will man für einen bestimmten Werth von $\frac{a}{b}$ oder $\frac{b}{a}$ und einen gegebenen Werth des Winkels $U$ den Winkel $N$ so bestimmen, dass der Differentialquotient

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N} \text{ oder } \frac{\partial U_3'}{\partial N}$$

verschwindet, so muss man dazu, weil eine vollständige analytische Auflösung dieses Problems in sehr weitläufige Entwickelungen führen würde, mittelst der in den beiden vorhergehenden Paragraphen und in §. 23. gegebenen Formeln durch Annäherungen zu gelangen suchen, indem man für $N$ nach und nach verschiedene Werthe setzt, und die entsprechenden Werthe von

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N} \text{ oder } \frac{\partial U_3'}{\partial N}$$

berechnet, wozu eine ausführliche Anleitung nicht erforderlich sein wird. Hat man aber auf diesem Wege, der im vorliegenden Falle, besonders wenn $\frac{a}{b}$ oder $\frac{b}{a}$ der Einheit sehr nahe kommt, immer leich-

ter zum Ziele führen wird, als die allgemeine sehr weitläufige und verwickelte Auflösung, den Winkel $N$ gefunden, so erhält man die Coordinaten $X$, $Y$ des Punktes $(XY)$ der Ellipse, in welchem der Differentialquotient

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N} \text{ oder } \frac{\partial U_3'}{\partial N}$$

verschwindet, mittelst der folgenden aus §. 23. bekannten Formeln:

$$144) \begin{cases} \frac{X}{a} = \frac{\cos N}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin N^2}}, \\ \frac{Y}{b} = \frac{\sin N}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \cos N^2}}; \end{cases}$$

die man auch leicht noch unter andern Formen darstellen kann, worüber §. 23. zu vergleichen ist.

## §. 28.

Nachdem wir jetzt bei dem Kreise und bei der Ellipse die Fälle besonders betrachtet haben, welche für die wirkliche Anwendung von Bedeutung sind, wollen wir nun wieder zu dem Kreise zurückkehren, und ganz allgemeine Ausdrücke für den Fall von zwei Brechungen und überhaupt $n - 1$ Zurückwerfungen entwickeln, eine Untersuchung, welche wenigstens in theoretischer Rücksicht interessant ist, und uns zu bemerkenswerthen allgemeinen Formeln führen wird.

Die in §. 16. angestellte Untersuchung, welche sich leicht zu völliger Allgemeinheit erheben lässt, führt auf der Stelle zu den folgenden für zwei Brechungen und $n - 1$ Zurückwerfungen geltenden allgemeinen Ausdrücken:

$$(-1)^n X_n = \cos((2n-1)N - 2nU'),$$

$$(-1)^n Y_n = -\sin((2n-1)N - 2nU');$$

$$(-1)^n \cos U'_n = -\frac{1}{\mu} \sin((2n-1)N - 2nU') \sin(N - U')$$

$$+ \cos((2n-1)N - 2nU') \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N - U')^2},$$

$$(-1)^n \sin U'_n = -\frac{1}{\mu}\cos((2n-1)N-2nU')\sin(N-U')$$

$$-\sin((2n-1)N-2nU')\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2}.$$

Differentiirt man nun die letzte Gleichung in Bezug auf $N$ als unabhängige veränderliche Grösse, so erhält man nach leichter Rechnung

$$(-1)^n \cos U'_n \frac{\partial U'_n}{\partial N} = -(-1)^n \cos U'_n.\left(2n-1-2n\frac{\partial U'}{\partial N}\right)$$

$$-(-1)^n.\frac{1}{\mu}\cos U'_n \cos(N-U')\frac{1-\frac{\partial U'}{\partial N}}{\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2}},$$

also

$$\frac{\partial U'_n}{\partial N}$$

$$=-\left(2n-1-2n\frac{\partial U'}{\partial N}\right)-\frac{\frac{1}{\mu}\cos(N-U')}{\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2}}\left(1-\frac{\partial U'}{\partial N}\right).$$

Weil nun aber nach §. 16. bekanntlich

$$\sin(N-U') = -\mu \sin N$$

ist, so ist

$$\cos(N-U')\left(1-\frac{\partial U'}{\partial N}\right) = -\mu \cos N;$$

und, weil man den obigen Ausdruck von

$$\frac{\partial U'_n}{\partial N}$$

auch auf folgende Form bringen kann:

$$\frac{\partial U'_n}{\partial N}$$

$$=1-\left\{2n+\frac{\frac{1}{\mu}\cos(N-U')}{\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2}}\right\}\left(1-\frac{\partial U'}{\partial N}\right),$$

so erhält man aus dem Vorhergehenden unmittelbar:

$$\frac{\partial U'_n}{\partial N}$$

$$= 1 + \frac{\mu \cos N}{\cos(N - U')} \left\{ 2n + \frac{\frac{1}{\mu} \cos(N - U')}{\sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N - U')^2}} \right\}.$$

Weil nun bekanntlich nach §. 16.

$$\cos N = X, \ \sin N = Y;$$

$$\cos(N - U') = -\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}, \ \sin(N - U') = -\mu Y;$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N - U')^2} = X$$

und also

$$-\sin N \frac{\partial N}{\partial X} = 1, \ \frac{\partial N}{\partial X} = -\frac{1}{Y}$$

ist, so ist noch dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial U_n'}{\partial X} = \frac{\partial U_n'}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial X}$$

$$= -\frac{1}{Y} + \frac{\mu X}{Y\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}} \left\{ 2n - \frac{\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}}{\mu X} \right\},$$

also

$$145) \quad \frac{\partial U_n'}{\partial X} = \frac{2(n\mu X - \sqrt{1 - \mu^2 Y^2})}{Y\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}}.$$

Für $n = 2$ und $n = 3$ erhält man aus dieser allgemeinen Formel die Formeln 88) und 89), wie es sein muss.

Um nun auch noch den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 U_n'}{\partial X^2}$$

zu entwickeln, bringen wir den Ausdruck 145) auf die Form

$$\frac{\partial U_n'}{\partial X} = -\frac{2}{Y} + \frac{2n\mu X}{Y\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}};$$

so ist, wenn man differentiirt:

$$\frac{\partial^2 U_n'}{\partial X^2} = \frac{2}{Y^2} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{2n\mu X}{Y^2\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X}$$

$$+ \frac{2n\mu}{Y} \cdot \frac{1-\mu^2 Y^2 + \mu^2 XY \frac{\partial Y}{\partial X}}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}$$

$$= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{2n\mu X^2}{Y^3\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} + \frac{2n\mu(1-\mu^2)}{Y(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}$$

$$= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{2n\mu(X^2+Y^2) - 2n\mu^3 Y^2(1+X^2)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}$$

$$= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{2n\mu - 2n\mu^3(1-X^2)(1+X^2)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}$$

$$= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{2n\mu - 2n\mu^3(1-X^4)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}},$$

also

$$146) \quad \frac{\partial^2 U_n'}{\partial X^2} = -\frac{2}{Y^3}\left\{X - \frac{n\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}\right\}.$$

Für $n = 2$ und $n = 3$ erhält man die Formeln 90) und 91), wie es sein muss.

Setzen wir nun auf ähnliche Art wie früher

$$\frac{\partial U_n'}{\partial X} = \frac{2(n\mu X - \sqrt{1-\mu^2 Y^2})}{Y\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} = 0,$$

so erhalten wir die Gleichung

$$n\mu X - \sqrt{1-\mu^2 Y^2} = 0$$

oder

$$n\mu X = \sqrt{1-\mu^2 Y^2},$$

durch deren Auflösung sich in Verbindung mit der Gleichung

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

wenn man beachtet, dass $X$ unter den gemachten Voraussetzungen bekanntlich positiv ist, ohne Schwierigkeit

$$147) \begin{cases} X = \dfrac{1}{\mu}\sqrt{\dfrac{1-\mu^2}{n^2-1}} = \dfrac{1}{\mu}\sqrt{\dfrac{(1-\mu)(1+\mu)}{n^2-1}} \\[2ex] Y = \pm\dfrac{1}{\mu}\sqrt{\dfrac{n^2\mu^2-1}{n^2-1}} = \pm\dfrac{1}{\mu}\sqrt{\dfrac{(n\mu-1)(n\mu+1)}{n^2-1}} \end{cases}$$

ergiebt.

Berechnen wir den diesen Werthen von $X$ und $Y$ entsprechenden Werth des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 U_n'}{\partial X^2} = -\frac{2}{Y^3}\left\{X - \frac{n\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}\right. ,$$

so erhalten wir nach leichter Rechnung für die obigen Werthe von $X$ und $Y$ mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$148)\quad \frac{\partial^2 U_n'}{\partial X^2} = \pm \frac{2(n^2-1)^2\mu^2}{n^2\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}} .$$

Aus den obigen Ausdrücken von $X$ und $Y$ ergiebt sich auf der Stelle, dass unser Problem nur unter der Voraussetzung möglich ist, dass

$$\mu = M\left(\frac{1}{n}, 1\right)$$

ist. Wenn aber diese Bedingung erfüllt ist, so ist $U_n'$ ein Minimum oder ein Maximum, jenachdem man in dem obigen Ausdrucke von $Y$ das obere oder das untere Zeichen nimmt.

Für den Uebergang eines Strahls aus Luft in Wasser ist $\mu = 0{,}749$. Nun ist $^1/_2 = 0{,}5$, und daher für $n \overline{\overline{>}} 2$ offenbar immer

$$\mu = M\left(\frac{1}{n}, 1\right),$$

also für jedes $n \overline{\overline{>}} 2$ die Aufgabe in diesem Falle möglich

Nach dem Obigen ist nun

$$149)\quad \begin{cases} \cos N = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{n^2-1}} = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{(1-\mu)(1+\mu)}{n^2-1}}, \\ \sin N = \pm\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{n^2\mu^2-1}{n^2-1}} = \pm\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{(n\mu-1)(n\mu+1)}{n^2-1}}; \\ \cos(N-U') = -n\sqrt{\frac{1-\mu^2}{n^2-1}} = -n\sqrt{\frac{(1-\mu)(1+\mu)}{n^2-1}}, \\ \sin(N-U') = \mp\sqrt{\frac{n^2\mu^2-1}{n^2-1}} = \mp\sqrt{\frac{(n\mu-1)(n\mu+1)}{n^2-1}}; \end{cases}$$

und die obigen Formeln zur Bestimmung der Lage des letzten ge-

brochenen Strahls können auf den folgenden Ausdruck gebracht werden:

$$(-1)^n X_n = \cos\{N-2n(N-U')\},$$
$$(-1)^n Y_n = \sin\{N-2n(N-U')\};$$
$$(-1)^n \cos U_n' = \frac{1}{\mu}\sin\{N-2n(N-U')\}\sin(N-U')$$
$$+\cos\{N-2n(N-U')\}\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2},$$
$$(-1)^n \sin U_n' = -\frac{1}{\mu}\cos\{N-2n(N-U')\}\sin(N-U')$$
$$+\sin\{N-2n(N-U')\}\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$\sin(N-U') = -\mu\sin N,$$
$$\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}\sin(N-U')^2} = \cos N;$$

folglich

$$(-1)^n \cos U_n' = -\sin\{N-2n(N-U')\}\sin N$$
$$+\cos\{N-2n(N-U')\}\cos N,$$
$$(-1)^n \sin U_n' = \cos\{N-2n(N-U')\}\sin N$$
$$+\sin\{N-2n(N-U')\}\cos N;$$

d. i.

$$(-1)^n \cos U_n' = \cos 2\{N-n(N-U')\},$$
$$(-1)^n \sin U_n' = \sin 2\{N-n(N-U')\};$$

und die Formeln zur Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls sind folglich:

$$150)\left\{\begin{array}{l}(-1)^n X_n = \cos\{N-2n(N-U')\},\\ (-1)^n Y_n = \sin\{N-2n(N-U')\};\\ (-1)^n \cos U_n' = \cos 2\{N-n(N-U')\},\\ (-1)^n \sin U_n' = \sin 2\{N-n(N-U')\}.\end{array}\right.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$M = 2(N-U'),$$

so ist bekanntlich

$$\cos 2n(N-U')$$
$$=\cos M^n\{1-n_2\,tang\,M^2+n_4\,tang\,M^4-n_6\,tang\,M^6+\ldots\},$$
$$\sin 2n(N-U')$$
$$=\cos M^n\{n_1\,tang\,M-n_3\,tang\,M^3+n_5\,tang\,M^5-\ldots\};$$

wo

$$n_1,\; n_2,\; n_3,\; n_4,\; n_5,\; n_6,\;\ldots$$

wie gewöhnlich die Binomialcoefficienten für den Exponenten $n$ bezeichnen. Also ist nach dem Vorhergehenden:

$$(-1)^n X_n$$
$$=\cos N\cos 2n(N-U')+\sin N\sin 2n(N-U')$$
$$=\cos M^n\left\{\begin{array}{l}\cos N+n_1\sin N\,tang\,M\\ -n_2\cos N\,tang\,M^2\\ -n_3\sin N\,tang\,M^3\\ +n_4\cos N\,tang\,M^4\\ +n_5\sin N\,tang\,M^5\\ -\ldots\ldots\ldots\\ -\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

und

$$(-1)^n Y_n$$
$$=\sin N\cos 2n(N-U')-\cos N\sin 2n(N-U')$$
$$=\cos M^n\left\{\begin{array}{l}\sin N-n_1\cos N\,tang\,M\\ -n_2\sin N\,tang\,M^2\\ +n_3\cos N\,tang\,M^3\\ +n_4\sin N\,tang\,M^4\\ -n_5\cos N\,tang\,M^5\\ -n_6\sin N\,tang\,M^6\\ +\ldots\ldots\ldots\\ +\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

ferner

$$(-1)^n\cos U_n'$$
$$=\cos 2N\cos 2(N-U')+\sin 2N\sin 2(N-U')$$
$$=\cos M^n\left\{\begin{array}{l}\cos 2N+n_1\sin 2N\,tang\,M\\ -n_2\cos 2N\,tang\,M^2\\ -n_3\sin 2N\,tang\,M^3\\ +n_4\cos 2N\,tang\,M^4\\ +n_5\sin 2N\,tang\,M^5\\ -\ldots\ldots\ldots\\ -\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

und

$$(-1)^n \sin U_n'$$
$$= \sin 2N \cos 2(N-U') - \cos 2N \sin 2(N-U')$$
$$= \cos M^n \left\{ \begin{array}{l} \sin 2N - n_1 \cos 2N \tang M \\ - n_2 \sin 2N \tang M^2 \\ + n_3 \cos 2N \tang M^3 \\ + n_4 \sin 2N \tang M^4 \\ - n_5 \cos 2N \tang M^5 \\ - n_6 \sin 2N \tang M^6 \\ + \dots\dots\dots \\ + \dots\dots\dots \end{array} \right\}.$$

Es ist aber

$$\cos 2N = \cos N^2 - \sin N^2 = \frac{2-(n^2+1)\mu^2}{(n^2-1)\mu^2},$$

$$\sin 2N = 2\sin N \cos N = \pm \frac{2\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2-1)\mu^2};$$

$$\cos M = \cos(N-U')^2 - \sin(N-U')^2 = \frac{n^2+1-2n^2\mu^2}{n^2-1},$$

$$\sin M = 2\sin(N-U')\cos(N-U') = \pm \frac{2n\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{n^2-1};$$

folglich

$$\tang M = \pm \frac{2n\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{n^2+1-2n^2\mu^2}.$$

Führt man nun diese Ausdrücke in die oben für
$(-1)^n X_n$, $(-1)^n Y_n$ und $(-1)^n \cos U_n'$, $(-1)^n \sin U_n'$
gefundenen Ausdrücke ein, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
(-1)^n X_n = \left(\frac{n^2+1-2n^2\mu^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \Bigg\{ & \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{n^2-1}} + \frac{n_1}{\mu}\sqrt{\frac{n^2\mu^2-1}{n^2-1}} \cdot \frac{2n\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{n^2+1-2n^2\mu^2} \\
& - \frac{n_2}{\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{n^2-1}} \cdot \frac{2^2 n^2 (1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^2} \\
& - \frac{n_3}{\mu}\sqrt{\frac{n^2\mu^2-1}{n^2-1}} \cdot \frac{2^3 n^3 (1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^3} \\
& + \frac{n_4}{\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{n^2-1}} \cdot \frac{2^4 n^4 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^4} \\
& + \frac{n_5}{\mu}\sqrt{\frac{n^2\mu^2-1}{n^2-1}} \cdot \frac{2^5 n^5 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)^2\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^5} \\
& - \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& - \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \Bigg\}
\end{aligned}
$$

d. i.

$$151)\ (-1)^n X_n = \left(\frac{n^2+1-2n^2\mu^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \left\{ 1 + n_1 \cdot \frac{2n(n^2\mu^2-1)}{n^2+1-2n^2\mu^2} \right.$$
$$- n_2 \cdot \frac{2^2 n^2 (1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^2}$$
$$- n_3 \cdot \frac{2^3 . n^3 (1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^3}$$
$$+ n_4 \cdot \frac{2^4 n^4 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^4}$$
$$+ n_5 \cdot \frac{2^5 n^5 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)^3}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^5}$$
$$- n_6 \cdot \frac{2^6 n^6 (1-\mu^2)^3 (n^2\mu^2-1)^3}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^6}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\} \cdot \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{n^2-1}}$$

und

$$
\begin{aligned}
(-1)^n Y_n = \left(\frac{n^2+1-2n^2\mu^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \Bigg\{ & \pm \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{n^2\mu^2-1}{n^2-1}} \mp \frac{n_1}{\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{n^2-1}} \cdot \frac{2n\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{n^2+1-2n^2\mu^2} \\
& \mp \frac{n_2}{\mu}\sqrt{\frac{n^2\mu^2-1}{n^2-1}} \cdot \frac{2^2 n^2 (1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^2} \\
& \pm \frac{n_3}{\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{n^2-1}} \cdot \frac{2^3 n^3 (1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^3} \\
& \pm \frac{n_4}{\mu}\sqrt{\frac{n^2\mu^2-1}{n^2-1}} \cdot \frac{2^4 n^4 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^4} \\
& \mp \frac{n_5}{\mu}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{n^2-1}} \cdot \frac{2^5 n^5 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)^2\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{n^2+1-2n^2\mu^2)^5} \\
& \mp \frac{n_6}{\mu}\sqrt{\frac{n^2\mu^2-1}{n^2-1}} \cdot \frac{2^6 n^6 (1-\mu^2)^3 (n^2\mu^2-1)^3}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^6} \\
& \pm \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \pm \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \Bigg\},
\end{aligned}
$$

d. i.

$$152)\quad (-1)^n Y_n = \pm \left(\frac{n^2+1-2n^2\mu^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \left\{ \begin{aligned} 1 &- n_1 \cdot \frac{2n(1-\mu^2)}{n^2+1-2n^2\mu^2} \\ &- n_2 \cdot \frac{2^2 n^2 (1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^2} \\ &+ n_3 \cdot \frac{2^3 n^3 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^3} \\ &+ n_4 \cdot \frac{2^4 n^4 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^4} \\ &- n_5 \cdot \frac{2^5 n^5 (1-\mu^2)^3 (n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^5} \\ &- n_6 \cdot \frac{2^6 n^6 (1-\mu^2)^3 (n^2\mu^2-1)^3}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^6} \\ &+ \cdots\cdots\cdots \\ &+ \cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right\} \cdot \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{n^2\mu^2-1}{n^2-1}};$$

ferner

$$(-1)^n \cos U_n' = \left(\frac{n^2+1-2n^2\mu^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \left\{ \frac{2-(n^2+1)\mu^2}{(n^2-1)\mu^2} + n_1 \cdot \frac{2\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2-1)\mu^2} \cdot \frac{2n\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{n^2+1-2n^2\mu^2} \right.$$

$$- n_2 \cdot \frac{2-(n^2+1)\mu^2}{(n^2-1)\mu^2} \cdot \frac{2^2 n^2 (1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^2}$$

$$- n_3 \cdot \frac{2\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2-1)\mu^2} \cdot \frac{2^3 n^3 (1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^3}$$

$$+ n_4 \cdot \frac{2-(n^2+1)\mu^2}{(n^2-1)\mu^2} \cdot \frac{2^4 n^4 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^4}$$

$$+ n_5 \cdot \frac{2\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2-1)\mu^2} \cdot \frac{2^5 n^5 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)^2 \sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^5}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left. - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

d. i.

$$153)\quad (-1)\cos U_n' = \frac{(n^2+1-2n^2\mu^2)^n}{(n^2-1)^{n+1}\mu^2}\left\{\begin{array}{l} 2-(n^2+1)\mu^2 + n_1 \cdot \dfrac{2^2 n(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}{n^2+1-2n^2\mu^2} \\ \quad - n_2(2-(n^2+1)\mu^2)\cdot\dfrac{2^2 n^2(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^2} \\ \quad - n_3\cdot\dfrac{2^4 n^3(1-\mu^2)^2(n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^3} \\ \quad + n_4(2-(n^2+1)\mu^2)\cdot\dfrac{2^4 n^4(1-\mu^2)^2(n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^4} \\ \quad + n_5\cdot\dfrac{2^6 n^5(1-\mu^2)^3(n^2\mu^2-1)^3}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^5} \\ \quad - n_6(2-(n^2+1)\mu^2)\cdot\dfrac{2^6 n^6(1-\mu^2)^3(n^2\mu^2-1)^3}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^6} \\ \quad - \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\};$$

und

$$(-1)^n \sin U'_n = \left(\frac{n^2+1-2n^2\mu^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \left\{ \pm \frac{2\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2-1)\mu^2} \mp n_1 \cdot \frac{2-(n^2+1)\mu^2}{(n^2-1)\mu^2} \cdot \frac{2n\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{n^2+1-2n^2\mu^2} \right.$$

$$\mp n_2 \cdot \frac{2\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2-1)\mu^2} \cdot \frac{2^2 n^2 (1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^2}$$

$$\pm n_3 \cdot \frac{2-(n^2+1)\mu^2}{(n^2-1)\mu^2} \cdot \frac{2^3 n^3 (1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^3}$$

$$\pm n_4 \cdot \frac{2\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2-1)\mu^2} \cdot \frac{2^4 n^4 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^4}$$

$$\pm n_5 \cdot \frac{2-(n^2+1)\mu^2}{(n^2-1)\mu^2} \cdot \frac{2^5 n^5 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)^2 \sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^5}$$

$$\mp n_6 \cdot \frac{2\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}}{(n^2-1)\mu^2} \cdot \frac{2^6 n^6 (1-\mu^2)^3 (n^2\mu^2-1)^3}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^6}$$

$$\pm \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left. \pm \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \right\}$$

d. i.

$$154)\quad (-1)^n \sin U_n' = \pm \frac{(n^2+1-2n^2\mu^2)^n}{(n^2-1)^{n+1}\mu^2} \left\{ \begin{aligned} &1 - n_1 (2-(n^2+1)\mu^2) \cdot \frac{n}{n^2+1-2n^2\mu^2} \\ &- n_2 \cdot \frac{2^2 n^2 (1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^2} \\ &+ n_3 (2-(n^2+1)\mu^2) \cdot \frac{2^3 n^3 (1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^3} \\ &+ n_4 \cdot \frac{2^4 n^4 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^4} \\ &- n_5 (2-(n^2+1)\mu^2) \cdot \frac{2^4 n^5 (1-\mu^2)^2 (n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^5} \\ &- n_6 \cdot \frac{2^6 n^6 (1-\mu^2)^3 (n^2\mu^2-1)^3}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^6} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right\} \cdot 2\sqrt{(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}.$$

## §. 29.

Wie man aus der in §. 5. und §. 6. entwickelten, aus einem mehr geometrischen Gesichtspunkte dargestellten Theorie der wirksamen Strahlen die Haupterscheinungen des Regenbogens sämmtlich durch sehr einfache geometrische Betrachtungen herleiten und auf völlig genügende Weise erklären kann, darf ich hier als hinreichend bekannt voraussetzen, und ich müsste fürchten, die Geduld der Leser zu sehr in Anspruch zu nehmen, wenn ich diese seit Newton's Zeit schon so oft in völlig gleicher Weise angestellten Betrachtungen hier wiederholen wollte. Dagegen wird es nicht überflüssig sein, die Theorie des Regenbogens in ihren Grundzügen auf analytischem Wege aus der im Obigen entwickelten analytischen Theorie der wirksamen Strahlen herzuleiten, wozu wir jetzt, den Fall des Kreises oder sphärischer Tropfen in's Auge fassend, übergehen wollen.

Zu dem Ende legen wir durch das Auge des Beobachters eine den nach parallelen geraden Linien sich bewegenden Strahlen parallele gerade Linie, und nehmen den von dem Auge des Beobachters an nach der Gegend, von welcher die Strahlen her kommen, hin liegenden Theil dieser geraden Linie als den positiven Theil der ersten Axe, das Auge selbst aber als den Anfang eines in einer beliebigen durch die in Rede stehende gerade Linie gelegten Ebene liegenden rechtwinkligen Coordinatensystems der $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}$ an. Die Coordinaten des Mittelpunkts eines mit einem der Einheit gleichen Halbmesser in derselben Ebene beschriebenen Kreises in Bezug auf das in Rede stehende Coordinatensystem seien $P$, $Q$. Legen wir dann durch den Mittelpunkt dieses Kreises ein dem Systeme der $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}$ paralleles Coordinatensystem der $xy$, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten allgemein

$$155)\quad \mathfrak{X} = P + x,\ \mathfrak{Y} = Q + y;$$

also

$$156)\quad x = \mathfrak{X} - P,\ y = \mathfrak{Y} - Q.$$

Weil nun nach den obigen allgemeinen analytischen Entwickelungen für zwei Brechungen und $n$ Zurückwerfungen die Gleichung der geraden Linie, durch welche die Lage der wirksamen Strahlen bestimmt wird, in Bezug auf das System der $xy$

$$157)\quad y - Y_{n+1} = (x - X_{n+1})\ tang\, U'_{n+1}$$

ist, wo die Grössen $X_{n+1}$, $Y_{n+1}$ und $tang\ U'_{n+1}$ bekanntlich nur von $\mu$ abhängen; so ist nach dem Vorhergehenden

$$158)\quad \mathfrak{Y} - Q - Y_{n+1} = (\mathfrak{X} - P - X_{n+1}) \tang U'_{n+1}$$

die Gleichung dieser geraden Linie im Systeme der $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, dessen Anfang das Auge des Beobachters ist.

Die Ebene der $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ wollen wir jetzt, was offenbar verstattet ist, vertikal annehmen, und in dieser Ebene durch das Auge des Beobachters ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem der $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'$ legen, dessen Axe der $\mathfrak{X}'$ horizontal ist. Den positiven Theil der Axe der $\mathfrak{X}'$ nehmen wir so an, dass er mit dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{X}$ einen spitzen Winkel einschliesst; der positive Theil der Axe der $\mathfrak{Y}'$ sei von dem Auge des Beobachters nach dem Zenith gerichtet; und der positive Theil der Axe der $\mathfrak{Y}$ werde jetzt so angenommen, dass er mit dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{Y}'$ einen dem von den positiven Theilen der Axen der $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ eingeschlossenen spitzen Winkel gleichen spitzen Winkel einschliesst. Den, jenachdem der positive Theil der Axe der $\mathfrak{X}$ auf der positiven oder negativen Seite der Axe der $\mathfrak{X}'$ liegt, als positiv oder negativ betrachteten, von den positiven Theilen der Axen der $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ eingeschlossenen spitzen Winkel bezeichne man aber durch $H$. Dann hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten zwischen den Coordinaten der Systeme der $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'$ die folgenden allgemein gültigen Relationen:

$$159)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}' = \mathfrak{X}\cos H - \mathfrak{Y}\sin H, \\ \mathfrak{Y}' = \mathfrak{X}\sin H + \mathfrak{Y}\cos H \end{cases}$$

also, wie hieraus mittelst leichter Rechnung folgt:

$$160)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \mathfrak{X}'\cos H + \mathfrak{Y}'\sin H, \\ \mathfrak{Y} = -\mathfrak{X}'\sin H + \mathfrak{Y}'\cos H. \end{cases}$$

Also ist auch, wenn wir die Coordinaten des Mittelpunkts des beschriebenen Kreises in dem Systeme der $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'$ durch $P'$, $Q'$ bezeichnen:

$$161)\quad \begin{cases} P' = P\cos H - Q\sin H, \\ Q' = P\sin H + Q\cos H \end{cases}$$

und

$$162)\quad \begin{cases} P = P'\cos H + Q'\sin H, \\ Q = -P\sin H + Q'\cos H. \end{cases}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} - P &= (\mathfrak{X}' - P')\cos H + (\mathfrak{Y}' - Q')\sin H, \\ \mathfrak{Y} - Q &= -(\mathfrak{X}' - P')\sin H + (\mathfrak{Y}' - Q')\cos H; \end{aligned}$$

und die Gleichung der geraden Linie, durch welche die Lage der wirksamen Strahlen bestimmt wird, ist also nach 158)

$$-(\mathfrak{X}'-P')\sin H+(\mathfrak{Y}'-Q')\cos H-Y_{n+1}$$
$$=\{(\mathfrak{X}'-P')\cos H+(\mathfrak{Y}'-Q')\sin H-X_{n+1}\}\operatorname{tang}U'_{n+1}$$

oder

$$-(\mathfrak{X}'-P')(\sin H\cos U'_{n+1}+\cos H\sin U'_{n+1})$$
$$+(Y'-Q')(\cos H\cos U'_{n+1}-\sin H\sin U'_{n+1})$$
$$=-(X_{n+1}\sin U'_{n+1}-Y_{n+1}\cos U'_{n+1}),$$

d. i.

$$163)\ (\mathfrak{X}'-P')\sin(H+U'_{n+1})-(\mathfrak{Y}'-Q')\cos(H+U'_{n+1})$$
$$=X_{n+1}\sin U'_{n+1}-Y_{n+1}\cos U'_{n+1}.$$

Wenn nun das Auge des Beobachters überhaupt einen Regenbogen sehen soll, so muss die durch diese Gleichung charakterisirte gerade Linie durch das Auge des Beobachters oder den Anfang der $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'$ gehen, d. i. es muss gleichzeitig $\mathfrak{X}'=0$, $\mathfrak{Y}'=0$ sein, welches nach dem Vorhergehenden durch die Gleichung

$$164)\ P'\sin(H+U'_{n+1})-Q'\cos(H+U'_{n+1})$$
$$=-(X_{n+1}\sin U'_{n+1}-Y_{n+1}\cos U'_{n+1})$$

bedingt wird; und in der durch diese Gleichung, wenn man $P'$ und $Q'$ als die veränderlichen Coordinaten betrachtet, charakterisirten geraden Linie muss also der Mittelpunkt des Kreises liegen, welchen wir uns vorher mit einem der Einheit gleichen Halbmesser um den Mittelpunkt $(PQ)$ oder $(P'Q')$ in der Ebene der $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ oder $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'$ beschrieben gedacht haben. Diese Gleichung muss also nothwendig durch die Coordinaten $P'$, $Q'$ des Mittelpunkts des beschriebenen Kreises erfüllt angenommen werden, wenn das Auge des Beobachters einen Regenbogen sehen soll. Dann ist aber nach 163) und 164) die Gleichung der geraden Linie, durch welche die Lage der wirksamen Strahlen bestimmt wird,

$$165)\ \mathfrak{X}'\sin(H+U'_{n+1})-\mathfrak{Y}'\cos(H+U'_{n+1})=0$$

oder

$$166)\ \mathfrak{Y}'=\mathfrak{X}'\operatorname{tang}(H+U'_{n+1}).$$

Soll aber das Auge des Beobachters einen Regenbogen wirklich erblicken, so ist, wie leicht erhellen wird, nicht bloss hinreichend, dass die Coordinaten $P'$, $Q'$ des Mittelpunkts des beschriebenen Kreises der Gleichung 164) genügen, wodurch nur bedingt wird, dass das Auge in der durch diese Gleichung charakterisirten geraden Linie liege, sondern es ist ausserdem unbedingt nothwen-

dig, dass das Auge von den als von dem Punkte $(X_{n+1}, Y_{n+1})$, wo die Coordinaten $X_{n+1}$, $Y_{n+1}$ bekanntlich dem Systeme der $xy$ angehören, ausgehend gedachten wirksamen Strahlen getroffen werde, und es liegt uns also noch ob, auch diese Bedingung auf einen analytischen Ausdruck zu bringen.

Nun wird man sich aber durch eine einfache geometrische Betrachtung, bei der man sich nur zu erinnern hat, dass $P + X_{n+1}$, $Q + Y_{n+1}$ die Coordinaten des in dem Systeme der $xy$ durch $X_{n+1}$, $Y_{n+1}$ bestimmten Punktes in dem Systeme der $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ sind, ohne Schwierigkeit überzeugen, dass zur Erfüllung der vorhergehenden Bedingung nothwendig erforderlich ist, dass Folgendes Statt finde, wobei wir nun immer die Gleichung 164) als erfüllt voraussetzen, was kaum noch einer besonderen Bemerkung bedarf. Wenn $P + X_{n+1}$ positiv, $Q + Y_{n+1}$ positiv ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $U'_{n+1}$ zwischen 180° und 270° liegt, d. h. dadurch, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist; wenn $P + X_{n+1}$ negativ, $Q + Y_{n+1}$ positiv ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $U'_{n+1}$ zwischen 270° und 360° liegt, d. h. dadurch, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist; wenn $P + X_{n+1}$ positiv, $Q + Y_{n+1}$ negativ ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $U'_{n+1}$ zwischen 90° und 180° liegt, d. h. dadurch, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist; wenn $P + X_{n+1}$ negativ, $Q + Y_{n+1}$ negativ ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $U'_{n+1}$ zwischen 0 und 90° liegt, d. h. dadurch, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist.

Weil man aber im vorliegenden Falle den Halbmesser des beschriebenen Kreises im Verhältniss zu den absoluten Werthen der Coordinaten $P$, $Q$ offenbar immer so klein anzunehmen berechtigt ist, dass $P$, $Q$ respective mit $P + X_{n+1}$, $Q + Y_{n+1}$ gleiche Vorzeichen haben, so lassen sich die obigen Kriterien auch auf den folgenden Ausdruck bringen.

Wenn $P$ positiv, $Q$ positiv ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist; wenn $P$ negativ, $Q$ positiv ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist; wenn $P$ positiv, $Q$ negativ ist; so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist; wenn $P$ negativ, $Q$ negativ ist, so wird die Entstehung eines Re-

genbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist.

Nach dem Obigen haben wir die Gleichungen

$$P = \quad P' \cos H + Q' \sin H,$$
$$Q = - P' \sin H + Q' \cos H.$$

Betrachten wir nun zuerst den Fall, wenn $H$ positiv ist.

Wenn $Q'$ positiv und $P'$ positiv ist, so ist $P$ positiv, und $Q$ ist positiv oder negativ, jenachdem

$$Q' \cos H > P' \sin H \text{ oder } Q' \cos H < P' \sin H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} > \tang H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} < \tang H$$

ist.

Wenn $Q'$ positiv und $P'$ negativ ist, so ist $Q$ positiv, und $P$ ist positiv oder negativ, jenachdem

$$Q' \sin H > - P' \cos H \text{ oder } Q' \sin H < - P' \cos H,$$

d. h. jenachdem

$$-\frac{Q'}{P'} > \cot H \text{ oder } -\frac{Q'}{P'} < \cot H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} < - \cot H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} > - \cot H$$

ist.

Wenn $Q'$ negativ und $P'$ positiv ist, so ist $Q$ negativ, und $P$ ist positiv oder negativ, jenachdem

$$- Q' \sin H < P' \cos H \text{ oder } - Q' \sin H > P' \cos H,$$

d. h. jenachdem

$$-\frac{Q'}{P'} < \cot H \text{ oder } -\frac{Q'}{P'} > \cot H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} > - \cot H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} < - \cot H$$

ist.

Wenn $Q'$ negativ und $P'$ negativ ist, so ist $P$ negativ, und $Q$ ist positiv oder negativ, jenachdem

$$- Q' \cos H < - P' \sin H \text{ oder } - Q' \cos H > - P' \sin H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} < tang\,H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} > tang\,H$$

ist.

Also kann man die obigen Kriterien auch auf den folgenden Ausdruck bringen.

Wenn $Q'$ positiv, $P'$ positiv und

$$\frac{Q'}{P'} > tang\,H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist.

Wenn $Q'$ positiv, $P'$ positiv und

$$\frac{Q'}{P'} < tang\,H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist.

Wenn $Q'$ positiv, $P'$ negativ und

$$\frac{Q'}{P'} < -\cot H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist.

Wenn $Q'$ positiv, $P'$ negativ und

$$\frac{Q'}{P'} > -\cot H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist.

Wenn $Q'$ negativ, $P'$ positiv und

$$\frac{Q'}{P'} > -\cot H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist.

Wenn $Q'$ negativ, $P'$ positiv und

$$\frac{Q'}{P'} < -\cot H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, das $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist.

Wenn $Q'$ negativ, $P'$ negativ und

$$\frac{Q'}{P'} < tang\,H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist.

Wenn $Q'$ negativ, $P'$ negativ und

$$\frac{Q'}{P'} > \operatorname{tang} H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist.

Wegen der Gleichung 164) ist aber

$$\frac{Q'}{P'} = \operatorname{tang}(H + U'_{n+1}) + \frac{X_{n+1} \sin U'_{n+1} - Y_{n+1} \cos U'_{n+1}}{P' \cos(H + U'_{n+1})},$$

und man wird also, weil im vorliegenden Falle der absolute Werth von

$$\frac{X_{n+1} \sin U'_{n+1} - Y_{n+1} \cos U'_{n+1}}{P' \cos(H + U'_{n+1})}$$

immer eine sehr kleine Grösse ist, im Vorhergehenden statt $\frac{Q'}{P'}$ überall unbedenklich $\operatorname{tang}(H + U'_{n+1})$ setzen können.

Die Bedingung

$$\operatorname{tang}(H + U'_{n+1}) \gtrless \operatorname{tang} H$$

ist jedoch einerlei mit der Bedingung

$$\operatorname{tang}(H + U'_{n+1}) - \operatorname{tang} H \gtrless 0,$$

d. i. mit der Bedingung

$$\frac{\sin U'_{n+1}}{\cos H \cos(H + U'_{n+1})} \gtrless 0,$$

wo dem obern Zeichen die Bedingung, dass

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, dem untern Zeichen die Bedingung, dass

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, entspricht.

Die Bedingung

$$\operatorname{tang}(H + U'_{n+1}) \gtrless -\cot H$$

ist einerlei mit der Bedingung

$$\operatorname{tang}(H + U'_{n+1}) + \cot H \gtrless 0,$$

d. i. mit der Bedingung

$$\frac{\cos U'_{n+1}}{\sin H \cos(H + U'_{n+1})} \gtrless 0,$$

wo dem obern Zeichen die Bedingung, dass

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, dem untern Zeichen die Bedingung, dass

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, entspricht.

Also lassen sich die obigen Kriterien nun auch auf den folgenden sehr bequemen Ausdruck bringen.

Wenn $Q'$ positiv, $P'$ positiv ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist.

Wenn $Q'$ positiv, $P'$ positiv ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist.

Wenn $Q'$ positiv, $P'$ negativ ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist.

Wenn $Q'$ positiv, $P'$ negativ ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist.

Wenn $Q'$ negativ, $P'$ positiv ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist.

Wenn $Q'$ negativ, $P'$ positiv ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regen-

bogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist.

Wenn $Q'$ negativ, $P'$ negativ ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist.

Wenn $Q'$ negativ, $P'$ negativ ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist.

Betrachten wir ferner auf ganz ähnliche Art den Fall, wenn $H$ negativ ist.

Wenn $Q'$ positiv und $P'$ positiv ist, so ist $Q$ positiv, und $P$ ist positiv oder negativ, jenachdem

$$-Q' \sin H < P' \cos H \text{ oder } -Q' \sin H > P' \cos H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} < -\cot H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} > -\cot H$$

ist.

Wenn $Q'$ positiv und $P'$ negativ ist, so ist $P$ negativ und $Q$ ist positiv oder negativ, jenachdem

$$Q' \cos H > P' \sin H \text{ oder } Q' \cos H < P' \sin H,$$

d. h. jenachdem

$$-\frac{Q'}{P'} > -\tang H \text{ oder } -\frac{Q'}{P'} < -\tang H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} < \tang H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} > \tang H$$

ist.

Wenn $Q'$ negativ und $P'$ positiv ist, so ist $P$ positiv, und $Q$ ist positiv oder negativ, jenachdem

$$-Q' \cos H < -P' \sin H \text{ oder } -Q' \cos H > -P' \sin H,$$

d. h. jenachdem

$$-\frac{Q'}{P'} < -\tang H \text{ oder } -\frac{Q'}{P'} > -\tang H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} < tang\, H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} < tang\, H$$

ist.

Wenn $Q'$ negativ und $P'$ negativ ist, so ist $Q$ negativ, und $P$ ist positiv oder negativ, jenachdem

$$Q' \sin H > - P' \cos H \text{ oder } Q' \sin H < - P' \cos H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} > - \cot H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} < - \cot H$$

ist.

Hieraus ergeben sich auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Falle die folgenden Kriterien.

Wenn $Q'$ positiv, $P'$ positiv ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist.

Wenn $Q'$ positiv, $P'$ positiv ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist.

Wenn $Q'$ positiv, $P'$ negativ ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist.

Wenn $Q'$ positiv, $P'$ negativ ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist.

Wenn $Q'$ negativ, $P'$ positiv ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbo-

gens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ ist.

Wenn $Q'$ negativ, $P'$ positiv ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist.

Wenn $Q'$ negativ, $P'$ negativ ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist.

Wenn $Q'$ negativ, $P'$ negativ ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ positiv ist.

Dass die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tang(H + U'_{n+1}) + \frac{X_{n+1} \sin U'_{n+1} - Y_{n+1} \cos U'_{n+1}}{P' \cos(H + U'_{n+1})},$$

für welche näherungsweise die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tang(H + U'_{n+1})$$

gesetzt werden darf, erfüllt sei, wird bei dem Vorhergehenden, wie schon oben erinnert worden ist, stets vorausgesetzt.

Die Gleichung der geraden Linie, durch welche die Lage der wirksamen Strahlen bestimmt wird, war nach dem Obigen

$$\mathfrak{Y}' = \mathfrak{X}' \tang(H + U'_{n+1}).$$

Bezeichnen wir aber durch

$$\overset{1}{U}'_{n+1}, \quad \overset{2}{U}'_{n+1}, \quad \overset{3}{U}'_{n+1}, \quad \overset{4}{U}'_{n+1}, \quad \overset{5}{U}'_{n+1}, \quad \overset{6}{U}'_{n+1}, \quad \overset{7}{U}'_{n+1}$$

die den sieben farbigen Strahlen, aus denen jeder weisse Lichtstrahl zusammengesetzt ist, entsprechenden Werthe des Winkels $U'_{n+1}$, so entsprechen den wirksamen Strahlen für diese sieben farbigen Strahlen die folgenden Gleichungen:

$$167)\begin{cases} \mathfrak{Y}' = \mathfrak{X}' \, tang\,(H + \overset{1}{U}'_{n+1}), \\ \mathfrak{Y}' = \mathfrak{X}' \, tang\,(H + \overset{2}{U}'_{n+1}), \\ \mathfrak{Y}' = \mathfrak{X}' \, tang\,(H + \overset{3}{U}'_{n+1}), \\ \mathfrak{Y}' = \mathfrak{X}' \, tang\,(H + \overset{4}{U}'_{n+1}), \\ \mathfrak{Y}' = \mathfrak{X}' \, tang\,(H + \overset{5}{U}'_{n+1}), \\ \mathfrak{Y}' = \mathfrak{X}' \, tang\,(H + \overset{6}{U}'_{n+1}), \\ \mathfrak{Y}' = \mathfrak{X}' \, tang\,(H + \overset{7}{U}'_{n+1}). \end{cases}$$

Ist der leuchtende Körper die Sonne, $H$ ihre positive oder negative Höhe über oder unter dem Horizonte, und $D$ ihr scheinbarer Halbmesser, so hat man für die äussersten wirksamen Strahlen die Gleichung

$$168)\quad \mathfrak{Y}' = \mathfrak{X}' \, tang\,(H \pm D + U'_{n+1}),$$

wo in allen Fällen das obere Zeichen dem obern, das untere Zeichen dem untern Sonnenrande entspricht, wobei man unter dem obern und untern Sonnenrande jederzeit den Sonnenrand zu verstehen hat, welcher (nicht absolut genommen) respective die grösste und kleinste Höhe hat.

Wie man durch Drehung der Vertikalebene, in welcher die ganze vorhergehende Betrachtung angestellt worden ist, um die durch das Auge den parallel einfallenden Strahlen parallel gelegte gerade Linie, wie um eine Axe, den ganzen Bogen erhalten kann, ist eine so einfache Vorstellung und eine schon so oft angestellte Betrachtung, dass es kaum erforderlich sein dürfte, derselben hier nur Erwähnung zu thun.

## §. 30.

Wir wollen nun zuerst den Fall etwas ausführlicher betrachten, wenn $\cos U'_{n+1}$ positiv ist *).

In diesem Falle hat $U'_{n+1}$ einen zwischen 0 und 90°, und einen zwischen 270° und 360° liegenden Werth. Diese beiden Wer-

*) Dieser Fall tritt, wie die Formeln 95) leicht ergeben, z. B. dann ein, wenn $n = 1$ ist, und die Strahlen aus Luft in Wasser übergehen, d. h. wenn $\mu = 0{,}749$ gesetzt wird. Dasselbe gilt unter dieser Voraussetzung nach den Formeln 105) auch für $n = 2$.

the von $U'_{n+1}$ wollen wir durch $W$ und $W'$ bezeichnen, so dass also

$$0 < W < 90^0,$$
$$270^0 < W' < 360^0$$

und, wie sich von selbst versteht,

$$W + W' = 360^0$$

ist.

Zuerst werde $H$ als positiv angenommen.

In diesem Falle ist offenbar entweder

$$0 < H + W < 90^0$$

oder

$$90^0 < H + W < 180^0,$$

und entweder

$$270^0 < H + W' < 360^0$$

oder

$$360^0 < H + W' < 450^0.$$

Es sei $Q'$ positiv, $P'$ positiv.

Da in diesem Falle nach dem vorhergehenden Paragraphen $\cos U'_{n+1}$ negativ sein muss, nach der Voraussetzung aber $\cos U'_{n+1}$ positiv ist, so kann in demselben kein Regenbogen entstehen.

Es sei $Q'$ positiv, $P'$ negativ.

Für

$$0 < H + W < 90^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$90^0 < H + W < 180^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$270^0 < H + W' < 360^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Beide Bedingungen sind erfüllt, und die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = tang(H + U'_{n+1})$$

enthält auch keinen Widerspruch. Also entsteht ein Regenbogen. Statt der obigen Bedingung kann man

$$270^0 - W' < H < 360^0 - W'$$

setzen. Weil aber $H$ positiv, $270^0 - W'$ negativ ist, so ist die Bedingung

$$270^0 - W' < H$$

jederzeit erfüllt, und es bleibt also bloss die Bedingung

$$H < 360^0 - W',$$

d. i. nach dem Obigen die Bedingung

$$H < W.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$360^0 < H + W' < 450^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $cos\, U'_{n+1}$ und $cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $cos\, U'_{n+1}$ positiv, $sin\, U'_{n+1}$ negativ sein. Obgleich diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = tang(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch, da die Grösse links negativ, die Grösse rechts positiv ist. Also entsteht kein Regenbogen.

Es sei $Q'$ negativ, $P'$ positiv.

Für

$$0 < H + W < 90^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $cos\, U'_{n+1}$ und $cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $cos\, U'_{n+1}$ negativ, $sin\, U'_{n+1}$ negativ sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$90^0 < H + W < 180^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $cos\, U'_{n+1}$ und $cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $cos\, U'_{n+1}$ positiv, $sin\, U'_{n+1}$ positiv sein. Da diese beiden Bedingungen erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = tang(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch auf die Form

$$90^0 - W < H < 180^0 - W$$

bringen. Da aber die Bedingung

$$H < 180^0 - W$$

offenbar immer erfüllt ist, so bleibt nur die Bedingung

$$H > 90^0 - W.$$

Wenn also diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$270^0 < H + W' < 360^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da die erste Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$360^0 < H + W' < 450^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da die erste Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Es sei $Q'$ negativ, $P'$ negativ.

Für

$$0 < H + W < 90^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\sin U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ positiv sein. Da diese beiden Bedingungen erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tang(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch auf die Form

$$-W < H < 90^0 - W$$

bringen. Da die Bedingung

$$-W < H$$

immer erfüllt ist, so bleibt nur die Bedingung

$$H < 90^0 - W.$$

Wenn also diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$90^0 < H + W < 180^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\sin U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U_{n+1}$ negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$270^0 < H + W' < 360^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\sin U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Obgleich diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = tang(H + U'_{n+1})$$

einen Widerspruch. Also entsteht kein Regenbogen.

Für

$$360^0 < H + W' < 450^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\sin U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da diese beiden Bedingungen erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = tang(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entseht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch auf die Form

$$360^0 - W' < H < 450^0 - W'$$

bringen. Die Bedingung

$$H < 450^0 - W'$$

ist aber immer erfüllt. Also bleibt nur die Bedingung

$$H > 360^0 - W',$$

d. h. die Bedingung

$$H > 360^0 - (360^0 - W),$$

oder die Bedingung

$$H > W.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Es bleiben also, wenn $\cos U_{n+1}$ positiv und $H$ positiv ist, nur die vier folgenden Fälle übrig, wo ein Regenbogen entsteht:

$Q'$ positiv, $P'$ negativ, $H < W$;
$Q'$ negativ, $P'$ positiv, $H > 90^0 - W$;
$Q'$ negativ, $P'$ negativ, $H < 90^0 - W$;
$Q'$ negativ, $P'$ negativ, $H > W$.

Ferner werde $H$ als negativ angenommen.

In diesem Falle ist offenbar entweder

$$-90^0 < H + W < 0$$

oder

$$0 < H + W < 90^0,$$

und

$$180^0 < H + W' < 270^0$$

oder

$$270^0 < H + W' < 360.$$

Es sei $Q'$ positiv, $P'$ positiv.

Für

$$-90^0 < H + W < 0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$0 < H + W < 90^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^0 < H + W' < 270^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negasein. Da die erste Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$270^0 < H + W' < 360^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Obgleich diese Bedingungen beide erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = tang(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch, und es entsteht also kein Regenbogen.

Es sei $Q'$ positiv, $P'$ negativ.

Für

$$-90^0 < H + W < 0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $sin\, U'_{n+1}$ und $cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $cos\, U'_{n+1}$ positiv, $sin\, U'_{n+1}$ positiv sein. Da diese Bedingungen beide erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = tang(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung kann man auch auf die Form

$$-90^0 - W < H < -W$$

bringen. Da die Bedingung

$$-90^0 - W < H$$

immer erfüllt ist, so bleibt nur die Bedingung

$$H < -W.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$0 < H + W < 90^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $sin\, U'_{n+1}$ und $cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $cos\, U'_{n+1}$ positiv, $sin\, U'_{n+1}$ positiv sein. Obgleich diese Bedingungen beide erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = tang(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch, und es entsteht also kein Regenbogen.

Für

$$180^0 < H + W' < 270^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $sin\, U'_{n+1}$ und $cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $cos\, U'_{n+1}$ positiv, $sin\, U'_{n+1}$ positiv sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$270^0 < H + W' < 360^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $sin\, U'_{n+1}$ und $cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $cos\, U'_{n+1}$ positiv, $sin\, U'_{n+1}$ negativ

sein. Da diese Bedingungen beide erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = tang(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch auf die Form

$$270^0 - W' < H < 360^0 - W'$$

bringen. Da die Bedingung

$$H < 360^0 - W'$$

immer erfüllt ist, so bleibt nur die Bedingung

$$H > 270^0 - W',$$

d. h. die Bedingung

$$H > 270^0 - (360^0 - W),$$

oder die Bedingung

$$H > W - 90^0.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Es sei $Q'$ negativ, $P'$ positiv.

Da in diesem Falle nach dem vorhergehenden Paragraphen $cos\,U'_{n+1}$ negativ sein muss, nach der Voraussetzung aber $cos\,U'_{n+1}$ positiv ist, so kann kein Regenbogen entstehen.

Es sei $Q'$ negativ, $P'$ negativ.

Für

$$-90^0 < H + W < 0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $cos\,U'_{n+1}$ und $cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $cos\,U'_{n+1}$ negativ, $sin\,U'_{n+1}$ positiv sein. Da die erste Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$0 < H + W < 90^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $cos\,U'_{n+1}$ und $cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $cos\,U'_{n+1}$ negativ, $sin\,U'_{n+1}$ positiv sein. Da die erste Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^0 < H + W' < 270^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $cos\,U'_{n+1}$ und $cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $cos\,U'_{n+1}$ positiv, $sin\,U'_{n+1}$ positiv sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$270^0 < H + W' < 360^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Es bleiben also, wenn $\cos U'_{n+1}$ positiv und $H$ negativ ist, nur die zwei folgenden Fälle übrig, wo ein Regenbogen entsteht:

$$Q' \text{ positiv}, \; P' \text{ negativ}, \; H < -W;$$
$$Q' \text{ positiv}, \; P' \text{ negativ}, \; H > W - 90^0.$$

§. 31.

Auf ähnliche Art wie vorher wollen wir ferner den Fall betrachten, wenn $\cos U'_{n+1}$ negativ ist.

In diesem Falle hat $U'_{n+1}$ einen zwischen $90^0$ und $180^0$, und einen zwischen $180^0$ und $270^0$ liegenden Werth. Diese beiden Werthe von $U'_{n+1}$ wollen wir wieder respective durch $W$ und $W'$ bezeichnen, so dass also

$$90^0 < W < 180^0,$$
$$180^0 < W' < 270^0$$

und, wie sich von selbst versteht,

$$W + W' = 360^0$$

ist.

Zuerst werde $H$ als positiv angenommen.

In diesem Falle ist offenbar entweder

$$90^0 < H + W < 180^0$$

oder

$$180^0 < H + W < 270^0,$$

und entweder

$$180^0 < H + W' < 270^0$$

oder

$$270^0 < H + W' < 360^0.$$

Es sei $Q'$ positiv, $P'$ positiv.

Für

$$90^0 < H + W < 180^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\sin U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv sein.

Obgleich diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = tang(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch, und es entsteht also kein Regenbogen.

Für

$$180^0 < H + W < 270^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $sin\,U'_{n+1}$ und $cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $cos\,U'_{n+1}$ negativ, $sin\,U'_{n+1}$ positiv sein. Da diese Bedingungen beide erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = tang\,(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch auf die Form

$$180^0 - W < H < 270^0 - W$$

bringen. Die Bedingung

$$H < 270^0 - W$$

ist immer erfüllt. Also bleibt nur die Bedingung

$$H < 180^0 - W.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$180^0 < H + W' < 270^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $sin\,U'_{n+1}$ und $cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $cos\,U'_{n+1}$ negativ, $sin\,U'_{n+1}$ negativ sein. Da diese Bedingungen beide erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = tang(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch unter der Form

$$180^0 - W' < H < 270^0 - W$$

darstellen. Die Bedingung

$$H < 180^0 - W'$$

ist immer erfüllt. Also bleibt nur die Bedingung

$$H < 270^0 - W',$$

d. h. die Bedingung

$$H < 270^0 - (360^0 - W),$$

oder die Bedingung

$$H < W - 90^0.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$270^0 < H + W' < 360^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\sin U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Es sei $Q'$ positiv, $P'$ negativ.

Für

$$90^0 < H + W < 180^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^0 < H + W < 270^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^0 < H + W' < 270^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da die erste dieser beiden Bedingungen nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$270^0 < H + W' < 360^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da diese beiden Bedingungen erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \operatorname{tang}(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch auf die Form

$$270^0 - W' < H < 360^0 - W'$$

bringen. Da die Bedingung

$$H < 360^0 - W'$$

immer erfüllt ist, so bleibt nur die Bedingung

$$H < 270^0 - W',$$

d. h. die Bedingung

$$H < 270^0 - (360^0 - W),$$

oder die Bedingung

$$H < W - 90^0.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Es sei $Q'$ negativ, $P'$ positiv.

Für

$$90^0 < H + W < 180^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^0 < H + W < 270^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^0 < H + W' < 270^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Obgleich diese Bedingungen beide erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tang(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch. Also entsteht kein Regenbogen.

Für

$$270^0 < H + W' < 360^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ positiv sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Es sei $Q'$ negativ, $P'$ negativ.

Da in diesem Falle nach dem vorhergehenden Paragraphen

$\cos U'_{n+1}$ positiv sein muss, nach der Voraussetzung aber $\cos U'_{n+1}$ negativ ist, so kann in demselben kein Regenbogen entstehen.

Es bleiben also, wenn $\cos U'_{n+1}$ negativ und $H$ positiv ist, nur die drei folgenden Fälle übrig, wo ein Regenbogen entsteht:

$Q'$ positiv, $P'$ positiv, $H > 180^0 - W$;
$Q'$ positiv, $P'$ positiv, $H < W - 90^0$;
$Q'$ positiv, $P'$ negativ, $H > W - 90^0$.

Ferner werde $H$ als negativ angenommen.

In diesem Falle ist offenbar entweder

$$0 < H + W < 90^0$$

oder

$$90^0 < H + W < 180^0,$$

und entweder

$$90^0 < H + W' < 180^0$$

oder

$$180^0 < H + W' < 270^0.$$

Es sei $Q'$ positiv, $P'$ positiv.

Für

$$0 < H + W < 90^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos (H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$90^0 < H + W < 180^0$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos (H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$90^0 < H + W' < 180^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos (H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da die erste dieser beiden Bedingungen nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^0 < H + W' < 270^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos (H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein.

Da die erste dieser beiden Bedingungen nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Es sei $Q'$ positiv, $P'$ negativ.

Da in diesem Falle nach dem vorhergehenden Paragraphen $\cos U'_{n+1}$ positiv sein muss, nach der Voraussetzung aber $\cos U'_{n+1}$ negativ ist, so entsteht in demselben kein Regenbogen.

Es sei $Q'$ negativ, $P'$ positiv.

Für

$$0 < H + W < 90^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\sin U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$90^0 < H + W < 180^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\sin U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv sein. Da diese Bedingungen beide erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \operatorname{tang}(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung kann auch auf die Form

$$90^0 - W < H < 180^0 - W$$

gebracht werden. Die Bedingung

$$H < 180^0 - W$$

ist immer erfüllt. Also bleibt nur die Bedingung

$$H > 90^0 - W.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$90^0 < H + W' < 180^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\sin U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Da diese Bedingungen beide erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \operatorname{tang}(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung kann auch auf die Form

$$90^0 - W' < H < 180^0 - W'$$

gebracht werden. Die Bedingung

$$H > 90^0 - W'$$

ist immer erfüllt. Also bleibt nur die Bedingung

$$H < 180^0 - W',$$

d. h. die Bedingung

$$H < 180^0 - (360^0 - W),$$

oder die Bedingung

$$H < W - 180^0.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$180^0 < H + W' < 270^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\sin U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ negativ sein. Obgleich diese Bedingungen beide erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan g(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch, und es entsteht also kein Regenbogen.

Es sei $Q'$ negativ, $P'$ negativ.

Für

$$0 < H + W < 90^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ ungleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ positiv, $\sin U'_{n+1}$ positiv sein. Da die erste Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$90^0 < H + W < 180^0,$$

wo $U'_{n+1} = W$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv sein. Obgleich diese Bedingungen beide erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan g(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch, und es entsteht also kein Regenbogen.

Für

9*

$$90^0 < H + W' < 180^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^0 < H + W' < 270^0,$$

wo $U'_{n+1} = W'$ ist, haben $\cos U'_{n+1}$ und $\cos(H + U'_{n+1})$ gleiche Vorzeichen. Also muss $\cos U'_{n+1}$ negativ, $\sin U'_{n+1}$ positiv sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Es bleiben also, wenn $\cos U'_{n+1}$ negativ und $H$ negativ ist, nur die zwei folgenden Fälle übrig, wo ein Regenbogen entsteht:

$Q'$ negativ, $P'$ positiv, $H > 90^0 - W$;
$Q'$ negativ, $P'$ positiv, $H < W' - 180^0$.

## §. 32.

Bevor wir in der Theorie des Regenbogens weiter fortschreiten, wollen wir grösserer Deutlichkeit wegen zuvörderst eine kurze Entwickelung der Hauptmomente der physischen Theorie der Brechung des Lichts einschalten, weil wir dieselbe im Folgenden gebrauchen werden, bemerken aber, dass wir uns bei der Entwickelung dieser Theorie hier absichtlich den älteren Ansichten anschliessen werden.

Die bekanntesten Erfahrungen über die Brechung des Lichts bieten uns ein hinreichend sicheres Fundament dar, auf welchem wir die Theorie der Refraction aufführen können, weshalb wir auch die Sätze, welche unserer ganzen folgenden Untersuchung zur hauptsächlichsten Grundlage dienen werden, jetzt zuerst zusammenstellen wollen.

Zuvörderst führt uns die Erfahrung, dass ein Lichtstrahl, welcher aus einem dünneren in einen dichteren durchsichtigen Körper, oder aus dem leeren Raume in einen durchsichtigen Körper von beliebiger Dichtigkeit übergeht, in letzterem jederzeit nach dem Einfallslothe hin gebrochen wird, unmittelbar auf die Annahme einer anziehenden Kraft, mit welcher die durchsichtigen Körper auf die durch sie hindurch gehenden Lichttheilchen wirken.

Diese Kraft kann aber nur an der Oberfläche der durchsichtigen Körper, oder wenigstens bloss in äusserst geringen Entfernun-

gen von derselben wirksam sein, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, der Lichtstrahl nicht vor und nach der Brechung eine gerade Linie bilden könnte, sondern schon in merklichen Entfernungen von derselben gekrümmt erscheinen müsste, was bekanntlich der Erfahrung gänzlich widerspricht.

Weil endlich Strahlen, welche die brechende Fläche unter rechten Winkeln treffen, bekanntlich gar keine Brechung erleiden, so muss offenbar die Kraft, mit welcher die durchsichtigen Körper die Lichttheilchen anziehen, immer bloss nach einer auf ihrer Oberfläche senkrechten Richtung wirken.

Auf dem von diesen Sätzen uns dargebotenen Fundamente wollen wir nun mit Hülfe analytischer Betrachtungen die physikalische Theorie der Refraction aufführen.

Zu dem Ende denken wir uns zuerst ein Lichttheilchen, welches, aus dem leeren Raume kommend, nach einer auf der Oberfläche eines durchsichtigen Körpers oder sogenannten brechenden Mediums senkrechten Richtung in dieses brechende Medium übergeht, und bezeichnen die Entfernung des leuchtenden Punktes, welcher das Lichttheilchen aussendete, von der Oberfläche des brechenden Mediums durch $a$.

Befindet sich nun, wie wir zuerst annehmen wollen, das Lichttheilchen noch ausserhalb des brechenden Mediums, so sei $x$ seine der seit dem Momente seines Ausgangs von dem leuchtenden Punkte verflossenen Zeit $t$ entsprechende Entfernung von der Oberfläche des brechenden Mediums, und $s$ sei der von dem Lichttheilchen in der Zeit $t$ zurückgelegte Weg. Ist dann $\varphi$ die der Entfernung $x$ entsprechende Intensität der Kraft, mit welcher das Lichttheilchen von dem brechenden Medium angezogen wird, so ist bekanntlich nach den Principien der Mechanik:

$$169)\quad \varphi = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Weil aber offenbar $s = a - x$, und folglich

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

ist, so ist

$$170)\quad \varphi = -\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

Dass die, gleichen Entfernungen entsprechenden anziehenden Kräfte verschiedener brechender Media sich wie deren Dichtigkeiten

verhalten müssen, erhellet auf der Stelle, wenn man nur überlegt, dass ein brechendes Medium, welches, indem $n$ eine positive ganze Zahl bezeichnet, $n$ Mal so dicht ist als ein anderes, wie ein System von $n$ brechenden Medien von des letzteren Dichtigkeit, die sich gegenseitig durchdrungen haben, betrachtet werden kann, und dass diese $n$ Media in derselben Entfernung offenbar eine $n$ Mal so grosse Attraction wie das Medium von der einfachen Dichtigkeit auf das Lichttheilchen ausüben werden. Bezeichnen wir daher die Dichtigkeit unsers obigen brechenden Mediums, welches in der Entfernung $x$ die anziehende Kraft $\varphi$ ausübt, durch $D$, die der Entfernung $x$ entsprechende anziehende Kraft eines brechenden Mediums, dessen Dichtigkeit als Einheit der Dichtigkeiten angenommen wird, aber durch $F(x)$; so ist

$$171)\quad \varphi = DF(x),$$

und folglich nach dem Obigen

$$172)\quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -DF(x).$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung mit $\partial x$, und integrirt dann, so erhält man, weil $D$, als die Dichtigkeit eines bestimmten brechenden Mediums, offenbar als constant betrachtet werden muss, wenn $A$ eine willkührliche Constante bezeichnet,

$$173)\quad \int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial x = A - D\int F(x)\,\partial x.$$

Durch theilweise Integration ergiebt sich aber leicht

$$\int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial x = \int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial t}\partial t$$

$$= \frac{\partial x}{\partial t}\int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial t - \int \partial\frac{\partial x}{\partial t}\int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial t$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 - \int \frac{\partial x}{\partial t}\partial\frac{\partial x}{\partial t}$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 - {}^1\!/_2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2,$$

d. i.

$$\int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial x = {}^1\!/_2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2,$$

und folglich nach dem Obigen, wenn wir der Kürze wegen $2A = C$ setzen:

$$174)\quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = C - 2D\int F(x)\,\partial x.$$

Ist nun $v$ die der Entfernung $x$ entsprechende Geschwindigkeit des Lichttheilchens, so ist nach den Principien der Mechanik bekanntlich

$$175)\quad v = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial(a-x)}{\partial t} = -\frac{\partial x}{\partial t},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$176)\quad v^2 = C - 2D\int F(x)\,\partial x,$$

oder, wenn wir überhaupt

$$177)\quad f(x) = \int F(x)\,\partial x$$

setzen:

$$178)\quad v^2 = C - 2Df(x).$$

Im leeren Raume wird sich das Lichttheilchen in einer merklichen Entfernung von der Oberfläche des brechenden Mediums mit einer gewissen Geschwindigkeit, die wir durch $w$ bezeichnen wollen, gleichförmig bewegen, weil, wie wir aus dem Obigen wissen, die Attraction des brechenden Mediums nur in ganz unmerklichen Entfernungen von seiner Oberfläche auf das Licht wirkt, und es ist also nach der Gleichung 178) offenbar

$$179)\quad w^2 = C - 2Df(\infty).$$

Ist ferner $V$ die bei dem Eintritte in das brechende Medium, d. i. für $x = 0$, erlangte Geschwindigkeit des Lichttheilchens, so ist nach der Gleichung 178)

$$180)\quad V^2 = C - 2Df(0),$$

und folglich nach den beiden vorhergehenden Gleichungen

$$181)\quad V^2 - w^2 = 2D\{f(\infty) - f(0)\}.$$

Weil nun aber nach 177)

$$f(\infty) - f(0) = \int_0^\infty F(x)\,\partial x$$

ist, so ist

$$182)\quad V^2 - w^2 = 2D\int_0^\infty F(x)\,\partial x.$$

Nach dem Obigen bezeichnet $F(x)$ die Intensität der anziehenden Kraft eines brechenden Mediums, dessen Dichtigkeit als Einheit der Dichtigkeiten angenommen worden ist, in der Entfernung $x$ von seiner Oberfläche, und es ist also offenbar

$$\int_0^\infty F(x)\,\partial x = f(\infty) - f(0)$$

für alle brechende Media eine constante Grösse, welche wir, da

dieselbe, weil $D$ und $V^2 - w^2$ offenbar positive Grössen sind, augenscheinlich ebenfalls positiv sein muss, durch $k^2$ bezeichnen wollen, so dass also nun die Gleichung 182) die Gestalt

$$183) \quad V^2 - w^2 = 2k^2 D$$

erhält.

Ferner denke man sich jetzt, dass das Lichttheilchen bis zur Tiefe $x$ in das brechende Medium eingedrungen sei, bezeichne die von dem Momente des Ausgangs des Lichttheilchens von dem leuchtenden Punkte an gerechnete Zeit, wo das Lichttheilchen diese Tiefe erreicht, wieder durch $t$, den ganzen von dem Lichttheilchen in dieser Zeit zurückgelegten Weg durch $s$, und die der Tiefe $x$ entsprechende Intensität der Kraft, mit welcher das Lichttheilchen von dem brechenden Medium angezogen wird, durch $\varphi$; so ist nach den Principien der Mechanik wieder:

$$184) \quad \varphi = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2},$$

und folglich, weil offenbar $s = a + x$, also

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

ist:

$$185) \quad \varphi = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

Nun ist aber klar, dass die bis zur Tiefe $2x$ unter der Oberfläche liegenden Theilchen des brechenden Mediums gar keine Wirkung auf den Lichtpunkt ausüben, oder vielmehr, dass die anziehenden Kräfte, mit denen die oberhalb und unterhalb des Lichtpunkts liegenden Theile des brechenden Mediums auf denselben wirken, sich gegenseitig aufheben, und daher als überhaupt nicht vorhanden betrachtet werden können. Also wird das Lichttheilchen von den anziehenden Kräften des brechenden Mediums ganz eben so afficirt, als wenn es sich ausserhalb desselben in der Entfernung $x$ von seiner Oberfläche befände, indem eigentlich nur die Theile des brechenden Mediums auf das Licht wirken, deren Entfernung von der Oberfläche des brechenden Mediums nicht kleiner als $2x$ ist. Die auf das in der Tiefe $x$ unter der Oberfläche des brechenden Mediums befindliche Lichttheilchen wirkende beschleunigte Kraft ist folglich auf ganz ähnliche Art wie oben wieder $DF(x)$, und wir haben daher nach 185) die Gleichung

$$186)\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = D\,F(x),$$

aus der sich ferner

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial x = D F(x)\,\partial x,$$

also, wenn $A'$ eine willkührliche Constante bezeichnet,

$$187)\ \int\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial x = A' + D\int F(x)\,\partial x$$

ergiebt. Weil nun aber auf ganz ähnliche Art wie oben

$$\int\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial t = {}^1/_2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$$

ist, so ist, wenn wir der Kürze wegen $2A' = C'$ setzen:

$$188)\ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = C' + 2D\int F(x)\,\partial x,$$

oder nach 177):

$$189)\ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = C' + 2D f(x).$$

Bezeichnet aber $v$ die der Tiefe $x$ unter der Oberfläche des brechenden Mediums entsprechende Geschwindigkeit des Lichttheilchens, so ist nach den Principien der Mechanik

$$190)\ v = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial(a+x)}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$191)\ v^2 = C' + 2D f(x).$$

Ueberlegt man alles Obige nochmals genau, so übersieht man leicht, dass es, nachdem das Lichttheilchen in das brechende Medium eingedrungen ist, ganz eben so ist, als wenn die anziehende Kraft sich immer weiter und weiter von dem Lichttheilchen entfernte, je weiter dasselbe in das brechende Medium eindringt, und dass folglich, weil die anziehende Kraft immer bloss ganz in der Nähe der Oberfläche des brechenden Mediums auf das Lichttheilchen wirkt, die Bewegung desselben sehr bald nach dem Eintritte in das brechende Medium gleichförmig, oder, was dasselbe ist, seine Geschwindigkeit constant werden wird. Bezeichnen wir nun diese constante Geschwindigkeit des Lichttheilchens bei seiner Bewegung in dem brechenden Medium durch $w'$, seine Geschwindigkeit in der Nähe der Oberfläche, d. i. für $x = 0$, wie vorher durch $V$, so haben wir nach 191) die beiden Gleichungen

$$192)\ w'^2 = C' + 2Df(\infty)$$

und

$$193)\ V^2 = C' + 2Df(0),$$

aus denen durch Subtraction die Gleichung

$$194)\ w'^2 - V^2 = 2D\{f(\infty) - f(0)\},$$

d. i. die Gleichung

$$195)\ w'^2 - V^2 = 2D\int_0^\infty F(x)\partial x,$$

oder nach dem Obigen die Gleichung

$$196)\ w'^2 - V^2 = 2k^2D,$$

folgt.

Durch Addition der beiden Gleichungen 183) und 196), nämlich der beiden Gleichungen

$$V^2 - w^2 = 2k^2D,\ w'^2 - V^2 = 2k^2D$$

erhält man endlich die Gleichung

$$197)\ w'^2 - w^2 = 4k^2D,$$

wo, was hier wiederholt zu werden verdient, $w$ und $w'$ die constanten Geschwindigkeiten des Lichttheilchens vor und nach seinem Eintritte in das brechende Medium sind, vorausgesetzt, dass das Lichttheilchen aus dem leeren Raume in das brechende Medium übergeht.

§. 33.

Seien nun $A$ und $B$ zwei brechende Media von den Dichtigkeiten $D$ und $D'$, indem wir zugleich annehmen wollen, dass $D'$ grösser als $D$ sei. Aus dem Medium $A$ gehe ein Lichtstrahl nach einer auf der die beiden Media von einander trennenden Fläche senkrechten Richtung in das Medium $B$ über, und seine constanten Geschwindigkeiten in $A$ und $B$ seien respective $v$ und $v'$. Das Medium $B$ kann man sich aus zwei Medien $A'$ und $C$ von den Dichtigkeiten $D$ und $D' - D$ bestehend denken. Die Wirkungen der Medien $A$ und $A'$ auf das Lichttheilchen in der die beiden Media $A$ und $B$ von einander trennenden Fläche heben sich gegenseitig völlig auf, so dass, wenn das Medium $C$ nicht da wäre, die Geschwindigkeit $v$ des einfallenden Lichttheilchens gar keine Veränderung erleiden würde, und es also offenbar ganz eben so ist, als wenn das Lichttheilchen mit der Geschwindigkeit $v$ aus dem leeren Raume nach einer auf der die beiden Media $A$ und $B$ von einander trennenden Fläche senkrechten Richtung in das Medium $C$ von der Dichtigkeit $D' - D$ überginge, woraus sich nach 197) unmittelbar die Gleichung

$$198)\quad v'^2 - v^2 = 4k^2(D' - D),$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung

$$199)\quad v^2 - v'^2 = 4k^2(D - D')$$

ergiebt.

§. 34.

Auf die Fläche, welche die beiden brechenden Media $A$, $B$ von den Dichtigkeiten $D$, $D'$ von einander trennt, falle jetzt in dem Punkte $O$ nach der ganz beliebigen Richtung $MO$ ein aus dem Medium $A$ kommender Lichtpunkt auf. Legt man nun durch $MO$ eine auf der, die beiden brechenden Media von einander trennenden Fläche senkrecht stehende Ebene; so ist auf beiden Seiten dieser Ebene offenbar Alles völlig gleich, und daher kein Grund für das Heraustreten des Lichttheilchens aus dieser Ebene nach erfolgter Brechung nach der einen Seite derselben hin vorhanden, welcher nicht auch für das Heraustreten aus der in Rede stehenden Ebene nach ihrer andern Seite hin Statt fände, woraus sich ergiebt, dass sich das Lichttheilchen auch nach der Brechung noch in dieser Ebene nach einer gewissen Richtung $ON$, die also mit $MO$ und dem Einfallslothe in einer und derselben Ebene liegt, bewegen wird.

In Taf. I. Fig. 6. sei die Ebene des Papiers die Ebene, in welcher das Lichttheilchen sich vor und nach der Brechung bewegt. $KL$ sei der Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene, die in dem Einfallspunkte $O$ die brechende Fläche, welche die beiden brechenden Media $A$ und $B$ von einander trennt, berührt. Das Einfallsloth sei $AB$. Die Wege des Lichttheilchens in den beiden brechenden Medien sind $MO$ und $ON$, wie wir aus dem Vorhergehenden schon wissen.

Die constanten Geschwindigkeiten des Lichttheilchens in den beiden brechenden Medien $A$ und $B$ seien respective $v$ und $v'$. Die von $OM$ und $ON$ mit dem Einfallslothe eingeschlossenen Winkel seien $\omega$ und $\omega'$. In dem Einfallspunkte $O$ zerlege man nun die Geschwindigkeit $v = Om$ nach den Richtungen $OL$ und $OB$ in die beiden Seitengeschwindigkeiten

$$Om_1 = v \sin\omega,\quad Om' = v \cos\omega.$$

Macht man dasselbe mit der Geschwindigkeit $v' = On$, so ist, weil die anziehenden Kräfte der brechenden Medien senkrecht auf der brechenden Fläche wirken, klar, dass die nach $OL$ gerichtete Seitengeschwindigkeit bloss von der in $v'$ gewissermassen enthaltenen Geschwindigkeit $v$ nach ihrer Richtung herrühren kann, und daher

nothwendig ebenfalls durch die Linie $Om_1$ dargestellt werden muss, so dass also die beiden Seitengeschwindigkeiten, in welche sich die Geschwindigkeit $v' = On$ nach $OL$ und $OB$ zerlegen lässt, offenbar

$$Om_1 = v' \sin\omega', \quad On'_{\prime} = v' \cos\omega'$$

sein werden. Da sich nun auf $Om'$ und $On'$ der vorhergehende Paragraph offenbar in seiner ganzen Ausdehnung anwenden lässt, so erhalten wir unmittelbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$200) \begin{cases} v.\sin\omega = v' \sin\omega', \\ v'^2 \cos\omega'^2 - v^2 \cos\omega^2 = 4k^2(D' - D). \end{cases}$$

Eliminirt man $v'$ aus diesen beiden Gleichungen, so ergiebt sich nach und nach:

$$v^2 \frac{\sin\omega^2 \cos\omega'^2}{\sin\omega'^2} - v^2 \cos\omega^2 = 4k^2(D' - D),$$

$$\frac{\sin\omega^2 \cos\omega'^2 - \cos\omega^2 \sin\omega'^2}{\sin\omega'^2} = \frac{4k^2(D' - D)}{v^2},$$

$$\frac{\sin\omega^2(1 - \sin\omega'^2) - \sin\omega'^2(1 - \sin\omega^2)}{\sin\omega'^2} = \frac{4k^2(D' - D)}{v^2},$$

$$\frac{\sin\omega^2 - \sin\omega'^2}{\sin\omega'^2} = \frac{4k^2(D' - D)}{v^2};$$

also

$$201) \frac{\sin\omega}{\sin\omega'} = \sqrt{1 + \frac{4k^2(D' - D)}{v^2}}.$$

Weil für jede zwei brechende Media die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in dieser Gleichung offenbar constant ist, so ist

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'},$$

wie sich auch $\omega$ und $\omega'$ selbst ändern mögen, für jede zwei brechende Media eine constante Grösse, welches das bekannte dioptrische Grundgesetzt ist.

Bezeichnen wir wie früher auch jetzt wieder den reciproken Brechungsexponenten durch $\mu$, so ist bekanntlich

$$\mu = \frac{\sin\omega'}{\sin\omega},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$202) \quad \frac{1}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{4k^2(D' - D)}{v^2}},$$

oder, wenn wir den Brechungsexponenten selbst durch $\mu_1$ bezeichnen, also

$$203) \quad \mu_1 = \frac{1}{\mu}$$

setzen:

$$204) \quad \mu_1 = \sqrt{1 + \frac{4k^2(D' - D)}{v^2}}.$$

## §. 35.

Man denke sich jetzt einen Lichtstrahl aus dem leeren Raume in das Medium $A$ von der Dichtigkeit $D$, und aus diesem in das Medium $B$ von der Dichtigkeit $D'$ übergehend. Die Brechungsexponenten für den leeren Raum und das Medium $A$, und für den leeren Raum und das Medium $B$, seien respective $\lambda$ und $\lambda'$; so ist nach 204), wenn die Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raume durch $\mathfrak{V}$ bezeichnet wird, weil die Dichtigkeit des leeren Raumes natürlich als verschwindend zu betrachten ist,

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{4k^2}{\mathfrak{V}^2} D}, \quad \lambda' = \sqrt{1 + \frac{4k^2}{\mathfrak{V}^2} D'}$$

oder, wenn wir die positive Constante $\frac{4k^2}{\mathfrak{V}^2}$ durch $K$ bezeichnen, also

$$205) \quad K = \frac{4k^2}{\mathfrak{V}^2}$$

setzen,

$$\lambda = \sqrt{1 + KD}, \quad \lambda' = \sqrt{1 + KD'};$$

folglich

$$\lambda^2 = 1 + KD, \quad \lambda'^2 = 1 + KD';$$

also

$$\lambda'^2 - \lambda^2 = K(D' - D),$$

und daher

$$\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} = 1 + \frac{K(D' - D)}{\lambda^2}.$$

Nun ist aber nach der ersten der beiden Gleichungen 200), wenn jetzt $w$ und $\omega$ die von den Strahlen im leeren Raume und

im Medio $A$ mit dem Einfallslothe eingeschlossenen Winkel bezeichnen,

$$\mathfrak{B} \sin w = v \sin \omega,$$

also

$$\frac{\sin w}{\sin \omega} = \frac{v}{\mathfrak{B}},$$

und folglich, weil

$$\lambda = \frac{\sin w}{\sin \omega}$$

ist,

$$\lambda = \frac{v}{\mathfrak{B}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} = 1 + \frac{K\mathfrak{B}^2(D' - D)}{v^2}.$$

Nach 205) ist aber

$$K\mathfrak{B}^2 = 4k^2.$$

Also ist

$$\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} = 1 + \frac{4k^2(D' - D)}{v^2}.$$

Nun ist aber nach 204) auch

$$\mu_1^2 = 1 + \frac{4k^2(D' - D)}{v^2}.$$

Also ist

$$206) \quad \mu_1 = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

oder nach 203)

$$207) \quad \mu = \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Weil aber nach dem Obigen

$$\lambda = \sqrt{1 + KD}, \quad \lambda' = \sqrt{1 + KD'}$$

ist, so ist

$$208) \quad \mu = \frac{\sqrt{1 + KD}}{\sqrt{1 + KD'}}$$

und

$$209) \quad \mu_1 = \frac{\sqrt{1 + KD'}}{\sqrt{1 + KD}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich auch leicht:

$$210)\begin{cases} D - \mu^2 D' = \dfrac{\mu^2 - 1}{K}, \\ D' - \mu_1^2 D = \dfrac{\mu_1^2 - 1}{K}; \end{cases}$$

also

$$211)\begin{cases} D = \mu^2 D' + \dfrac{\mu^2 - 1}{K}, \\ D = \mu^2 \left\{ D' - \dfrac{\mu_1^2 - 1}{K} \right\}; \end{cases}$$

und

$$212)\begin{cases} D' = \mu_1^2 D + \dfrac{\mu_1^2 - 1}{K}, \\ D' = \mu_1^2 \left\{ D - \dfrac{\mu^2 - 1}{K} \right\}. \end{cases}$$

Endlich ist auch

$$213)\ K = \frac{\mu^2 - 1}{D - \mu^2 D'} = \frac{\mu_1^2 - 1}{D' - \mu_1^2 D}.$$

## §. 36.

Es seien jetzt $A$, $B$, $C$ drei brechende Media von den Dichtigkeiten $D$, $D'$, $D''$; die reciproken Brechungsexponenten für $A, B$ und $A, C$ seien $\mu'$ und $\mu''$, und die Brechungsexponenten selbst für $A$, $B$ und $A$, $C$ seien $\mu'_1$ und $\mu_1''$; so ist nach 213)

$$K = \frac{\mu_1'^2 - 1}{D' - \mu_1'^2 D},\quad K = \frac{\mu_1''^2 - 1}{D'' - \mu_1''^2 D};$$

also

$$\frac{\mu_1'^2 - 1}{D' - \mu_1'^2 D} = \frac{\mu_1''^2 - 1}{D'' - \mu_1''^2 D}$$

oder

$$\frac{1 - \mu_1'^2}{1 - \mu_1''^2} = \frac{D' - \mu_1'^2 D}{D'' - \mu_1''^2 D} = \frac{\mu_1'^2 - \dfrac{D'}{D}}{\mu_1''^2 - \dfrac{D''}{D}}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich aber leicht

$$214)\quad (1-\mu_1''^2)\frac{D'}{D}-(1-\mu_1'^2)\frac{D''}{D}=\mu_1'^2-\mu_1''^2$$

oder

$$215)\quad (1-\mu_1'')(1+\mu_1'')\frac{D'}{D}-(1-\mu_1')(1+\mu_1')\frac{D''}{D}=(\mu_1'-\mu_1'')(\mu_1'+\mu_1'').$$

Auch ist offenbar nach 214)

$$(1-\mu_1''^2)\left(1-\frac{D'}{D}\right)-(1-\mu_1'^2)\left(1-\frac{D''}{D}\right)$$
$$=\mu_1''^2-\mu_1'^2+(1-\mu_1''^2)-(1-\mu_1'^2),$$

d. i.

$$216)\quad (1-\mu_1''^2)\left(1-\frac{D'}{D}\right)-(1-\mu_1'^2)\left(1-\frac{D''}{D}\right)=0,$$

oder

$$217)\quad (1-\mu_1''^2)\left(1-\frac{D'}{D}\right)=(1-\mu_1'^2)\left(1-\frac{D''}{D}\right),$$

oder

$$218)\quad \frac{1-\frac{D'}{D}}{1-\frac{D''}{D}}=\frac{1-\mu_1'^2}{1-\mu_1''^2}=\frac{(1-\mu_1')(1+\mu_1')}{(1-\mu_1'')(1+\mu_1'')},$$

oder

$$219)\quad \frac{D-D'}{D-D''}=\frac{1-\mu_1'^2}{1-\mu_1''^2}=\frac{(1-\mu_1')(1+\mu_1')}{(1-\mu_1'')(1+\mu_1'')}.$$

## §. 37.

Dass sich mittelst der in §. 1. bis §. 31. entwickelten Theorie alle Haupterscheinungen des Regenbogens auf die vollständigste und genügendste Weise erklären lassen, unterliegt keinem Zweifel, und ich wüsste nicht, was diese Theorie in dieser Beziehung noch zu wünschen übrig liesse. Es kommt aber bei dem Regenbogen ausser der Haupterscheinung noch eine secundäre Erscheinung vor, für welche wohl überhaupt noch keine ganz genügende, auf alle möglichen Fragen völlig befriedigende Antwort gebende Erklärung gefunden worden ist, auf so vielfache Weise man dieselbe auch zu geben bereits versucht hat. Ich meine die sogenannten überzähligen Bogen oder die Supernumerar-Bogen, worunter man bekanntlich im Allgemeinen die mehrmaligen, wenigstens theilweisen, Wiederholungen der eigentlichen Regenbogen der verschiedenen Ord-

nungen, die ich von jetzt an die primären, und die überzähligen Bogen die secundären Bogen nennen werde, versteht, von denen die Erscheinung des Regenbogens zwar nicht constant, aber doch meistens, in verschiedener Stärke und abwechselndem Glanze, so wie auch in mehr oder weniger oftmaliger Wiederholung, begleitet ist. Indem ich die Bekanntschaft mit den näheren Umständen dieser Erscheinung hier veraussetze, hebe ich als etwas besonders Wesentliches nur hervor, dass sich diese secundären Bogen immer nur an den Gipfelpunkten der primären Bogen mit vorzüglicher Stärke zeigen, und zu verschiedenen Zeiten mehr oder weniger tief mit successive abnehmendem Glanze bis zum Horizonte hinabreichen.

In neuerer Zeit sind vorzüglich zwei Erklärungsversuche dieser secundären Bogen bekannt geworden, von denen in ganz neuer Zeit wieder vorzugsweise der eine Anerkennung und Aufnahme bei den Physikern gefunden hat, und gegenwärtig eigentlich wohl als der allgemein angenommene betrachtet werden muss, welche allerdings sehr allgemeine Anerkennung indess wohl wenigstens zum Theil in der jetzt mit Recht sehr allgemein verbreiteten Hinneigung der Physiker zu der neueren physikalischen Theorie des Lichts, der sogenannten Undulationstheorie, auf welcher der in Rede stehende Erklärungsversuch hauptsächlich beruhet, ihren Grund hat, indem sich doch auch dieser Erklärungsweise der secundären Bogen wohl manche Einwürfe entgegenstellen liessen und in der That auch schon von einigen gründlichen Physikern entgegengestellt worden sind. Ich werde weiter unten diese beiden Erklärungsversuche, welche mir selbst freilich, auch die gegenwärtig fast allgemein recipirte Erklärung nicht ausgeschlossen, noch Manches zu wünschen übrig zu lassen scheinen, so weit es die Natur dieser Abhandlung, und die Principien, welche ich mir der Einleitung zufolge bei deren Abfassung gemacht habe, zulassen, etwas näher besprechen, will aber vorher einen dritten mir eigenthümlichen Erklärungsversuch entwickeln, der wenigstens das Verdienst haben dürfte, dass er nicht, wie namentlich die gegenwärtig fast allgemein von den Physikern angenommene Erklärung, den von Newton bei der Erklärung der Haupterscheinungen des Regenbogens oder der primären Bogen eingeschlagenen Weg bei der Erklärung der secundären Bogen mit einem Male gänzlich verlässt, und die etwas weitere Verfolgung dieses Wegs gleich von vorn herein mit der kurzen Erklärung: „dass die Cartesisch-Newton'sche Theorie von den Supernumerar-Bogen weder rede, noch eine Erklärung zu geben im Stande

sei“ *) zurückweiset und als völlig unfruchtbar darzustellen sucht, sondern sich vielmehr an die Newton'sche Theorie so eng als irgend möglich anschliesst, und eigentlich nur auf dem von diesem grossen Naturforscher mit so vielem Glücke eingeschlagenen Wege noch einige Schritte weiter fortschreitet. Letzteres sollte man aber nach meiner Meinung, wenn sich eine Theorie einer Naturerscheinung wenigstens in den Hauptpunkten so glänzend bewährt hat wie im vorliegenden Falle die Newton'sche Theorie, immer versuchen, bevor man zu ganz neuen Erklärungsgründen seine Zuflucht nimmt. So wenig Werth ich nun aber auch selbst auf die an sich übrigens sehr einfache Erklärung der secundären Bogen lege, welche ich im nächstfolgenden Paragraphen zu geben versuchen werde, die in der That so einfach ist und sich so leicht ganz von selbst ergiebt, dass es mich eigentlich misstrauisch gegen dieselbe macht, dass bisher noch kein Physiker, so viel ich weiss, auf dieselbe gefallen ist: so sehr bedaure ich doch auf der andern Seite, dass es bis jetzt an Messungen des Regenbogens, so wie er sich, ohne auf irgend eine Weise künstlich nachgebildet zu sein, in der Wirklichkeit uns darstellt, welche hinreichend genau und umfänglich genug wären, um eine scharfe Prüfung der im nächsten Paragraphen zu gebenden Erklärung der secundären Bogen auf sie gründen zu können, so gut wie gänzlich fehlt, weshalb ich auch nachher meine Ansicht, wie solche Messungen am besten anzustellen und auf dem Wege der Rechnung Resultate aus denselben zu ziehen sein dürften, besonders entwickeln werde, und mir jetzt nur noch den Wunsch auszusprechen erlaube, dass dergleichen Messungen künftig häufiger und mit grösserer Genauigkeit und Schärfe als bisher angestellt werden möchten, wozu ich selbst auch jede sich mir darbietende Gelegenheit benutzen werde. Da der Regenbogen kein periodisch wiederkehrendes Phänomen ist, auch unter verschiedenen Modificationen auftritt, so muss derselbe, wo und wann er auch mit vorzüglichem Glanze und mit vorzüglicher Vollständigkeit sich zeigt, zu genauen Messungen benutzt werden, wozu natürlich das Zusammenwirken einer grösseren Anzahl, mit guten Instrumenten versehener Beobachter an verschiedenen Orten erforderlich ist, wenn man mit der Zeit zu genaueren Resultaten als bisher gelangen will, weshalb ich auch hier die Physiker wiederholt aufzufordern mir erlaube, diesem in mehreren Beziehungen wichtigen Gegenstande künftig die ihm gebührende Aufmerksamkeit mehr als bisher zuzu-

*) Poggendorff's Annalen. Band XXXVII. S. 455.

wenden. Nach diesen vorläufigen Bemerkungen werde ich nun im folgenden Paragraphen meine Ansicht über die secundären Bogen mit möglichster Kürze und Bestimmtheit zu entwickeln suchen.

## §. 38.

Wir fassen für jetzt nur einen primären Bogen und die demselben entsprechenden secundären Bogen in's Auge, bemerken aber, dass die folgenden Betrachtungen in gleicher Weise auf jeden primären Bogen mit seinen secundären Bögen anwendbar sind. Ferner fassen wir in dem primären Bogen und seinen secundären Bögen ein und dieselbe bestimmte Farbe in's Auge, und wollen nun annehmen, dass man durch geeignete Messungen, von deren zweckmässigster Anstellung weiter unten die Rede sein wird, für alle diese Bogen den in §. 4. im Allgemeinen durch $\Theta$ bezeichneten Winkel bestimmt habe. Die auf diese Weise erhaltenen Werthe des im Allgemeinen durch $\Theta$ bezeichneten Winkels für die verschiedenen gleich gefärbten Bogen wollen wir aber jetzt durch

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \Theta_3, \quad \Theta_4, \quad \Theta_5, \ldots.$$

bezeichnen. Sind dann alle diese gleich gefärbten Bogen auf eine und dieselbe Weise, nämlich sämmtlich auf die von der Newton'schen Theorie angegebene Art, hervorgerufen, so kann man mittelst der in §. 7., §. 8., §. 9. vollständig entwickelten Gleichungen aus den durch Messung erhaltenen Winkeln

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \Theta_3, \quad \Theta_4, \quad \Theta_5, \ldots..$$

die entsprechenden Werthe

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad \mu_4, \quad \mu_5, \ldots.$$

der reciproken Brechungsexponenten für die in Rede stehende Farbe bestimmen. Da nun diese einer und derselben Farbe entsprechenden Brechungsexponenten eben so wie die Winkel, aus denen sie abgeleitet worden sind, von einander verschieden sein müssen, so entsteht jetzt die Frage, welches der Grund dieser Verschiedenheit ist. Auf diese Frage lässt sich aber, wenn man die Newton'sche Theorie, wie hier beabsichtigt wird, mit möglichster Consequenz durchführen will, keine andere Antwort geben, als dass in der Atmosphäre Regentropfen vorhanden sein müssen, welche das gleich gefärbte Licht auf verschiedene Art brechen, oder welche eine verschiedene Brechungskraft besitzen. Da nun aber nach der in §. 32. bis §. 36. entwickelten physikalischen Theorie des Lichts die Verschiedenheit der Brechungskraft der brechenden Mittel lediglich und einzig und allein durch ihre verschiedene Dichtigkeit bedingt wird,

so kann die Verschiedenheit der einer und derselben Farbe entsprechenden Brechungsexponenten, und also natürlich auch die damit unmittelbar zusammenhängende Wiederholung der Bogen, durch nichts Anderes als dadurch herbeigeführt werden, dass sich in der Atmosphäre Regentropfen von verschiedener Dichtigkeit befinden, indem wir bei der schon im vorhergehenden Paragraphen erwähnten geringen Ausdehnung der secundären Bogen von der durch die verschiedene Höhe bedingten Verschiedenheit der Dichtigkeit der Luft absehen zu dürfen hier wohl vollständig berechtigt sind. Wirft man nun aber, wie billig, ferner die Frage auf, woher es komme, dass sich die secundären Bogen nur hauptsächlich an den Gipfelpunkten der primären Bogen zeigen, so kann diese Frage nicht anders beantwortet werden, als dadurch, dass nur in den höheren Regionen der Atmosphäre, ausser den in bedeutender Anzahl vorherrschenden und bis zur Erde hinabreichenden Tropfen von gleicher Dichtigkeit, noch Tropfen von davon verschiedenen Dichtigkeiten vorkommen, indem eben durch das Herabfallen der Tropfen sich die Dichtigkeit derselben, etwa wenn sie in wärmere Regionen kommen, nach und nach ausgleicht, woraus sich denn unmittelbar und ganz von selbst ergiebt, dass näher nach dem Horizonte hinab sich keine secundären Bogen mehr zeigen können. Hiermit glauben wir aber die Erklärung der secundären Bogen erledigt und zu Ende geführt zu haben, denn wenn auch freilich der Physiker jetzt noch zu fragen berechtigt ist, woher die Tropfen von verschiedener Dichtigkeit in der Atmosphäre kommen und wie dieselben entstehen, so müssen wir diese Frage doch als nicht hierher gehörend zurückweisen, indem die Beantwortung derselben lediglich von der Art und Weise der Entstehung des Regens in den höheren Regionen der Atmosphäre abhängt, über die wir freilich noch sehr im Unklaren sind; und so lange dieser Vorgang in der Natur nicht vollständig aufgeklärt ist, glauben wir uns berechtigt halten zu dürfen, den Speer, wie man wohl zu sagen pflegt, umzukehren, und zu behaupten, dass vielmehr die obige Erklärung der secundären Bogen auf gewisse Vorgänge bei der Regenbildung hinweise, die bisher vielleicht noch nicht alle verdiente Beachtung gefunden haben. Je weniger es hier der Ort ist, auf die Bildung und Entstehung des Regens weiter einzugehen, desto mehr halten wir uns für berechtigt, die Beantwortung der vorhergehenden Frage, als der Lichtlehre ganz fremd, an die eigentliche Meteorologie zu verweisen, und wünschen sehr, über dieselbe von irgend einer Seite her bald genügende Aufklärung zu erhalten. Dass die obige an

sich höchst einfache Erklärung namentlich bei den unmathematischen Physikern Widerspruch finden wird, bin ich im Voraus überzeugt, weiss auch vorher, dass man ihr nach einem beliebten Ausdrucke hauptsächlich eine zu geringe Berücksichtigung und Aufklärung des eigentlich Physikalischen bei der betreffenden Naturerscheinung vorwerfen wird. Ich glaube aber dessenungeachtet, dass dieselbe sich durch ihre Einfachheit, durch die Consequenz ihrer Durchführung, und namentlich auch dadurch wohl einigermassen empfiehlt, dass sie sich mit der Newton'schen Theorie, indem man in derselben eigentlich nur einige Schritte weiter geht, in unmittelbaren Zusammenhang bringen und an dieselbe unmittelbar anschliessen lässt, ohne zu dieser Theorie an sich ganz fremden Thatsachen seine Zuflucht nehmen zu müssen, möchte derselben daher auch allerdings einige Berücksichtigung und weitere Prüfung wünschen, weshalb ich nun, um für die letztere einige Anhaltepunkte darzubieten, dem Obigen noch die folgenden Bemerkungen beifügen will, wobei ich nur mein wiederholtes Bedauern auszusprechen nicht unterlassen kann, dass es an hinreichend genauen Beobachtungen und Messungen, welche als Grundlage einer solchen Prüfung benutzt werden könnten, gegenwärtig noch so gut wie ganz fehlt.

Wenn wir die auf die aus dem Vorhergehenden ersichtliche Weise bestimmten reciproken Brechungsexponenten für die verschiedenen farbigen Bogen jetzt durch

$$\overset{1}{\mu}_1,\ \overset{1}{\mu}_2,\ \overset{1}{\mu}_3,\ \overset{1}{\mu}_4,\ \overset{1}{\mu}_5,\ldots;$$

$$\overset{2}{\mu}_1,\ \overset{2}{\mu}_2,\ \overset{2}{\mu}_3,\ \overset{2}{\mu}_4,\ \overset{2}{\mu}_5,\ldots;$$

$$\overset{3}{\mu}_1,\ \overset{3}{\mu}_2,\ \overset{3}{\mu}_3,\ \overset{3}{\mu}_4,\ \overset{3}{\mu}_5,\ldots;$$

u. s. w.

wo die Anzahl dieser Reihen natürlich sieben nie übersteigen kann, und die entsprechenden Dichtigkeiten der Regentropfen durch

$$D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_5,\ldots$$

die Dichtigkeit der Luft aber durch $D$ bezeichnen; so haben wir nach 217) die folgenden Gleichungen:

$$(1-\overset{1}{\mu}_2{}^2)\left(1-\frac{D_1}{D}\right)=(1-\overset{1}{\mu}_1{}^2)\left(1-\frac{D_2}{D}\right),$$

$$(1-\overset{1}{\mu}_3{}^2)\left(1-\frac{D_1}{D}\right)=(1-\overset{1}{\mu}_1{}^2)\left(1-\frac{D_3}{D}\right),$$

$$(1-\overset{1}{\mu}_4{}^2)\left(1-\frac{D_1}{D}\right)=(1-\overset{1}{\mu}_1{}^2)\left(1-\frac{D_4}{D}\right),$$

u. s. w.

ferner

$$(1-\overset{2}{\mu}_2{}^2)\left(1-\frac{D_1}{D}\right)=(1-\overset{2}{\mu}_1{}^2)\left(1-\frac{D_2}{D}\right),$$

$$(1-\overset{2}{\mu}_3{}^2)\left(1-\frac{D_1}{D}\right)=(1-\overset{2}{\mu}_1{}^2)\left(1-\frac{D_3}{D}\right),$$

$$(1-\overset{2}{\mu}_4{}^2)\left(1-\frac{D_1}{D}\right)=(1-\overset{2}{\mu}_1{}^2)\left(1-\frac{D_4}{D}\right),$$

u. s. w.

ferner

$$(1-\overset{3}{\mu}_2{}^2)\left(1-\frac{D_1}{D}\right)=(1-\overset{3}{\mu}_1{}^2)\left(1-\frac{D_2}{D}\right),$$

$$(1-\overset{3}{\mu}_3{}^2)\left(1-\frac{D_1}{D}\right)=(1-\overset{3}{\mu}_1{}^2)\left(1-\frac{D_3}{D}\right),$$

$$(1-\overset{3}{\mu}_4{}^2)\left(1-\frac{D_1}{D}\right)=(1-\overset{3}{\mu}_1{}^2)\left(1-\frac{D_4}{D}\right),$$

u. s. w.

ferner

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich aber, wie man leicht findet:

$$\frac{1-\overset{1}{\mu}_1{}^2}{1-\overset{1}{\mu}_2{}^2}=\frac{1-\overset{2}{\mu}_1{}^2}{1-\overset{2}{\mu}_2{}^2}=\frac{1-\overset{3}{\mu}_1{}^2}{1-\overset{3}{\mu}_2{}^2}=\frac{1-\overset{4}{\mu}_1{}^2}{1-\overset{4}{\mu}_2{}^2}=\ldots\ldots,$$

$$\frac{1-\overset{1}{\mu}_1{}^2}{1-\overset{1}{\mu}_3{}^2}=\frac{1-\overset{2}{\mu}_1{}^2}{1-\overset{2}{\mu}_3{}^2}=\frac{1-\overset{3}{\mu}_1{}^2}{1-\overset{3}{\mu}_3{}^2}=\frac{1-\overset{4}{\mu}_1{}^2}{1-\overset{4}{\mu}_3{}^2}=\ldots\ldots,$$

$$\frac{1-\overset{1}{\mu}_1{}^2}{1-\overset{1}{\mu}_4{}^2}=\frac{1-\overset{2}{\mu}_1{}^2}{1-\overset{2}{\mu}_4{}^2}=\frac{1-\overset{3}{\mu}_1{}^2}{1-\overset{3}{\mu}_4{}^2}=\frac{1-\overset{4}{\mu}_1{}^2}{1-\overset{4}{\mu}_4{}^2}=\ldots\ldots,$$

u. s. w.

Dies sind die Bedingungsgleichungen, welche nothwendig erfüllt sein müssen, wenn unsere oben aufgestellte Hypothese richtig sein soll, und

die mehr oder weniger genaue Erfüllung dieser Bedingungsgleichungen kann daher auch umgekehrt als ein Kriterium für die grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit dieser Hypothese dienen.

Man würde die Prüfung unserer Hypothese noch auf verschiedene andere Arten vornehmen können, dabei sich aber immer der in §. 32. bis §. 36. entwickelten Formeln bedienen müssen. Jedoch scheint mir die obige Methode meinem gegenwärtigen Zwecke am besten zu entsprechen, und ich glaube jetzt diesen Gegenstand um so mehr verlassen zu dürfen, weil es, wie schon mehrmals erwähnt worden ist, zur Zeit noch ganz an hinreichend genauen Beobachtungen und Messungen fehlt, welche einer Prüfung von der Art der obigen mit einiger Sicherheit zum Grunde gelegt werden könnten. Wie aber nach meiner Ansicht solche Beobachtungen und Messungen am besten anzustellen sein dürften, soll nun zuvörderst in den beiden nächstfolgenden Paragraphen gezeigt werden.

## §. 39.

Wir wollen zuerst die folgende geometrische Aufgabe auflösen:

Drei von einem und demselben Punkte ausgehende gerade Linien im Raume seien der Lage nach gegeben; man soll eine gerade Kegelfläche bestimmen, deren Scheitel oder Spitze der in Rede stehende Punkt ist, und welche durch die drei gegebenen geraden Linien hindurch geht.

Um diese Aufgabe aufzulösen, nehme man den Punkt, von welchem die drei gegebenen geraden Linien ausgehen, nach den Bedingungen der Aufgabe also den Scheitel oder die Spitze der gesuchten Kegelfläche, als Anfang eines beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems der $xyz$ an, und bezeichne die $180^0$ nicht übersteigenden Winkel, welche die drei gegebenen geraden Linien mit den positiven Theilen der Axen der

$$x,\quad y,\quad z$$

einschliessen, respective durch

$$\alpha_1,\quad \beta_1,\quad \gamma_1;$$
$$\alpha_2,\quad \beta_2,\quad \gamma_2;$$
$$\alpha_3,\quad \beta_3,\quad \gamma_3.$$

Ferner seien $\varphi$, $\psi$, $\chi$ die $180^0$ nicht übersteigenden Winkel, welche die als eine von dem Anfange der Coordinaten oder von dem Scheitel der gesuchten Kegelfläche ausgehende gerade Linie

gedachte Axe der Kegelfläche mit den positiven Theilen der Axen der $x$, $y$, $z$ einschliesst, und $\omega$ sei der ebenfalls 180° nicht übersteigende Winkel, welchen die Axe der gesuchten Kegelfläche mit den drei gegebenen geraden Linien einschliesst, indem nach der Natur der geraden Kegelfläche bekanntlich die Axe gegen die drei gegebenen geraden Linien unter gleichen Winkeln geneigt sein muss. Dies vorausgesetzt, liefert uns ein bekannter Satz der analytischen Geometrie auf der Stelle die drei folgenden Gleichungen:

$$\cos\omega = \cos\alpha_1 \cos\varphi + \cos\beta_1 \cos\psi + \cos\gamma_1 \cos\chi,$$
$$\cos\omega = \cos\alpha_2 \cos\varphi + \cos\beta_2 \cos\psi + \cos\gamma_2 \cos\chi,$$
$$\cos\omega = \cos\alpha_3 \cos\varphi + \cos\beta_3 \cos\psi + \cos\gamma_3 \cos\chi;$$

zu denen dann noch die bekannte Gleichung

$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1$$

kommt. Aus diesen vier Gleichungen müssen die vier unbekannten Grössen $\varphi$, $\psi$, $\chi$ und $\omega$ bestimmt werden.

Multipliciren wir zu dem Ende die drei ersten Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\beta_2 \cos\gamma_3 - \cos\beta_3 \cos\gamma_2,$$
$$\cos\beta_3 \cos\gamma_1 - \cos\beta_1 \cos\gamma_3,$$
$$\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1;$$

und addiren sie dann zu einander, so erhalten wir die Gleichung

$$\left\{\begin{array}{l} (\cos\beta_2 \cos\gamma_3 - \cos\beta_3 \cos\gamma_2) \\ +(\cos\beta_3 \cos\gamma_1 - \cos\beta_1 \cos\gamma_3) \\ +(\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1) \end{array}\right\} \cos\omega$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha_1 (\cos\beta_2 \cos\gamma_3 - \cos\beta_3 \cos\gamma_2) \\ +\cos\alpha_2 (\cos\beta_3 \cos\gamma_1 - \cos\beta_1 \cos\gamma_3) \\ +\cos\alpha_3 (\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1) \end{array}\right\} \cos\varphi,$$

und auf ganz ähnliche Art, oder auch bloss mittelst gehöriger Vertauschung der Zeichen ergeben sich die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} (\cos\gamma_2 \cos\alpha_3 - \cos\gamma_3 \cos\alpha_2) \\ +(\cos\gamma_3 \cos\alpha_1 - \cos\gamma_1 \cos\alpha_3) \\ +(\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1) \end{array}\right\} \cos\omega$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\cos\beta_1\,(\cos\gamma_2\cos\alpha_3-\cos\gamma_3\cos\alpha_2)\\+\cos\beta_2\,(\cos\gamma_3\cos\alpha_1-\cos\gamma_1\cos\alpha_3)\\+\cos\beta_3\,(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)\end{array}\right\}\cos\psi,$$

und

$$\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_2\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_2)\\+(\cos\alpha_3\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_3)\\+(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)\end{array}\right\}\cos\omega$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\cos\gamma_1\,(\cos\alpha_2\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_2)\\+\cos\gamma_2\,(\cos\alpha_3\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_3)\\+\cos\gamma_3\,(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)\end{array}\right\}\cos\chi.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$220)\left\{\begin{array}{l}K_1=\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\beta_3\cos\gamma_2,\\K_2=\cos\beta_3\cos\gamma_1-\cos\beta_1\cos\gamma_3,\\K_3=\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1;\\[1ex]L_1=\cos\gamma_2\cos\alpha_3-\cos\gamma_3\cos\alpha_2,\\L_2=\cos\gamma_3\cos\alpha_1-\cos\gamma_1\cos\alpha_3,\\L_3=\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1;\\[1ex]M_1=\cos\alpha_2\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_2,\\M_2=\cos\alpha_3\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_3,\\M_3=\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1;\end{array}\right.$$

ferner

$$221)\left\{\begin{array}{l}K=K_1+K_2+K_3,\\L=L_1+L_2+L_3,\\M=M_1+M_2+M_3;\end{array}\right.$$

und,

$$\begin{aligned}222)\quad N&=K_1\cos\alpha_1+K_2\cos\alpha_2+K_3\cos\alpha_3\\&=L_1\cos\beta_1+L_2\cos\beta_2+L_3\cos\beta_3\\&=M_1\cos\gamma_1+M_2\cos\gamma_2+M_3\cos\gamma_3,\end{aligned}$$

nämlich

$$\begin{aligned}223)\quad N=&\quad\cos\alpha_1\cos\beta_2\cos\gamma_3\\&-\cos\alpha_1\cos\gamma_2\cos\beta_3\\&-\cos\beta_1\cos\alpha_2\cos\gamma_3\\&+\cos\beta_1\cos\gamma_2\cos\alpha_3\\&+\cos\gamma_1\cos\alpha_2\cos\beta_3\\&-\cos\gamma_1\cos\beta_2\cos\alpha_3;\end{aligned}$$

so werden die obigen Gleichungen:

$$224)\begin{cases} K\cos\omega = N\cos\varphi, \\ L\cos\omega = N\cos\psi, \\ M\cos\omega = N\cos\chi. \end{cases}$$

Quadrirt man diese Gleichnngen, und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung

$$(K^2 + L^2 + M^2)\cos\omega^2 = N^2,$$

also

$$225)\ \cos\omega = \pm\frac{N}{\sqrt{K^2+L^2+M^2}},$$

und folglich nach 224), indem in allen Gleichungen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$226)\begin{cases} \cos\varphi = \frac{K}{N}\cos\omega = \pm\frac{K}{\sqrt{K^2+L^2+M^2}}, \\ \cos\psi = \frac{L}{N}\cos\omega = \pm\frac{L}{\sqrt{K^2+L^2+M^2}}, \\ \cos\chi = \frac{M}{N}\cos\omega = \pm\frac{M}{\sqrt{K^2+L^2+M^2}}. \end{cases}$$

Weil nach dem Obigen

$$\begin{aligned} K = \quad & \cos\beta_1(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_3) = \cos\gamma_1(\cos\beta_3 - \cos\beta_2) \\ + & \cos\beta_2(\cos\gamma_3 - \cos\gamma_1) + \cos\gamma_2(\cos\beta_1 - \cos\beta_3) \\ + & \cos\beta_3(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2) + \cos\gamma_3(\cos\beta_2 - \cos\beta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L = \quad & \cos\gamma_1(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_3) = \cos\alpha_1(\cos\gamma_3 - \cos\gamma_2) \\ + & \cos\gamma_2(\cos\alpha_3 - \cos\alpha_1) + \cos\alpha_2(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_3) \\ + & \cos\gamma_3(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) + \cos\alpha_3(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M = \quad & \cos\alpha_1(\cos\beta_2 - \cos\beta_3) = \cos\beta_1(\cos\alpha_3 - \cos\alpha_2) \\ + & \cos\alpha_2(\cos\beta_3 - \cos\beta_1) + \cos\beta_2(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3) \\ + & \cos\alpha_3(\cos\beta_1 - \cos\beta_2) + \cos\beta_3(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) \end{aligned}$$

ist, so erhält man für diese Grössen auch leicht die folgenden Ausdrücke:

$$227)\ K = -\,2\cos\beta_1 \sin{}^1/_2(\gamma_2+\gamma_3)\sin{}^1/_2(\gamma_2-\gamma_3)$$
$$-\,2\cos\beta_2 \sin{}^1/_2(\gamma_3+\gamma_1)\sin{}^1/_2(\gamma_3-\gamma_1)$$
$$-\,2\cos\beta_3 \sin{}^1/_2(\gamma_1+\gamma_2)\sin{}^1/_2(\gamma_1-\gamma_2)$$

$$= \quad 2\cos\gamma_1 \sin{}^1/_2(\beta_2+\beta_3)\sin{}^1/_2(\beta_2-\beta_3)$$
$$+\,2\cos\gamma_2 \sin{}^1/_2(\beta_3+\beta_1)\sin{}^1/_2(\beta_3-\beta_1)$$
$$+\,2\cos\gamma_3 \sin{}^1/_2(\beta_1+\beta_2)\sin{}^1/_2(\beta_1-\beta_2),$$

$$L = -\,2\cos\gamma_1 \sin{}^1/_2(\alpha_2+\alpha_3)\sin{}^1/_2(\alpha_2-\alpha_3)$$
$$-\,2\cos\gamma_2 \sin{}^1/_2(\alpha_3+\alpha_1)\sin{}^1/_2(\alpha_3-\alpha_1)$$
$$-\,2\cos\gamma_3 \sin{}^1/_2(\alpha_1+\alpha_2)\sin{}^1/_2(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$= \quad 2\cos\alpha_1 \sin{}^1/_2(\gamma_2+\gamma_3)\sin{}^1/_2(\gamma_2-\gamma_3)$$
$$+\,2\cos\alpha_2 \sin{}^1/_2(\gamma_3+\gamma_1)\sin{}^1/_2(\gamma_3-\gamma_1)$$
$$+\,2\cos\alpha_3 \sin{}^1/_2(\gamma_1+\gamma_2)\sin{}^1/_2(\gamma_1-\gamma_2),$$

$$M = -\,2\cos\alpha_1 \sin{}^1/_2(\beta_2+\beta_3)\sin{}^1/_2(\beta_2-\beta_3)$$
$$-\,2\cos\alpha_2 \sin{}^1/_2(\beta_3+\beta_1)\sin{}^1/_2(\beta_3-\beta_1)$$
$$-\,2\cos\alpha_3 \sin{}^1/_2(\beta_1+\beta_2)\sin{}^1/_2(\beta_1-\beta_2)$$

$$= \quad 2\cos\beta_1 \sin{}^1/_2(\alpha_2+\alpha_3)\sin{}^1/_2(\alpha_2-\alpha_3)$$
$$+\,2\cos\beta_2 \sin{}^1/_2(\alpha_3+\alpha_1)\sin{}^1/_2(\alpha_3-\alpha_1)$$
$$+\,2\cos\beta_3 \sin{}^1/_2(\alpha_1+\alpha_2)\sin{}^1/_2(\alpha_1-\alpha_2).$$

Berechnet man die Grössen $P$, $Q$, $R$ nach einer bekannten Methode mittelst der drei Gleichungen

$$228)\left\{\begin{array}{l} K = R\cos P\cos Q, \\ L = R\sin P\cos Q, \\ M = R\sin Q; \end{array}\right.$$

und macht dabei, was bekanntlich immer möglich ist, $R$ positiv, so ist, wie man leicht findet,

$$R = \sqrt{K^2+L^2+M^2},$$

also nach dem Obigen

$$229)\ \cos\omega = \pm\frac{N}{R}$$

und

$$230)\begin{cases} \cos\varphi = \pm\frac{K}{R} = \pm\cos P\cos Q, \\ \cos\psi = \pm\frac{L}{R} = \pm\sin P\cos Q, \\ \cos\chi = \pm\frac{M}{R} = \pm\sin Q; \end{cases}$$

wo überall die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen.

Für $4N$ erhält man aus 223) auch leicht den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} 231)\; 4N = & \cos(\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)-\cos(\alpha_1+\beta_3+\gamma_2) \\ &+\cos(-\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)-\cos(-\alpha_1+\beta_3+\gamma_2) \\ &+\cos(\alpha_1-\beta_2+\gamma_3)-\cos(\alpha_1-\beta_3+\gamma_2) \\ &+\cos(\alpha_1+\beta_2-\gamma_3)-\cos(\alpha_1+\beta_3-\gamma_2) \\ &+\cos(\alpha_2+\beta_3+\gamma_1)-\cos(\alpha_2+\beta_1+\gamma_3) \\ &+\cos(-\alpha_2+\beta_3+\gamma_1)-\cos(-\alpha_2+\beta_1+\gamma_3) \\ &+\cos(\alpha_2-\beta_3+\gamma_1)-\cos(\alpha_2-\beta_1+\gamma_3) \\ &+\cos(\alpha_2+\beta_3-\gamma_1)-\cos(\alpha_2+\beta_1-\gamma_3) \\ &+\cos(\alpha_3+\beta_1+\gamma_2)-\cos(\alpha_3+\beta_2+\gamma_1) \\ &+\cos(-\alpha_3+\beta_1+\gamma_2)-\cos(-\alpha_3+\beta_2+\gamma_1) \\ &+\cos(\alpha_3-\beta_1+\gamma_2)-\cos(\alpha_3-\beta_2+\gamma_1) \\ &+\cos(\alpha_3+\beta_1-\gamma_2)-\cos(\alpha_3+\beta_2-\gamma_1), \end{aligned}$$

woraus sich nach bekannten goniometrischen Sätzen leicht noch andere Ausdrücke herleiten lassen würden, bei denen wir aber nicht länger verweilen.

Dass im vorliegenden Falle den doppelten Zeichen in den obigen Formeln nicht zwei verschiedene Auflösungen unserer Aufgabe entsprechen, braucht wohl kaum noch besonders bemerkt zu werden.

## §. 40.

Bei den Messungen des Regenbogens bedient man sich nun, wie es mir scheint, am besten eines Theodoliten, welcher vorher genau berichtigt und an einem geeigneten Orte, der eine möglichst freie Aussicht darbietet, ein für alle Mal richtig aufgestellt werden muss, damit man ihn sogleich gebrauchen kann, wenn ein Regen-

bogen sich zeigt, indem man natürlich nicht erst mit der Aufstellung des Instruments eine längere Zeit verstreichen lassen darf. Mit diesem Theodoliten, dessen Mittelpunkt wir durch $O$ bezeichnen wollen, messe man nun in drei Azimuthen $U_1$, $U_2$, $U_3$, die von einem beliebigen Punkte $A$ des Horizonts an gezählt werden können und natürlich auch mit dem Theodoliten gemessen werden müssen, die diesen Azimuthen entsprechenden Höhen $h_1$, $h_2$, $H_3$ des Regenbogens, und bestimme mittelst einer Uhr die Zeiten $t_1 < t_2 < T_3$, wo diese Höhen gemessen wurden; dann führe man das Fernrohr wieder auf das Azimuth $U_1$, messe die entsprechende Höhe $h_1'$ des Regenbogens, und bestimme die Zeit $t_1'$ an der Uhr; endlich führe man das Fernrohr auch wieder auf das Azimuth $U_2$, messe die entsprechende Höhe $h_2'$ des Regenbogens, und bestimme die Zeit $t_2'$ an der Uhr. Weil nun für das Azimuth $U_1$ in der Zeit $t_1' - t_1$ die Höhe $h_1$ des Regenbogens die Aenderung $h_1' - h_1$ erleidet, so ist das vierte Glied der Proportion

$$t_1' - t_1 : T_3 - t_1 = h_1' - h_1 : \frac{T_3 - t_1}{t_1' - t_1}(h_1' - h_1)$$

wenigstens näherungsweise und desto genauer, je kleiner die Zeitintervalle sind, die Aenderung, welche für das Azimuth $U_1$ die Höhe $h_1$ des Regenbogens in der Zeit $T_3 - t_1$ erleidet, und bezeichnen wir also für das Azimuth $U_1$ die Höhe des Regenbogens zur Zeit $T_3$ durch $H_1$, so ist

$$H_1 = h_1 + \frac{T_3 - t_1}{t_1' - t_1}(h_1' - h_1).$$

Weil auf ganz ähnliche Weise für das Azimuth $U_2$ in der Zeit $t_2' - t_2$ die Höhe $h_2$ des Regenbogens die Aenderung $h_2' - h_2$ erleidet, so ist das vierte Glied der Proportion

$$t_2' - t_2 : T_3 - t_2 = h_2' - h_2 : \frac{T_3 - t_2}{t_2' - t_2}(h_2' - h_2)$$

wenigstens näherungsweise und desto genauer, je kleiner die Zeitintervalle sind, die Aenderung, welche für das Azimuth $U_2$ die Höhe $h_2$ des Regenbogens in der Zeit $T_3 - t_2$ erleidet; und bezeichnen wir also für das Azimuth $U_2$ die Höhe des Regenbogens zur Zeit $T_3$ durch $H_2$, so ist

$$H_2 = h_2 + \frac{T_3 - t_2}{t_2' - t_2}(h_2' - h_2).$$

Auf diese Weise erhalten wir also die den gemessenen Azimuthen $U_1$, $U_2$, $U_3$ entsprechenden, auf einerlei Zeitpunkt $T_3$ reducirten Höhen $H_1$, $H_2$, $H_3$ des Regenbogens, wobei sich von selbst versteht, dass man bei diesen Beobachtungen immer einzelne bestimmte farbige Bogen auswählen, und auf dieselben die Messungen beziehen muss.

Aus den gemessenen Winkeln

$$U_1,\ H_1;\quad U_2,\ H_2;\quad U_3,\ H_3$$

kann man nun aber die im vorhergehenden Paragraphen durch

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\quad \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3$$

bezeichneten Winkel mittelst der folgenden leicht zu beweisenden Formeln berechnen:

$$232)\left\{\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= \cos U_1 \cos H_1,\\
\cos\beta_1 &= \sin U_1 \cos H_1,\\
\cos\gamma_1 &= \sin H_1;\\[1ex]
\cos\alpha_2 &= \cos U_2 \cos H_2,\\
\cos\beta_2 &= \sin U_2 \cos H_2,\\
\cos\gamma_2 &= \sin H_2;\\[1ex]
\cos\alpha_3 &= \cos U_3 \cos H_3,\\
\cos\beta_3 &= \sin U_3 \cos H_3,\\
\cos\gamma_3 &= \sin H_3.
\end{aligned}\right.$$

Welches Coordinatensystem hierbei zum Grunde gelegt worden ist, wird leicht erhellen. Die Linie $OA$ ist der positive Theil der Axe der $x$; der positive Theil der Axe der $y$ liegt, auf $OA$ senkrecht stehend, im Horizonte von $OA$ aus nach derselben Seite hin, nach welcher von $OA$ an die Azimuthe gezählt worden sind; der positive Theil der Axe der $z$ ist nach dem Zenith gerichtet.

Hat man nun aber auf diese Weise die Winkel

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\quad \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3$$

gefunden, so lassen sich die Winkel $\varphi$, $\psi$, $\chi$ und $\omega$ mittelst der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln berechnen.

Leicht wird endlich erhellen, dass sich aus dem Winkel $\omega$, den wir, was nach dem Obigen offenbar verstattet ist, als einen spitzen Winkel annehmen wollen, immer der in §. 4. durch $\Theta$ bezeichnete Winkel unmittelbar ergiebt, indem z. B. für den Hauptregenbogen, welchen man natürlich seines grösseren Glanzes wegen bei der-

gleichen Messung immer vorzugsweise anwenden wird, $\Theta = -\omega$ ist, wobei man sich nur an die aus §.4. bekannte Bedeutung von $\Theta$ erinnern muss.

Wenn auch die im Vorhergehenden erläuterte Beobachtungsmethode allerdings etwas weitläufig ist, und zugleich längere Rechnungen erfordert, so scheint mir dieselbe doch allein hinreichend genaue Resultate herbeiführen zu können geeignet zu sein. Auch muss ich es als einen besondern Vorzug derselben betrachten, dass sie die Kenntniss der Höhe der Sonne gar nicht erfordert, und also dem Beobachter den Besitz einer genau berichtigten Uhr, welche auch, wenn es auf wirkliche astronomische Bestimmungen ankäme, natürlich nur ein eigentlicher Chronometer sein könnte, völlig entbehrlich macht. Solche genaue und kostspielige astronomische Instrumente und die Fähigkeit, dieselben durch Beobachtungen am Himmel gehörig zu berichtigen, so wie auch hinreichende Uebung in astronomischen Rechnungen, werden wohl schwerlich immer denen zu Gebote stehen, welche sich gern mit der Beobachtung des Regenbogens und anderer optischer Erscheinungen in der Atmosphäre beschäftigen möchten.

Leichter als vorher gelehrt worden ist kann man freilich zum Ziele gelangen, wenn man bloss die Höhe des höchsten Punktes des Regenbogens misst, die Zeit der Messung an einem genau berichtigten Chronometer beobachtet, und die entsprechende Höhe der Sonne mit Hülfe der als bekannt vorausgesetzten geographischen Länge und Breite des Beobachtungsortes aus den astronomischen Tafeln oder Ephemeriden berechnet, wozu in astronomischen Lehrbüchern die weitere Anleitung zu suchen ist. Bezeichnen wir dann die Höhe des höchsten Punktes des Regenbogens durch $H$ und die aus den astronomischen Tafeln oder Ephemeriden berechnete entsprechende Höhe der Sonne durch $\mathfrak{H}$, so ist offenbar

$$\omega = H + \mathfrak{H}.$$

Wenn man $\mathfrak{H}$ auf den Mittelpunkt der Sonne bezieht, so ist auch mit dem Theodoliten jederzeit auf die Mitte des beobachteten farbigen Bogens an seinem Gipfel zu pointiren, was überdies auch in mehreren Beziehungen, z. B. wegen des grössten Glanzes der Bogen in ihrer Mitte, immer das Beste sein wird. So leicht und einfach diese Methode auch auf den ersten Anblick scheint, so setzt sie doch Bedingungen voraus, deren Erfüllung für viele Beobachter, wenn dieselben auch mit guten Theodoliten versehen sind, nicht leicht, ja selbst nicht selten völlig unmöglich sein möchte. Die im ersten Theile dieses Paragraphen gelehrte Methode erfordert da-

gegen nur den Gebrauch eines Theodoliten und einer gewöhnlichen, nur Secunden zeigenden Taschenuhr, die gar nicht astronomisch genau berichtigt zu sein braucht, und nimmt überdies gar keine astronomischen Kenntnisse und Uebung in astronomischen Rechnungen und dem Gebrauche der astronomischen Tafeln in Anspruch. Allenfalls könnte man freilich bei der zweiten Methode auch die Höhe der Sonne durch unmittelbare Messung bestimmen, was aber doch in mancher Rücksicht nicht rathsam sein möchte.

## §. 41.

Zum Schluss diesr Abhandlung will ich nun noch in der Kürze die von andern Physikern gegebenen Erklärungen der secundären oder überzähligen Regenbogen erwähnen.

In vorzüglichem Ansehen hat längere Zeit die von Venturi in seinen Commentari sopra la Storia e le Teorie dell' Ottica. Bologna. 1814. gegebene, besonders durch Brandes in dem in Gilbert's Annalen der Physik. Band LII. Leipzig. 1816. S. 385. abgedruckten Aufsatze: Venturi's Theorie des farbigen Bogens, welcher sich oft an der innern Seite des Regenbogens zeigt, dargestellt mit einigen Anmerkungen von H. W. Brandes empfohlene Erklärung gestanden. Späterhin hat jedoch Brandes diese Theorie wohl grösstentheils aufgegeben, und spricht sich z. B. in seinem neuesten Werke: Vorlesungen über die Naturlehre für Leser, denen es an mathematischen Vorkenntnissen fehlt, von H. W. Brandes. Zweite vermehrte und verbesserte Ausgabe, besorgt von C. W. H. Brandes und W. I. H. Michaelis. Leipzig. 1844. S. 498. auf folgende Art über dieselbe aus.

„Venturi hat diese Erscheinung aus einer abgeplatteten Form der Regentropfen erklärt, indem er ganz richtig zeigt, dass Tropfen, die mehr breit als hoch sind, einen niedrigern Farbenbogen darstellen müssen; aber so richtig dieses ist, so müsste man, wie es mir scheint, Regentropfen von so vielen bestimmten Formen, als es die Anzahl dieser wiederholten Bogen fordert, annehmen, und dürfte nicht zugestehen, dass zwischen ihnen Uebergänge statt fänden; dieses scheint jedoch um so minder glaublich, da es ausser den Kugeltropfen, die den Hauptbogen darstellen, wenigstens noch zwei andere bestimmte Formen geben müsste, um die zwei so oft deutlich sichtbaren Farbenwiederholungen zu geben. Möglich wäre es übrigens, dass die durch den Widerstand der

Luft bestimmte Gestalt der Regentropfen einen Grund für die zur Entstehung mehrerer Bogen nöthige Form enthielte."

In der neuen Ausgabe des Physikalischen Wörterbuchs von Gehler. Band VII. Abth. 2. S. 1333. bemerkt Brandes noch:

„Ein anderer Einwurf ist, dass diese Nebenbogen sich gegen den untern Theil des Regenbogens nicht allmälig an ihn anschliessen (wie es wegen der je mehr und mehr kreisförmigen Querschnitte der Fall sein sollte), sondern gleich entfernt bleiben, aber immer matter sich endlich ganz verlieren."

„Der Gedanke, dass eine genaue Kenntniss der Gestalt der Tropfen dieser Untersuchung zur Grundlage dienen müsse, welchen ich einmal gegen den Professor Scholz äusserte, veranlasste diesen seine Abhandlung: De figura guttae cadentis in aëre resistente (Bresl. 1826.) zu schreiben."

Man wird aus diesen Andeutungen mit hinreichender Deutlichkeit erkennen, worin Venturi's Erklärung der Hauptsache nach besteht. Wenn dieselbe auch keineswegs von Zweifeln frei ist, so scheint sie mir doch immer noch eine sorgfältigere Prüfung, als bisher geschehen ist, durch Beobachtung und Rechnung zu verdienen; und da mir die von Venturi gegebenen mathematischen Entwickelungen an vielen Schwächen zu leiden scheinen, so habe ich im Obigen (§. 10. ff. und §. 23. ff.) die Brechung und Zurückwerfung in elliptischen Tropfen einer ausführlichen sorgfältigen Untersuchung unterworfen, spare aber die Anwendung der von mir entwickelten Formeln zur genaueren Prüfung der von Venturi gegebenen Erklärung für spätere besondere, diesem Gegenstande gewidmete Aufsätze auf.

§. 42.

Als ein Interferenzphänomen hat zuerst Thomas Young die secundären oder überzähligen Regenbogen betrachtet, und sagt darüber (Gilbert's Annalen der Physik. Band XXXIX. Leipzig. 1811. S. 272.) Folgendes.

„Die Wiederholung der Farben, die zuweilen in dem gemeinen Regenbogen bemerkt werden, und welche D. Langwith und Herr Daval in den Philosophical Transactions beschrieben haben, lassen sich ebenfalls leicht und vollständig aus denselben Grundsätzen erklären. D. Pemberton hat sich bemüht, eine Aehnlichkeit zwi-

schen diesen Farben und den Farben dünner Scheiben zu zeigen; aber die unregelmässige Reflexion von der hintern Fläche des Tropfens, welcher er die Erscheinung ganz allein zuschreibt, muss sehr viel zu schwach sein, um sichtbare Effecte hervorzubringen. Um diese Erscheinung zu begreifen, dürfen wir bloss auf die beiden Lichtbündel sehen, welche in den bekannten erklärenden Vorstellungen des Regenbogens angegeben werden, und welche von der hintern Fläche des Tropfens regelmässig reflectirt sich einander in verschiedenen Richtungen durchschneiden, bis sie unter dem Winkel der grössten Ablenkung mit einander zusammenfallen, wo sie, vermöge der grössern Dichtigkeit des verdoppelten Lichts, den gewöhnlichen Regenbogen für 41 Grade hervorbringen. Andere Theile dieser beiden Bündel verlassen den Tropfen nach Richtungen, die einander parallel sind, und diese verursachen eine fortgesetzte Verbreitung eines schwächern Lichts auf 25° innerhalb der hellen Grenze, welche den Regenbogen bildet, wiewohl nach dem allgemeinen Gesetze der Vermischung, welche, wie in andern ähnlichen Fällen, das Licht in concentrische Ringe vertheilt. Die Grösse dieser Ringe hängt von der Grösse der Tropfen ab, nach Maassgabe der Differenz der Zeit, welche die beiden Lichtbündel in ihrem Fortgange verwenden, die solchergestalt nach parallelen Richtungen in das Auge des Beobachters gelangen, nachdem sie in dem Tropfen verschiedentlich gebrochen und reflectirt worden sind. Diese Differenz verändert sich anfänglich beinahe wie das Quadrat der Entfernung in Graden von dem Hauptregenbogen; wenn aber das erste Nebenroth sich nur 2 Grad von dem Roth des Regenbogens entfernt befindet, dass es sich etwas mit dem Violet des ersten Regenbogens vermischt, so wird die vierte Nebenröthe in einer beinahe um 2 Grad grössern Entfernung erscheinen, und die mittlern Farben werden einen dem ersten Regenbogen beinahe gleichen Raum einnehmen. Um diesen Effect hervorzubringen, müssen die Tropfen $^1/_{76}$ eines Zolls oder 0,013 im Durchmesser halten; sie dürfen auch nur zwischen $^1/_{70}$ bis $^1/_{80}$ Zoll betragen. Die Ursache, warum dergleichen Nebenregenbogen nicht öfter gesehen werden, muss in der Seltenheit des Ereignisses liegen, dass Tropfen von beinahe gleicher Grösse sich neben einander befinden; dass sich aber dieses zuweilen ereignen kann, dieses ist an sich gar nicht unwahrscheinlich. Wir messen ja auch die Medicin ab, indem wir sie aus einem Glase tropfen lassen, und man kann sich leicht vorstellen, dass die von der Natur gebildeten Tropfen zuweilen eben so gleichförmig sein können, als die durch Kunst hervorgebrach-

ten. Wie genau diese Theorie mit den Beobachtungen übereintrifft, kann man am besten aus D. Langwith's eigenen Worten sehen."

„„Den 21. August 1722 Abends halb 6 Uhr, bei gemässigter Witterung und nordöstlichem Winde, war die Erscheinung folgende: Die Farben des ersten Regenbogens waren wie gewöhnlich, nur das Purpur näherte sich mehr dem Rothen und war gut begrenzt; unter diesem stand ein Bogen von Grün, dessen oberer Theil in ein helles Gelb und der untere in ein dunkleres Grün überging; unter diesen waren abwechselnd zwei Bogen von röthlich Purpur und zwei von Grün; und unter allen ein schwacher Schein eines andern purpurnen Bogens, welcher verschwand und verschiedene Male so geschwind wieder erschien, dass wir fast nicht so geschwind sehen konnten. Solchem nach wäre die Ordnung der Farben: 1) Roth, Orange, Gelb, Grün, hell Blau, dunkel Blau, Purpur; 2) lichtes Grün, dunkel Grün, Purpur; 3) Grün, Purpur; 4) Grün, schwach verschwindender Purpur. Wir sehen hier vier Farbenreihen und vielleicht auch den Anfang einer fünften; denn ich bin überzeugt, dass die Farbe, welche ich Purpur nenne, eine Mischung aus dem Purpur der obern und aus dem Roth der nähesten untern Reihe, und dass das Grün eine Mischung der mittlern Farben gewesen sei. Bei dieser Beschreibung verlasse ich mich nicht ganz allein auf das Zeugniss meiner Augen; denn es befanden sich ein Geistlicher und vier andere Herren in meiner Gesellschaft, die ich bat, auf die Farben genau aufmerksam zu sein, und die alle übereinstimmten, dass die Erscheinung so gewesen sei, wie ich sie jetzt beschrieben habe. Es giebt hier zwei Umstände, welche wohl verdienen bemerkt zu werden, da sie uns vielleicht einigermassen auf die Auflösung dieser merkwürdigen Erscheinung führen können. Der erste ist: Dass die Breite der ersten Reihe eine jede der übrigen so sehr übertrifft, dass, so viel man beurtheilen konnte, sie allen den übrigen zusammengenommen gleich war. Der zweite ist: dass ich niemals dieselbe innere Farbenordnung in den untern Theilen des Regenbogens gesehen habe, ob sie gleich oft viel lebhafter waren, als die obern Theile, wo sich die Farben zeigten. Ich habe dieselben so oft beobachtet, dass ich sie schwerlich als zufällig betrachten kann; sollten sie sich aber allgemein als wahr zeigen, so würden sie die Untersuchung sehr verkürzen, denn sie würden zeigen, dass diese Effecte von einer Eigenschaft abhängen, welche die Tropfen beibehalten, so lange sie sich in der obern Luftregion befinden, die sie aber verlieren, wenn sie sich heruntersenken

und mehr mit einander vermischt sind (Philosophical Transactions. Vol. XXXII. London. 1724. p. 241.)““

„Aus der Betrachtung der Natur eines Nebenregenbogens von 54° kann man schliessen, dass, wenn einige solcher überzähligen Farben bei diesem Regenbogen gesehen werden, sie sich ausserhalb desselben, statt innerhalb, zeigen werden. Die Ringe, welche zuweilen den Schatten des Beobachters in einem Nebel umgeben, sind vielleicht mit mehrerem Rechte mit den gewöhnlichen Farben dünner Scheiben, als mit den durch Reflexion gesehenen zu vergleichen.“

In dem Annuaire von 1836 tritt Arago der vorhergehenden von Young gegebenen Erklärung bei, und spricht sich über dieselbe auf folgende Art aus.

„Die überzähligen Bogen scheinen eine Wirkung von Lichtinterferenzen zu sein, und diese Interferenzen können nur durch Tropfen von gewisser Kleinheit erzeugt werden. Auch müssen, damit das Phänomen einige Intensität habe, die Regentropfen nicht nur die erforderliche Grösse besitzen, sondern auch, wenigstens der Mehrzahl nach, die Bedingung einer fast mathematischen Gleichheit der Dimensionen erfüllen. Wenn also die Regenbogen der Aequinoxial-Regionen fast nie diese supernumeraren Farbenbogen zeigten, so wäre dies ein Beweis, dass sich dort grössere und ungleichere Regentropfen von den Wolken ablösten als in unserem Klima. In der Unwissenheit, in welcher wir hinsichtlich der Ursache des Regens leben, würde diese Angabe nicht ohne Interesse sein.

Steht die Sonne tief, so steht dagegen der obere Theil des Regenbogens sehr hoch, und in diesem Scheitel zeigen sich die überzähligen Farben in ihrem vollen Glanze. Von da an nehmen sie rasch ab. In den unteren Regionen, gegen den Horizont, selbst noch ziemlich über demselben, gewahrt man, wenigstens in Europa, niemals eine Spur von ihnen. Es müssen also die Regentropfen während ihres senkrechten Falls die Eigenschaft verlieren, welche sie zuvor besassen; sie müssen den Bedingungen zu wirksamen Lichtinterferenzen nicht mehr genügen, kurz sich vergrössert haben. Ist es, beiläufig gesagt, nicht sonderbar, in einer optischen Erscheinung, in einer Particularität des Regenbogens, den Beweis zu finden, dass in Europa die Regenmenge desto geringer sein muss, je höher der Behälter steht, in welcher man sie auffängt.

Die Vergrösserung der Tropfen rührt ohne Zweifel davon her, dass sich Feuchtigkeit auf ihre Oberfläche niederschlägt, in dem Maasse als sie aus den kalten Regionen ihrer Entstehung die wärmeren Luftschichten näher an der Erde durchfallen. Es ist also gewiss, dass wenn sich in den Aequinoxial-Regionen, wie in Europa, überzählige Regenbogen bilden, diese niemals den Horizont erreichen können; allein es scheint, dass der Vergleich des Winkels, bei welchem sie aufhören sichtbar zu sein, mit dem Winkel, bei welchen sie in unsern Klimaten verschwinden, zu meteorologischen Resultaten führen werde, die keine andere bisher bekannte Methode zu liefern im Stande ist." (Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Band XXXVII. Leipzig. 1836. S. 455.).

In einem aus den Transactions of the Cambridge Philosoph. Society. Vol. VI. p. 379. in Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Ergänzungsband. Leipzig. 1842. S. 232. übersetzten Aufsatze: Ueber die Intensität des Lichts in der Nähe einer Brennlinie, hat Airy der obigen Erklärung durch die strenge Anwendung der mathematischen Undulationstheorie eine neue Stütze zu geben versucht, worüber ich aber begreiflicherweise in der vorliegenden Abhandlung, ohne mich in zu grosse Weitläufigkeiten zu verlieren, nichts weiter sagen kann. Miller und Galle (Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Band LIII. S. 214. und Band LXIII. S. 342.) haben aber die von Airy gegebene Theorie durch genaue Messungen zu bestätigen sich bemühet.

## §. 43.

Erwähnen muss ich endlich noch einen von Brandes zuerst in Gilbert's Annalen der Physik. Band XIX. S. 464. gegebenen, und dann sowohl in dem Physikalischen Wörterbuche. Band VII. Abth. 2. S. 1333., als auch namentlich in den oben angeführten Vorlesungen über die Naturlehre. S. 498 wiederholten Erklärungsversuch.

„Da alle diese Erklärungen" — sagt Brandes im Physikalischen Wörterbuche a. a. O. — „nicht genügend scheinen, so bin ich öfter wieder zu einem Erklärungsversuche zurückgekehrt, den ich schon vor langer Zeit bekannt gemacht habe; indess, da auch dieser mir nicht genug sichere Gründe für sich zu haben scheint, so will ich ihn nur kurz erwähnen. Wir sehen so oft,

wenn die Sonne mit dünnen Wolken bedeckt ist, Höfe von der Art, deren Durchmesser nur wenige Grade beträgt, um die Sonne; die Farben dieser Höfe sind, wie man am besten an der im Wasser gespiegelten Sonne sieht, von sehr glänzenden Farben, und Grün und Violett sind vorzüglich darin kenntlich. Die Strahlen, die unserem Auge diese Höfe zeigen, fallen auch auf die Regentropfen, und ein Punkt des grünen Hofs sollte einen grünen Regenbogen, ein Punkt des violetten Hofs einen violetten Regenbogen u. s. w. hervorbringen. Denken wir nun zuerst nur an Punkte des Hofs, die gerade über der Sonne stehen, so würden diese einen innern Nebenbogen hervorbringen, und diesen vorzüglich nur durch die stärker brechbaren Farben, Grün, Blau, Violett, weil der rothe und gelbe Bogen sich mit dem Blau und Violett des Hauptbogens mischen und unkenntlich werden würde. Betrachten wir ferner die unter der Sonne stehenden Theile des Rings, so sollten diese einen Nebenbogen oberhalb des Hauptbogens hervorbringen; aber dieser Nebenbogen erscheint erstlich in Beziehung auf das Grün, Blau, Violett nicht, weil diese Farben von einem nicht sehr grossen Hofe, nicht sehr entfernt von der Sonne, ausgehend noch auf den Hauptbogen fallen würden, und zweitens auch in Beziehung auf das Roth nicht, weil nach der Ordnung, welche die Farben in den Höfen beobachten, der aus dem grünen oder violetten Hofe hervorgehende, oberhalb des Hauptbogens liegende Nebenbogen sich mit dem rothen verbindet und daher keine Farbe kenntlich bleibt. So kann an der obern Seite des Regenbogens kein Nebenbogen entstehen, weil hier die den verschiedenen Farben des Hofs entsprechenden Nebenbogen auf einander fallen, wogegen sie an der inneren Seite stärker getrennt erscheinen. Diese Betrachtung scheint einiges Vertrauen für diese Erklärung zu erwecken, aber es bleiben dennoch Schwierigkeiten übrig, die theils in der Schwäche jener Höfe, theils in dem Umstande liegen, dass die Nebenbogen nur am höheren Theile des Bogens erscheinen. Diese Nebenbogen verdienen daher immer noch genau beobachtet zu werden, indem die Aufmerksamkeit auf alle Umstände vielleicht zu einem genügenden Erklärungsgrunde führt."

In den Vorlesungen über die Naturlehre. S. 498., seinem neuesten Werke, scheint Brandes geneigt zu sein, der vorhergehenden Erklärung den Vorzug vor allen übrigen zu geben.

Helwag (Abhandlung von vielfachen Regenbogen im Neuen deutschen Museum. 1790. S. 420.) ist der Meinung,

dass Wellen auf der Oberfläche der Regentropfen die Veranlassung zur Entstehung der secundären Bogen geben könnten.

Jedenfalls sieht man aus diesen verschiedenen sehr von einander abweichenden Erklärungen der secundären Bogen, dass hier noch ein weites Feld zu physikalischen Untersuchungen und Forschungen vorliegt, dessen Bebauung die Physiker sich mehr als bisher angelegen sein lassen sollten.

---

# II.

# Miscellen.

---

## Ueber die Krystallform des Eises.

In dem

Jahresbericht über die Fortschritte der physischen Wissenschaften von Jacob Berzelius. Aus dem Schwedischen übersetzt von C. G. Gmelin. Dritter Jahrgang. Tübingen. 1824. S. 57.

finden sich die folgenden Bemerkungen über die Krystallform des Eises.

„Wir sehen unaufhörlich alle Jahre das Wasser durch die Winterkälte an unsern Fenstern krystallisiren, und Eisnadeln auf der Oberfläche des Wassers sich bilden, ehe das Ganze zu Einer Masse erstarrt; von Schneeflocken hat man mehr als 200 verschiedene regelmässige Formen wahrgenommen und verzeichnet, und bei allem diesen hat man dennoch über die wirkliche Form des am allgemeinsten vorkommenden krystallisirenden Stoffes mit Gewissheit nicht mehr bestimmen können, als dass die Eisnadeln von einander unter Winkeln von 60° und 120° ausschiessen. Hauy schloss daraus, dass die primitive Krystallform ganz dieselbe sein könnte, wie die des Flussspaths, d. h. dass sie aus tetraëdrischen Molecülen bestehe, die zu regelmässigen Octaëdern zusammengefügt sind. Hericart de Thury fand in der natürlichen Eisgrube bei Fondeurle in der Dauphiné eine Menge von Eiskrystallen, welche sechsseitige Prismen bildeten, deren Endfläche Streifen hatte, welche mit den Seitenflächen parallel waren, und deren Endkanten bisweilen durch

Facetten ersetzt waren, aber nirgends fand sich eine ausgebildete pyramidalische Zuspitzung. Clarke in Cambridge beobachtete an einem Januarstage 1822 bei $^1/_2$ Grad Kälte eine Menge von Krystall-Facetten an Eiszapfen, welche unter einer hölzernen Brücke hingen, in der Nähe eines Wasserfalls, der unaufhörlich eine Art von Nebel bildete, dessen Theile nachher an den Eiszapfen unter der Brücke anschossen. Man nahm diese weg und fand, dass sie vollkommene rhomboidalische Krystalle bildeten, deren Winkel, mit dem Goniometer gemessen, $60^0$ und $120^0$ waren. Diese Krystalle erhielten sich mehrere Tage, so dass die Erscheinung von mehreren Mitgliedern der wissenschaftlichen Gesellschaft zu Cambridge bewährt werden konnte, und als nachher Thauwetter einfiel, behielten die Krystalle während ihres Schmelzens beständig die rhomboidalische Form bei. Die vornehmste Ursache, warum man so selten regelmässige Krystalle von Eis zu sehen bekommt, scheint die zu sein, dass sie immer an der Oberfläche im Wasser sich bilden, und mithin von Theilen umgeben sind, welche eben so stark sich bestreben, die feste Form anzunehmen und sich zu agglutiniren, so dass sich die Krystalle darin nicht anders als in einer und derselben Horizontalebene verlängern können; auch geht diese Krystallisation gewöhnlich zu schnell vor sich. Man kann daher hauptsächlich eben in solchen Fällen, wo das Wasser langsam aus der Luft an kalten festen Körpern anschiesst, eine deutliche Form erwarten, wenn dieser Zustand so lange fortdauert, dass die Krystalle gross werden können, welches wiederum selten der Fall ist."

---

## Druckfehler.

S. 8. Z. 9. statt $\Omega\ (= n\pi - 2\omega)$ setze man $\Omega = n(\pi - 2\omega)$.
S. 20. Z. 14. statt $tang\, i = (n + i)\, tang\, i_1$ setze man $tang\, i = (n + 1)\, tang\, i_1$.

---

Druck von C. P. Melzer in Leipzig.

# Beiträge

zur

# meteorologischen Optik

und

# zu verwandten Wissenschaften.

In zwanglosen Heften

herausgegeben

von

**Johann August Grunert,**

Doctór der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Erfurt, der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg und der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig, auswärtigem Mitgliede der Königlich Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, correspondirendem Mitgliede der Königlich Baierischen Akademie der Wissenschaften zu München, der Königlich Schwedischen Societät der Wissenschaften zu Upsala und der Kaiserlich Oesterreichischen Akademie der Wissenschaften zu Wien, ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Danzig, Halle, Marburg und Leipzig.

Erster Theil. Zweites Heft.

Mit vier lithographirten Tafeln.

Leipzig, 1848.

Verlag von E. B. Schwickert.

# III.

## Die drei wichtigsten älteren Hof- und Nebensonnen-Phänomene, nämlich das Römische, das Danziger und das Petersburger Phänomen,

genau nach den Quellen dargestellt

nebst Bemerkungen über derartige Phänomene überhaupt

von

***Herrn W. E. T. Kuhse,***

Candidaten des höheren Schulamts zu Greifswald.

---

### 1.

Die merkwürdigen Lichterscheinungen, welche im Bereiche unserer Atmosphäre vor sich gehen, haben schon sehr lange die Naturforscher beschäftigt; doch haben bisher nur verhältnissmässig wenige derselben, wie z. B. der Regenbogen, die wünschenswerthe vollständige Erklärung gefunden. Zu den noch problematischen Erscheinungen gehören auch die grösseren und kleineren Ringe, Bogen und Streifen, welche häufig an den grösseren Gestirnen, namentlich an Sonne und Mond, und zwar oft mit Nebensonnen oder Nebenmonden verbunden, beobachtet sind. Es kann eben nicht befremden, wenn die heidnischen Griechen und Römer bei dem damaligen Zustande der Naturwissenschaften diesen ihnen wunderbaren Phänomenen nur in religiöser Beziehung ihre Aufmerksamkeit schenkten, wenn sie die ihrer Meinung nach dadurch angekündigten Strafen der Gottheiten durch Sühnopfer abzuwehren suchten, und über dergleichen für uns lächerliche Aeusserlichkeiten die Erforschung des eigentlichen Wesens jener Erscheinungen vergassen. Aber selbst noch im Anfange des 17. Jahrhunderts, nachdem durch hochberühmte

Männer, wie Galilaei, Kepler, Baco die alte Philosophie in ihren Grundlagen erschüttert und der wahre Weg zur Erforschung der Naturerscheinungen wieder aufgedeckt war, verfiel Cartesius bei Erklärung der obigen Meteore in so grosse Irrthümer, dass man sich wundern muss, wie dieselben sich dennoch auch nur eine Zeit lang erhalten konnten. Denn welche Vorstellung möchte vernunftwidriger sein, als die, durch direct entgegengesetzte Luftströmungen einen ungeheuren Eiscylinder in den oberen Schichten unserer Atmosphäre sich bilden zu lassen, der dann wunderbarer Weise die Sonne oder den Mond stundenlang und selbst tagelang regelmässig begleiten müsste! Und sind auch die Erklärungsversuche später lebender Physiker, wie die von Huygens, und in ganz neuer Zeit von Venturi, Fraunhofer, Brandes u. a. immer mehr und mehr gelungen, so ist man doch noch nicht dahin gelangt, eine vollständig genügende Theorie der Nebensonnen oder Nebenmonde, und aller damit in Verbindung stehenden kreisförmigen oder elliptischen Bogen und geraden Lichtstreifen zu liefern.

Von Thatsachen muss man bei Erforschung der Natur fast überall ausgehen, um darauf Rechnungen stützen zu können. Nur so darf man hoffen, endlich in den Zusammenhang der Erscheinungen zu dringen. Zwar findet man in manchen älteren und neueren Werken schon mehr oder minder zahlreiche Zusammenstellungen von beobachteten Höfen und Nebensonnen, wie z. B. bei Hevel *), bei Huygens **), Fraunhofer ***) u. a.; doch habe ich noch nirgends die vollständigen, nach den Quellen dargestellten Beschreibungen der drei wichtigsten älteren Nebensonnen-Phänomene, nämlich des römischen Phänomens vom 20. März 1629, des Danziger vom 20. Februar 1661 und des Petersburger vom $\frac{18.}{29.}$ Juni 1790 beisammen gefunden, an denen doch so ziemlich alle möglicher Weise vorkommenden Theile der Erscheinung wahrzunehmen sind, und ich glaube daher der Wissenschaft einen Dienst zu leisten, wenn ich

*) Johannis Hevelii Mercurius in Sole visus Gedani etc. — Cui annexa est Venus in Sole pariter visa, anno 1639, etc. Quibus accedit succincta Historiola novae illius ac mirae Stellae in collo Ceti, etc. — Nec non genuina delineatio Paraselenarum et Pareliorum quorundam rarissimorum. Gedani. Anno 1662.

**) Christ. Hugenii Opp. reliqua. Opuscula posthuma; Tom. II., quo continentur Dissertatio de coronis et parheliis, etc. Amstel. 1728.

***) Schum. astron. Abh. Hft. 3. 1825.

diese Beschreibungen hier nach einander folgen lasse. Dabei bemerke ich aber, dass es zunächst rücksichtlich des genannten Römischen Phänomens nöthig war, auch sogleich ein anderes ähnliches, zu Rom im Jahre 1630 beobachtetes Phänomen zu erwähnen, da wir von jenem ersteren nur eine sehr unvollkommene Zeichnung und Beschreibung übrig haben, welche erst durch die Zeichnung und Beschreibung des zweiten hinreichend verständlich wird. Dann habe ich der Darstellung des Danziger Phänomens, wie wir sie bei Hevel finden, noch die einiger anderer daselbst mitgetheilter Hof-Phänomene beigefügt, und auf diese Weise unter 3. eine vollständige Uebersetzung der kleinen Hevel'schen Schrift de rarissimis quibusdam Paraselenis ac Pareliis, Gedani observatis geliefert, um dadurch dieser wichtigen Schrift eine allgemeinere Verbreitung zu verschaffen. Endlich fand ich für gut, unter 5. allen diesen Phänomenen noch einige Bemerkungen beizufügen, namentlich auch der Beobachtungen von Aepinus zu Petersburg vom Jahre 1758 in grösserem Umfange Erwähnung zu thun, da durch diese letzteren noch ein sehr merkwürdiger Theil der Gesammt-Erscheinung uns bekannt wird, welcher bei den obigen drei Haupt-Phänomenen wenigstens nicht bestimmt genug hervortritt.

---

## 2.

## Das Römische Phänomen *),

beobachtet von **Scheiner** am 20. März 1629 zwischen 2 und 3 Uhr Nachmittags.

Dieses Römische Phänomen finden wir nach der Originalzeichnung dargestellt auf Taf. II. Fig. 1. *A* ist der Ort des Römischen Beobachters, *B* sein Scheitelpunkt, *C* der Ort der wahren Sonne.

*) Renati Des-Cartes Opera Philosophica. II. Specimina Philosophiae: seu Dissertatio de methodo recte regendae rationis et veritatis, in scientiis investigandae: Dioptrice, et Meteora. Ex Gallico translata et ab Auctore perlecta variisque in locis emendata. Amstel. 1677. — Das französische Original dieser Dissertatio führt den Titel: discours de la méthode, pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences. Plus la dioptrique, les météores et la géométrie, qui sont des essais de cette méthode. A Leyde. 1637. — Das Röm. Phän. findet sich beschrieben in dem Theile „Meteora." Cap. X.

Die Linie *AB* stellt die Verticalebene dar, in welcher das Auge des Beobachters, die von ihm gesehene wahre Sonne und der Scheitelpunkt des Beobachtungsortes liegen. Um die Sonne *C* erschienen zwei unvollständige, zu ihr concentrische, regenbogenartige, verschiedenfarbige Kreise, von denen der kleinere oder untere *DEF* voller und ausgebildeter war; nur von *D* bis *F* zeigte sich der Kreisbogen mangelhaft, oder fehlte auch ganz, indem er nämlich fortwährend auf dem Punkte stand, sich zu schliessen, und auch zuweilen wirklich sich schloss, bald aber von neuem sich öffnete. Der andere Kreis *GHI*, der zweite nach aussen, war immer schwach und kaum sichtbar, liess jedoch seine verschiedenen, aber sehr unbeständigen Farben erkennen. Ein dritter und einfarbiger, und zwar sehr grosser Kreis war *KLMN*, ganz weiss, wie deren häufig bei den Nebenmonden um den Mond herum gesehen werden; es war dies ein excentrischer, mitten durch die Sonne hindurch gehender Bogen, welcher anfangs vollständig, am Ende aber von *M* nach *N* schwach und zerrissen, ja so gut wie gar nicht sich zeigte. Uebrigens wurden in den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkten dieses Kreises mit dem äusseren farbigen Bogen *GHI* zwei Nebensonnen sichtbar, *N* und *K*, die aber nicht so gar vollständig waren, und von denen die letztere schwächer, jene aber stärker und lichtvoller glänzte. Beide leuchteten in ihrer Mitte sonnenähnlich; ihre Seiten dagegen erschienen in Regenbogenfarben; ihre Ränder waren nicht rund und glatt abgeschnitten, sondern ungleich und höckricht. *N* erschien sehr unruhig und warf einen dichten feuerfarbenen Schweif *NOP* mit fortwährender Bewegung von sich. *L* und *M* standen nach hinten über das Zenith hinaus, waren weniger lebhaft als die vorigen, aber abgerundeter und, gleich wie ihr Kreis, in dem sie schwebten, weiss wie Milch oder wie reines Silber. Gleichwohl war *M* um halb drei Uhr fast schon verschwunden, und zeigte hierauf nur geringe Spuren von sich, so wie denn auch der Kreis an jener Seite verschwunden war. Die Sonne *N* verschwand vor der Sonne *K*, und so wie jene verschwand, ward *K* stärker; diese verschwand von allen zuletzt u. s. w.

Hiermit bricht Descartes seine Beschreibung ab, die er, seiner Aussage nach, mit denselben Worten wieder giebt, wie sie früher (1629) veröffentlicht worden ist.

Die grossen Mängel dieser Darstellung fallen sogleich in die Augen, wenn man nur darauf Acht hat, wie hier nichts von der Ordnung der Farben, nichts von der Grösse der Höfe, nichts von dem Durchmesser der Nebensonnen in Bezug auf die Breite des

weissen Horizontalkreises gesagt ist. Auch nicht einmal der Name des Beobachters wird von Descartes mitgetheilt. Ueberdies ist die Zeichnung höchst ungenau, zum Theil, wie man dies aus anderen Beobachtungen zu schliessen berechtigt ist, selbst falsch, indem der zweite Kreis *GHNI* etwa noch einmal so weit von der Sonne entfernt ist, als der erste *DEF*, und ferner der Schweif einer Nebensonne niemals ausserhalb, sondern stets innerhalb des zugehörigen Horizontalkreises gesehen ist. Diese Ungenauigkeiten in der Beschreibung werden grösstentheils in einem Briefe des Beobachters an Gassendi ergänzt, welchen uns wenigstens theilweise Huygens in seiner Abhandlung de coronis et parheliis aufbewahrt hat *).

Als nämlich Gassendi eine rohe Zeichnung des von Scheiner 1630 zu Rom beobachteten Phänomens gesehen hatte, erbat er sich von Letzterem eine genauere Beschreibung desselben. (Epist. pag. 43. Tom. 6.). Darauf antwortet Scheiner (p. 401. ejusd. Tom. 6. operum Gassendi): Es sei von beiden Phänomenen, von 1629 und 1630, fast ein und dasselbe zu sagen; eine Zeichnung habe er davon zu Rom niemals drucken lassen. Die Durchmesser der Kreise seien ungefähr 45° und etwa 95° 20′ gewesen. Die Farben, wie am ersten Regenbogen **), purpur oder roth zunächst der Sonne, die übrigen in der gewöhnlichen Reihenfolge. Die Breite oder Dicke aller jener Bogen gleich, jedoch etwa um 1/4 kleiner als der Sonnendurchmesser (vgl. Taf. II. Fig. 2.). Er wolle aber nicht läugnen, dass der mit dem Horizonte parallele weisse Kreis etwas breiter gewesen sein möchte, als die übrigen Bogen. Die Nebensonnen vom Jahre 1630 hätten folgendermassen sich gezeigt: „Die beiden in *M* und *N* (Taf. II. Fig. 2,) glänzten sehr lebhaft, die beiden anderen in *O* und *P* weniger; *M* und *N* waren an der der Sonne zugekehrten Seite purpurroth, an der abgewandten von weisser Farbe; *O* und *P* waren ganz weiss. Sie dauerten alle verschieden lange. Denn das Sonnenbild in *P* schimmerte schwach und selten, und erlosch früher als alle, nachdem sich ebenda ziemlich dichte Wolken angehäuft hatten. Das Sonnenbild *O*

---

*) Chr. Hugenii Opusc. posth. Tom. II. p. 65. sqq.

**) Es erscheinen die Höfe stets mit der rothen Farbe nach ihrem Mittelpunkte zu, während beim inneren Regenbogen die rothe Farbe vom Mittelpunkte aus doch nach aussen hin liegt. Es erscheint also dem Beobachter die Farbenfolge bei den Höfen gerade in der umgekehrten Lage wie beim inneren Regenbogen.

war auch schwach, aber doch beständig genug, und dauerte lange. Die beiden seitlichen Sonnen in *M* und *N* waren drei Stunden hindurch ununterbrochen sichtbar; jedoch erlosch zuerst und nach vielem Wechsel die unächte Sonne in *M*, die andere aber in *N* hielt sich dann noch länger als eine Stunde.“ „Ich konnte,“ sagt Scheiner, „das letzte Verlöschen derselben, nachdem ich von Hause weggegangen war, nicht wahrnehmen, bin aber versichert, dass sie mit der wahren Sonne zugleich sich lange allein gezeigt habe, weder durch Wolken, noch durch Dünste oder Nebel, gleich den anderen, verdunkelt. Als jedoch endlich Regen eintrat, hörte auch diese auf, sichtbar zu sein“ *).

Nimmt man auf Anfang und Ende der Beobachtung Rücksicht, so findet man als Dauer des Phänomens mindestens $4^1/_2$ Stunden. Da dasselbe indess schon vollkommen ausgebildet war, als es Scheiner zuerst wahrnahm, so meint Letzterer, man könne wohl 5 und noch mehr Stunden als die Dauer derselben annehmen. Derselbe fügt in seinem Briefe dann noch Folgendes hinzu:

„Die Nebensonnen *Q* und *R* in der Verticalebene, da, wo sich die Bogen der Kreise durchschneiden **), oder, wenn man will, in verkehrter Lage, dem Scheitelpunkte nahe, in der durch den Mittelpunkt des Auges *F* und den der Sonne *G* gehenden Verticalebene sich berühren, standen in Heftigkeit des Glanzes, mit dem sie das Auge verletzten, manchmal gegen andere zurück, manchmal übertrafen sie dieselben; in ihrer Gestalt und Farbe waren sie gewöhnlich unansehnlicher; sie behielten weder dieselbe Grösse, noch in ihrer Farbe immer ähnliche Pracht, sondern nahmen darin bald zu, bald ab, je nach der verschiedenen Kraftäusserung der Sonne *G* und der Beschaffenheit der in *Q* und *R* die Strahlen empfangenden Materie. Demgemäss befanden sich diese Nebensonnen gleichsam in einem fast fortwährenden Ringen und einem Hinundherfluthen ihres Lichtes und ihrer Farben. — — Der Abstand oder die Höhe des Sonnenbildes *Q* über dem Horizonte war zur Zeit der ersten

---

*) Hiernach scheint es fast, als ob Scheiner doch das letzte Verlöschen der Nebensonne in *N* beobachtet habe, obgleich derselbe kurz vorher ausdrücklich bemerkt, dass solches nicht geschehen sei. Man darf das zuletzt hier Gesagte wohl nur als eine Schlussfolgerung Scheiner's ansehen.

**) In der Zeichnung bei Huygens ist ein Durchschnitt zweier Bogen bei *Q* nicht angedeutet; allein nach dem hier Gesagten muss man annehmen, dass in *Q* ebenfalls ein Berührungsbogen vorhanden gewesen sei, wie in *R*. Ich habe ihn darum durch einige Punkte Taf. II. Fig. 2. bezeichnet.

Beobachtung 49° 40′, des Sonnenbildes *R* 76° 10′, die Höhe der Sonne 28° 30′; also der Abstand des *Q* von der Sonne im Verticalkreise 21° 10′; *R* dagegen war, als ich Vormittags die erste Beobachtung machte, von der Sonne 47° 40′ entfernt. Zu Anfang dieser Beobachtung wehte Nordwind, änderte sich aber nach und nach in Ostwind und endlich in Südwind um, und verursachte Regen, wenn auch nicht eben vielen und anhaltenden. Fast 14 Tage lang erschien hierauf der Himmel täglich halb mit Dünsten erfüllt, und es schienen an jedem Vormittage neue Sonnenbilder entstehen zu wollen, jedoch ohne Erfolg; denn ich sah im Verticalkreise während hinreichend langer Zeiträume deutliche Anfänge von Nebensonnen; ich sah auch von seitlichen Sonnen wiederholt offenbare Spuren. Der farbige Bogen *ORP* scheint ein Stück eines Kreises gewesen zu sein und also ein mit der Sonne concentrischer Halbkreis, der jedoch bei *Θ* und *K* den Horizont *AB* nicht völlig berührte. Die Stücke *OK* und *PΘ* waren von unbeständiger, bald längerer, bald kürzerer Ausdehnung. Die Bogen $\varkappa Q\alpha$, $\beta Q\gamma\delta\varepsilon\zeta$, welche die Sonne zunächst umgaben, zeigten dem Auge zwar einen einzigen kreisförmigen, gewissermassen verworrenen, ungleich breiten und sich selbst nicht immer ähnlich bleibenden, sondern fortwährend hin und her wogenden und veränderlichen Umring; in Wahrheit aber war dieser aus mehreren in der Zeichnung ausgedrückten Bogen zusammengeflossen, wie ich absichtlich auf das genaueste beobachtet habe. — Die Hörner *HRC* schienen ein Abschnitt eines kleineren Halbkreises zu sein, welcher mit dem grösseren *ORP* in entgegengesetzter Lage in dem gemeinschaftlichen Knoten *R* zusammentraf. Von den regenbogenfarbigen Kreisen durchschnitten sich $\varkappa Q\alpha$ und $\beta Q\gamma$ in dem Knoten *Q* und verursachten dort die Nebensonne *Q*. Die beiden Sonnen *N* und *M* waren in den gemeinschaftlichen Knoten oder Durchschnittspunkten *M* und *N* des farbigen Kreises $\zeta\varepsilon\delta$ mit dem milchweissen Kreise *ONMP* entstanden. Der nördliche Theil des Himmels war reiner als der südliche, den leichte und zusammenhängende Dünste überzogen, welche dieser Erscheinung mehr Stoff zu ihrer Bildung darboten *)."

Descartes erwähnt dieses zweite Römische Phänomen gar nicht. Huygens dagegen nennt ausdrücklich Scheiner als Beobachter, und weis't zugleich darauf hin, dass zu jener Zeit (1629

*) Einiges Andere, das nun noch im Briefe folgt, kann hier fortbleiben, da es wenig oder gar nicht zur Sache gehört.

flgd. Jahre) Descartes und Gassendi über das Römische Phänomen geschrieben hätten.

Vergleicht man die genauere Zeichnung des Röm. Phänomens von 1630 mit der des andern Phänomens von 1629, über welche beide doch, nach Scheiner, „fast ein und dasselbe zu sagen" ist, so treten die Mängel dieser letzteren sehr entschieden hervor. Die von Descartes wiedergegebene Abbildung behält nur dadurch noch einigen Werth, dass sie geeignet ist, uns den Unterschied in der Zahl und Anordnung der Nebensonnen bei beiden Römischen Phänomenen einigermassen anschaulich zu machen. Uebrigens muss es auffallen, dass bei dem Phänomen von 1630 gar nicht erwähnt worden ist, an welchem Tage dasselbe beobachtet sei. Auch habe ich anderwärts keine Nachricht darüber finden können.

---

## 3.

## Ueber einige sehr seltene Nebenmonde und Nebensonnen,

zu Danzig beobachtet 1660 und 1661 von Hevel *).

Lasst uns endlich von den Phänomenen des Aethers zu denen der Luft herabsteigen, welche ich, ob sie gleich um den ganzen Himmelsraum unter sich abstehen, und desshalb nicht im Geringsten hierher zu gehören scheinen, nichtsdestoweniger dennoch gern hier anfügen will, da es meinen Freunden so passend schien, und auch ich sehr wohl einsehe, dass sie auf einen Gegenstand der Meteorologie, vorzüglich für diejenigen, welche das Wunderbare solcher Meteore und ihre natürlichen Ursachen zu ergründen streben, nicht wenig Licht werfen werden; und zwar will ich bei dieser Gelegenheit nicht von allen und jeden Luft-Meteoren, die bis jetzt von uns wahrgenommen wurden, sondern nur von dem einen oder anderen derselben, welches in Vergleich mit den übrigen weniger vorkommt, kurz die Beobachtung erzählen und zum Schlusse eine genaue Zeichnung hier beifügen. Und obgleich ich sehr wohl weiss,

---

*) Hevelii Mercurius in Sole visus, im Anhange. Das unter 3. Enthaltene ist, wie schon vorher bemerkt wurde, eine wörtliche Uebersetzung der Hevel'schen Schrift; die unter dem Texte vorkommenden Anmerkungen sind sämmtlich vom Uebersetzer.

dass von Anderen bereits, vorzugsweise jene sieben Sonnen, in verschiedenen Abbildungen veröffentlicht sind, so will ich dennoch, da ich sie weder für meine eigenen, noch für ächt anerkenne, um so lieber meinen Freunden willfahren, und einige Beobachtungen von Nebenmonden und Nebensonnen, die im Zeitraum ungefähr eines Jahres vorfielen, hier folgen lassen, die übrigen aber alle für unser Verzeichniss der auffallenderen, ausgezeichneteren Meteore zurückbehalten.

---

Nebenmonde, im Jahre 1660 am 30. März früh zu Danzig gesehen.

Anfangs, um 1 Uhr nach Mitternacht, umgab den Mond *A* ein vollsändiger weisser Kreis *BCDE* (Taf. III. Fig. 2.), in welchem an jeder Seite des Mondes, in *B* und *D*, ein verschiedenfarbiger, unächter oder Nebenmond mit weissen, sehr langen, häufig hin und her sich bewegenden Schweifen sich zeigte. Der auf der linken Seite dehnte seinen Schweif bis an den Schenkel des Schlangenträgers, der andere rechts bis zum Jupiter aus, wie dies aus der beigegebenen Abbildung erhellet. Etwas später, nämlich um 2 Uhr, umgab ein anderer grösserer Kreis, der sich ganz bis zum Horizonte erstreckte, den kleineren. In den höchsten Punkten beider Kreise entstanden darauf gefärbte Bogen, wie umgekehrte Regenbogen; der untere *C* bildete ein Stück von einem grösseren Kreise, der obere dagegen, in welchem Arctur hell strahlte, von einem kleineren Kreise. Dieses herrliche Schauspiel hielt beinahe drei volle Stunden an. Zuerst verchwand jener äusserste, grösste, weisse Kreis, darauf der grössere bunte umgekehrte Bogen *C*, dann auch der kleinere obere *F*, und zuletzt der innere Kreis *BCDE* gänzlich. Der Durchmesser dieses inneren Kreises, sowie des oberen Bogens, war 45$^0$, der des grösseren Kreises dagegen und des unteren Bogens 90$^0$.

---

Nebensonnen, im Jahre 1660 am 6. April 5 Uhr 30′ Abends beobachtet

Die Sonne neigte sich zu ihrem Untergange, als Bogen eines in verschiedenen Farben leuchtenden Kreises, ähnlich einem Regenbogen, sie umkränzten, in welchem man zu beiden Seiten zwei ebenfalls farbige Nebensonnen mit ziemlich langen weissen, von der Sonne abgekehrten Schweifen erblickte; um das Zenith aber, wo

jene Kreisstücke sich gleichsam leicht verbanden (Taf. II. Fig. 3.), glänzte ein anderer umgekehrter, gleichfalls gefärbter Bogen, welcher in seiner Mitte eine dritte aber etwas dunklere Nebensonne sehen liess. Dieses Phänomen dauerte an eine halbe Stunde, bei völlig heiterem Himmel, bis Sonnenuntergang, dergestalt, dass zuerst der obere Bogen mit seiner Nebensonne, darauf die zur Linken befindliche verschwand, während die dritte mit der wahren Sonne selbst unterging. Der Durchmesser des die Sonne umgebenden Kreises war von ungefähr 45°, soweit sich dies mit blossem Auge beurtheilen liess.

---

## Nebenmonde, im Jahre 1660 am 17. December zu Danzig gesehen.

Mit Anbruch des Tages, um 6ᵘ 30′ Morgens, als der Mond, welcher eben voll gewesen war, 12° hoch stand, erblickte ich im Westen zugleich mit dem wahren drei unächte Monde, und zwar in folgender Gestaltung: Bei der reinsten Luft umgab zuerst den Mond unmittelbar ein doppelter Kranz in der schönsten und hellsten Farbenpracht (Taf. III. Fig. 3.). An jeder Seite des Mondes erschienen Stücke eines gewissen grossen Kreises von ungefähr 45°, gleich wie Regenbogen gefärbt, die sich bis zum Horizonte erstreckten; in diesem traten zwei Nebenmonde mit sehr langen und glänzend weissen Schweifen in die Augen; der linke, nahe bei Procyon, trug den nicht wenig kürzeren, der rechte aber den viel längeren Schweif. Oben, nicht fern von den Zwillingen, wo die beiderseitigen bunten Kreisstücke zusammenliefen, war ein anderer umgekehrter gleichfalls durch mannigfache Farben sich auszeichnender Bogen mit einem dritten etwas matteren Nebenmonde sichtbar. Ausserdem, und das ist eine sehr seltene Erscheinung, ging durch den wahren Mond selbst ein sehr grosses weisses oder silberfarbenes Kreuz *), welches mit seinem unteren Theile bis zum Horizonte hin

---

*) Ein solches Kreuz erschien zur Zeit Constantins des Grossen an der Sonne und ward nach Eusebius (vita Constantini I. 28.) eine der vorzüglichsten Ursachen des Triumphes der christlichen Religion, da der Kaiser von Gott selbst unterwiesen zu sein glaubte. Der Kaiser selbst, sagt Eusebius, habe ihm erzählt, dass ihm auf seine demüthigen Bitten ein Wunderzeichen von Gott erschienen sei: *ἀμφὶ μεσημβρινὰς ἡλίου ὥρας ἤδη τῆς ἡμέρας ἀποκλινούσης, αὐτοῖς ὀφθαλμοῖς ἰδεῖν ἔφη ἐν αὐτῷ οὐρανῷ ὑπερκείμενον τοῦ ἡλίου σταυροῦ τρόπαιον, ἐκ φωτὸς συνιστάμενον, γραφήν τε αὐτῷ συνῆφθαι, λέγουσαν, τούτῳ νίκα.* Constantin und die ihn begleitenden Soldaten seien von Staunen

sich ausdehnte, aber an den übrigen Seiten nicht ganz den Kreis berührte, wie aus der Zeichnung zu sehen ist. Es war überdies so sehr glänzend und lichtvoll, dass es selbst bis zum Aufgang der Sonne klar und deutlich schimmerte; dagegen verdunkelten die Nebenmonde mit ihren Bögen weit schneller. (Die Grösse des Kreuzes betrug 30 und mehr Grade.) *)

---

### Sieben Sonnen, zu Danzig beobachtet **).

Im Jahre 1661 unserer christlichen Zeitrechnung, Sonntag den 20. Februar n. St., ungefähr um 11 Uhr, da die Sonne dem Meridiane nahe stand, und der Himmel ringsum entwölkt war, wurden zu gleicher Zeit sieben Sonnen, theils weisse, theils farbige, sehr deutlich sichtbar, einige mit sehr langen, von der Sonne abgekehrten, häufig hin und her sich bewegenden Schweifen, einige mit weissen Kreuzen, innerhalb verschiedener Kreise; überhaupt nämlich in folgender Gestaltung und Ordnung:

1) Die wahre Sonne *A* (Taf. III. Fig. 1.) in der Höhe von etwa 25° umgab ein fast vollständiger, durch mannigfache Farben, nämlich Purpur, Roth und Gelb, wie ein Regenbogen sich auszeichnender Kreis *GBIC* von 45°, dessen unterer Rand kaum 2° 30′ vom Horizonte sich erhob.

2) An jeder Seite bei *B* und *C*, gegen Westen und Osten, waren zwei vorzüglich nach der Sonne hin buntfarbige Nebensonnen mit sehr langen und dichten, aber weissen Schweifen sichtbar, die in eine Spitze endigten.

---

darüber ergriffen worden. In der Nacht darauf sei ihm Christus im Traume erschienen und habe ihm befohlen, *μίμημα ποιησάμενον τοῦ κατ' οὐρανὸν ὀφθέντος σημείου, τούτῳ πρὸς τὰς τῶν πολεμίων συμβολὰς ἀλεξήματι χρῆσθαι.* Am folgenden Tage habe er bei den Juwelieren nach dem Muster des himmlischen Kreuzes ein ähnliches aus Gold und Edelsteinen bestellt. —

Ein ander Mal sah man auf der Sternwarte zu Paris, den 17. Mai 1677 um 2 Uhr Morgens, den Mond in der Mitte eines eben solchen weissen Kreuzes stehen. Vergl. Schumacher astron. Abhandl. Hft. 3. S. 42. Auch Galle erwähnt in Poggend. Ann. XLIX. S. 4. ein solches von ihm am 30. April 1836 zu Berlin beobachtetes Kreuz, dessen verticaler Theil aber schwächer war, als der horizontale.

*) Dieser letzte Satz findet sich nicht im Texte des Originals, sondern nur als eine Randbemerkung daselbst.

**) Das vorzugsweise so genannte Danziger Phänomen.

**3) Ein anderer weit grösserer Kreis *YXHVZ* von fast 90° im Durchmesser ging um die Sonne und den vorigen kleineren Kreis *GBIC* und erstreckte sich bis an den Horizont selbst. Im oberen Theile waren die Farben sehr deutlich, aber nach den Seiten hin weit trüber und dünner.**

4) Am obersten Theile eines jeden der genannten Kreise, in *G* und *H*, erblickte man 2 verkehrte, gleichfalls in verschiedenen sehr prachtvollen Farben leuchtende Bogen, die vom Zenith aus, wie aus einem Mittelpunkte, beschrieben waren. Jenes unteren Bogens *QGR* Durchmesser war 90°, der des anderen aber, des oberen und kleineren *THS*, 45°. In der Mitte des unteren Bogens, bei *G*, wo er mit dem Kreise *BGC* zusammenlief, schimmerte eine andere Nebensonne, aber an Farbe und Glanz matter und schwächer.

5) Ein grosser, in Vergleich mit den vorigen viel weiterer, einfarbiger, weisser Kreis *BEFDC* ward parallel mit dem Horizonte wahrgenommen. Er stand vom Erdrande gleich weit auf allen Seiten, fast 25° ab, hatte im Durchmesser eine Grösse von 130°, und schien seinen Ursprung von den seitlichen Nebensonnen *B*, *C* selbst zu nehmen. In ihm glänzten überdies drei Nebensonnen von ganz silberweisser, oder doch weisslicher Farbe; die eine derselben stand in *D*, nach Osten hin, fast 90° von der wahren Sonne entfernt, die andere im Westen bei *E*, die dritte aber, *F*, im Norden, mit der wahren Sonne in Opposition, alle ähnlich an Farbe und Glanz. Durch die Nebensonnen *D* und *E* aber, im Osten und Westen, gingen andere Stücke eines gewissen grössten Kreises *)

*) Dieser dritte zur Sonne oder zum Monde concentrische Kreis ist, so viel ich weiss, nur zweimal bis jetzt beobachtet worden, zuerst von Hevel in dem hier beschriebenen Phänomene, dann von A. Erman auf seiner Reise um die Erde am 24. Nov. 1828 zwischen Denjikowo und Repolowo nördlich von Tobolsk. In Erman's historischem Berichte (Reise um die Erde durch Nordasien und die beiden Oceane in den Jahren 1828, 1829 und 1830. Berl. 1833.) Bd. I. S. 544. heisst es: „Gleichzeitig sichtbar — war ein um den Mond concentrischer „durch Refraction seines Lichtes gebildeter und ihn in seiner Bewegung am „Himmel begleitender Ring oder Hof, welcher an gewissen Stellen die gegen „Westen zum Horizont geneigten Hälften der feststehenden Bogen“ [Lichtstreifen eines Nordlichtes?] „durchschnitt oder, genauer zu reden, sie überdeckte. „Auch er war durchaus farblos und überall von gleicher Helligkeit, sowohl an „den eben erwähnten Ueberdeckungsstellen als an denen, wo er auf dem dunk- „len Himmelsgrund sich projicirte. — — Um 10ᵐ 30′, als der Mond um 83°,2 „eines grössten Kreises von dem höchsten Punkte des untersten der ruhenden

durch den Pol *K* der Ekliptik hindurch bis ganz zum Horizonte *P* und *N*, welche den mit dem Horizonte parallelen Kreis unter schiefen Winkeln, die Ekliptik dagegen unter rechten Winkeln schnitten, so dass sie dort bestimmt hervortretende weisse Kreuze bildeten, und man also sieben Sonnen zugleich sehr deutlich beobachtete. Ja, hätte ich dieses Phänomen früher von einem hoch gelegenen Orte aus wahrgenommen, so würde ich ohne Zweifel noch zwei Nebensonnen bei *H* und *I*, und also neun an Zahl bemerkt haben; denn es waren dort davon Spuren vorhanden, aus denen dies nicht mit Unrecht gefolgert werden konnte.

Es dauerte aber dieses ausgezeichnete und höchst liebliche Phänomen ungefähr von $10^{u}$ 30′ bis $11^{u}$ 51′. Aber es glänzte nicht in derselben Gestaltung ununterbrochen während der ganzen Zeit seiner Dauer, sondern nahm allmälig andere und andere Form an. Anfangs, gegen 11 Uhr, zeigte es sich in der beschriebenen Art, später aber veränderte es sich nach und nach. Zuerst schwand die nördliche Nebensonne *F* mit einem Theile ihres Kreises; die übrigen Nebensonnen aber dauerten mit ihren Bogen vollständig bis $11^{u}$ 10′. Dann erlosch die östliche Nebensonne, hernach die westliche, jede mit ihrem Kreuze. Wieder etwas später veränderten sich die beiden seitlichen Nebensonnen *D* und *C*; bald war die eine an Licht heller und an Farbe deutlicher als die andere, bald matter und dunkler. Um $11^{u}$ 18′ nämlich war die westliche Nebensonne *B* sehr deutlich sichtbar, während die östliche *C* im Verschwinden war. Wieder um $11^{u}$ 24′ trat die östliche sehr klar hervor, so dass sie noch um $11^{u}$ 40′ deutlich gesehen wurde, während die westliche unterdessen völlig ihren Schein verlor, obgleich diese durchgehends einen fast längeren Schweif an sich getragen hatte, als die östliche. Oefter nämlich streckte sie dessen Spitze auf 30°, zuweilen auf 90° bis ganz zur Nebensonne *E* hin; aber die östliche *C* dehnte ihren Schweif kaum über 20° aus. Um $11^{u}$ 30′ verlor sich der grösste Verticalkreis *YXHVZ*. Die umgekehrten Bogen aber *H* und *G* hielten sich zugleich mit jenen beiden Nebensonnen *B* und *C* bis zu Ende *).

---

„Bogen abstand, lag ein Theil des Hofes noch um einige Grade westlich von „diesem Punkte, so dass der von der Lichtquelle an gerechnete scheinbare „Halbmesser des Hofes zwischen 85° und 90° im Bogen eines grössten Kreises „betrug.“

*) In Priestley's Geschichte der Optik (The history and present state of discoveries relating to vision, light and colours, by Joseph Priestley,

Was die Zeichnung selbst betrifft, so haben wir des besseren Verständnisses wegen dieselbe so zur Ansicht gegeben, wie sich Fixsterne auf einer künstlichen Kugel darstellen, wie wenn wir ausserhalb der Sphäre ständen; denn auf diese Weise wird Alles viel deutlicher und klarer entworfen. Dabei war doch der Ort der Beobachtung ungefähr unter dem Zenith, innerhalb des mit dem Horizonte parallelen Kreises, und von hier aus erblickten wir die wahre Sonne im Süden, die eine Nebensonne *F* im Norden und die übrigen *E* und *D* an den Seiten. Verlangt man aber dieses sehr seltene Phänomen ein gut Theil klarer vor Augen gestellt, so beschreibe man von der Sonne *A* aus (auf der künstlichen Kugel nämlich), die damals im 2ten Grade der Fische stand, und zwar nach unserer Danziger Polhöhe, mit einem Halbmesser von $22^1/_2{}^0$ zuerst den Kreis *GBIC*, darauf mit einem Halbmesser von $45^0$ den Kreis *YXHVZ*; drittens den Kreis *NEKDP*, welcher durch die beiden von der Sonne $90^0$ abstehenden weissen Nebensonnen hindurchgeht, mit einem Halbmesser von $90^0$; viertens, aus dem Zenith wieder mit einem Halbmesser von $22^1/_2{}^0$ den Bogen *THS*; fünftens, aus demselben Mittelpunkte mit einem Halbmesser von $45^0$ den Bogen *QGR*; endlich den mit dem Horizonte parallelen Kreis *BEFDC* mit einem Halbmesser von $65^0$. Aus dieser Darstellung der Sache wird auf's deutlichste die schönste Harmonie und Symmetrie der Kreise offenbar werden, wie auch damit, so Gott will, um so leichter eine Gelegenheit wird gegeben werden, die natürlichen Ursachen aller Nebensonnen und Nebenmonde zu erforschen.

---

### Eine Nebensonne, zu Danzig beobachtet.

Zum Schlusse gebe ich dir hier, geneigter Leser, ein ganz besonderes Phänomen zu betrachten, wie kein anderes der Art, so viel ich gelesen oder von Jemandem erfahren zu haben mich entsinne, irgend wo bis jetzt wahrgenommen ist. Deswegen, je selt-

---

London. 1772.) ist dieses vorzugsweise so genannte Danziger Phänomen ebenfalls abgebildet, aber sehr mangelhaft beschrieben. Priestley meint, es komme mit dem Römischen so sehr überein, dass er nicht nöthig habe, sich lange dabei aufzuhalten; der Hauptunterschied zwischen beiden bestehe in den gegen die Sonne convexen Bogen *QGR* und *THS* (Taf. III. Fig. 1.). Freilich wenn es auf die Anordnung der Nebensonnen, die bei beiden Phänomenen sehr verschieden ist, nicht ankommt, kann man Priestley einigermassen Recht geben! —

ner es ist, desto mehr verdient es angesehen zu werden. Ich erblickte nämlich im Jahre 1661 am 6. September 6 Uhr Abends nicht fern von unserer Stadt aus der Gegend der im Westen stehenden Sonne her zwei Stücke von Regenbogen *), mit den schönsten Farben, wie dies zu sein pflegt, geziert, die kreuzweise in einander griffen, wie man auf Taf. II. Fig. 4. sieht. Gerade in dem Durchschnittspunkte der Bogen und der Sonne gegenüber erschien deutlich eine verschiedenfarbige unächte Sonne in der bei Nebensonnen gewöhnlichen Art: jedoch mit diesem Unterschiede, dass hier die Gegensonne (diesen Namen wählte ich zu ihrer Benennung) rundherum in gleicher Weise Regenbogenfarben zeigte, da jene nur nach der Sonne zu, an der einen Seite, gefärbt sind. Es war ein sehr angenehmes Schauspiel, verschwand aber in kurzer Zeit, nämlich nach Verlauf einer Viertelstunde; aus der Ursache vielleicht, weil ich den Ort der Beobachtung alsbald änderte; sonst hätte es sich ohne Zweifel länger erhalten.

---

4.

## Das Petersburger Phänomen,

beobachtet von **Lowitz** am $\frac{18.}{29.}$ Juni 1790 **).

Den Morgen des 18. Juni, als die sichtbare Gegend der Atmosphäre überall einförmig mit Dünsten, ähnlich einem Nebel, beladen war, gab diese Beschaffenheit der Luft Veranlassung zu einem der schönsten, seltensten und durch verschiedenartige Gestaltung merkwürdigsten Phänomene. Lowitz nahm dasselbe zuerst wahr um $7^u$ 30′, und beobachtete es bis zu seinem Ende, während er es mit sehr grosser Ausführlichkeit beschrieb (Taf. IV. Fig. 1.).

1) Die Sonne war umgeben von zwei Kreisen *ebdk* und *eidc*, welche sich in *d* und *e* trafen, und deren Farbe röthlich auf der

*) Leider vermisst man die genauen Angaben über die Krümmung dieser Bogen, so dass es unentschieden bleibt, ob dieselben zu den weiter unten zu erwähnenden elliptischen Bogen gerechnet werden müssen.

**) Dargestellt in den Nova Acta Acad. Scient. Imp. Petrop. Tom. VIII. Petrop. 1794. in der Abth. Astronomica et Meteorologica unter dem Titel: Tob. Lowitz. Déscription d'un météore remarquable observé à St. Pétersbourg le 18. Juin 1790. p. 384.

nach der Sonne gekehrten Seite, weisslich auf der entgegengesetzten Seite war. Die Sonne stand demnach in *a* zwischen ihren Mittelpunkten *α* und *β*. Die äusseren Bogen *dbe* und *dce* waren viel klarer und viel prächtiger als die inneren *dke* und *die*. Die Aehnlichkeit der Farben gab diesen letzteren eine längliche oder ovale Figur, und die beiden anderen hatten die Form eines unten und oben abgeplatteten Kreises. An ihrem oberen Durchschnittspunkte sah man einen durch eine ausserordentliche Lebhaftigkeit merkwürdigen Theil *wdw*, dessen blendender Glanz das Auge eben so angriff, wie die Sonne selbst.

2) Der untere Durchschnittspunkt *e* stiess an einen halbkreisförmigen umgekehrten, sehr klaren und breiten Bogen *res*, welcher rücksichtlich seines Durchmessers der kleinste unter allen Bogen war.

3) Ein anderer Kreis *zzz*, ähnlich gefärbt, aber in einer grösseren Entfernung von der Sonne und unvollkommen gegen den Horizont zu, durch den Bogen *pzq* oben gehörnt erscheinend, hatte die Sonne selbst zum Mittelpunkte.

4) Dieser letzte Kreis stiess gegen Süden und gegen Osten an zwei umgekehrte, der Sonne entgegengesetzte Bogen *tt* und *vv*, welche vollkommen ähnlich mit Stücken von Regenbogen waren, sowohl rücksichlich ihrer Breite als der Lebhaftigkeit ihrer prismatischen Farben, wodurch sie sich von allen anderen Bogen dieses Meteors unterschieden. Die Gebäude hinderten Lowitz zu sehen, ob ihre Enden sich bis zum Horizonte erstreckten.

5) Noch ein anderer vollständiger und weisser Kreis *afkga*, welcher einen sehr grossen Raum umschloss, war mit dem Horizonte parallel, umlagerte diesen von allen Seiten und hatte folglich das Zenith zum Mittelpunkte. In seinem Umfange befanden sich die Sonne selbst und fünf Nebensonnen, von denen drei *f*, *h* und *g*, der Sonne gegenüber in NW, weiss und blass, und die beiden anderen *x* und *y*, an jeder Seite der Sonne in SO., farbig und sehr prächtig waren.

6) Diese beiden letzten Nebensonnen, die sich in einiger Entfernung von den Durchschnittspunkten des grossen Horizontalkreises mit den beiden die Sonne umgebenden Kreisen befanden, schickten zuerst von ihren beiden Seiten sehr kurze, farbige Bogenstücke *xi* und *yk* aus, deren Richtung sich unter die Sonne hinneigte bis an die beiden inneren Halbkreise *die* und *dke*. Sodann waren sie mit langen, klaren und weissen, von der Sonne abgewandten

Schweifen $x\xi$ und $y\eta$ innerhalb des Umringes des grossen Kreises *afhg* versehen.

7) Endlich erschienen zwei grosse Kreisbogen *dlk* und *dmh* von weisser Farbe innerhalb des grossen Horizontalkreises *afhg*; aber sie waren so blass, dass mehrere Personen, denen Lowitz sie zu zeigen sich bemühte, sie nicht wahrnehmen konnten. Einmal trafen sie nahe bei der Sonne in *d* an der blendend hellen Stelle zusammen und durchkreuzten dann auf der anderen Seite sich selbst, sowie den grossen Kreis, im Mittelpunkte der blassen Nebensonne *h*, von wo sie sich merklich weiter über einige Grade des grossen Kreises hinaus am nordwestlichen Horizonte bis *n* und *o* ausdehnten.

So war dieses schöne Meteor um 10 Uhr Vormittags, wo es seine grösste Vollkommenheit erreicht hatte. In Hinsicht auf den allmäligen Wechsel seiner Theile machte Lowitz noch die folgenden Beobachtungen:

Um 7$^u$ 30′ Morgens waren die beiden Ringe um die Sonne, *dbek* und *dcei* noch nicht in ihrer Vollkommenheit; man sah nur ihre inneren Bogen *die* und *dke* in der Figur eines vollständigen Ovals mit ihrem prachtvollen Glanze oben in *d*. Es geschah nur nach und nach, dass diese Helligkeit sich nach beiden Seiten ausdehnte, in Form von Bögen *dw*, *dw*, welche grösser und grösser wurden, bis sie sich endlich um 9 Uhr in *e* nahe bei dem prachtvollen Halbkreise *res* vereinigten.

Was ferner an diesen beiden Kreisen oder Ringen, welche sich durchkreuzten, merkwürdig war, ist das, dass sie nach Erreichung ihrer grössten Vollkommenheit mehr und mehr sich näherten, bis sie endlich einen einzigen Ring bildeten, der die Sonne zum Mittelpunkte hatte. Unterdessen beobachtete man immer gegen den oberen und unteren Theil hin eine sehr merkliche Helligkeit. Um eben die Zeit verschwanden die beiden Bogen mit den prismatischen Farben *tt* und *vv*. Die beiden Nebensonnen *x* und *y* hingegen entfernten sich mehr und mehr von der Sonne und verschwanden endlich völlig um 10$^u$ 45′.

Der grosse Horizontalkreis *afkga* und seine drei schwachen Nebensonnen *f*, *h* und *g* blieben noch übrig, und verschwanden erst um 11$^u$ 35′. Noch verdient bei diesem grossen Kreise bemerkt zu werden, dass er beständig, während er die Sonne und deren 5 Nebensonnen in seinem Umfange beibehielt, dem Horizonte parallel blieb, und folglich das Zenith sein unveränderter Mittelpunkt war. Je mehr sich daher die Sonne dem Meridiane näherte, desto mehr er-

hob er sich über den Horizont. Der grosse Kreis, dessen Ausdehnung anfangs ausserordentlich weit war, als die Sonne sich noch wenig erhoben hatte, wurde allmälig immer kleiner, bis am Ende sein Durchmesser fast eben so klein ward, als der der beiden vereinigten Ringe. Dasselbe trat bei den beiden Bogen *dlh* und *dmh* ein, welche sich in dem Horizontalkreise befanden. Ihre Durchschnittspunkte waren immer in *h* und *d*.

Um Mittag war von diesem schönen Phänomene nichts mehr übrig, als ein einfacher an seinen oberen und unteren Rändern sehr leuchtender Ring, welcher endlich um 12u 30′ Mittags völlig verschwand.

Im Allgemeinen bestand dieses Meteor aus 12 verschiedenen Bogen, von denen 9 farbig waren, in der Art, dass überall das Rothe der Sonne zugekehrt war und das Weisse an den entgegengesetzten Seiten *).

---

5.

Unter den dreien im Vorhergehenden beschriebenen Hauptphänomenen ist das Petersburger unstreitig das am mannigfaltigsten ausgebildete und darum auch das am schwierigsten zu erklärende. Was die beiden Bogen *dlh* und *dmh* betrifft, so sagt Lowitz im Obigen einmal (unter 7.), sie schnitten sich in der blendenden Stelle bei *d*, nachher (ebenda gegen das Ende), ihre Durchschnittspunkte seien in *h* und *d* gewesen. Da aber ausdrücklich bemerkt wird, dass jene Bogen ausnehmend schwach, kaum sichtbar gewesen seien, und andere Beobachter ähnlicher Erscheinungen den einen Durchschnittspunkt nicht in *d*, sondern in *a*, in der Sonne selbst bemerkt haben wollen, so darf man wohl der Vermuthung Raum geben, Lowitz habe sich in Betreff dieses Punktes getäuscht. Ueber die Grösse des Winkels, unter welchem jene Bogen bei *h* und *a* sich schneiden, giebt Lowitz leider keine Auskunft, wie man denn überhaupt die Angaben über die Grösse der einzelnen Ringe und Bogen und über den Abstand der Nebensonnen unter einander höchst ungern vermisst. Vergleicht man die wenigen

*) Eine Beschreibung dieses Phänomens findet sich auch in Gehler's phys. Wörterb. unter dem Artikel Hof, wiewohl mit mancherlei Bemerkungen, die das Original nicht hat, untermischt. Das Römische und das Danziger Phänomen sind dort gar nicht beschrieben.

ähnlichen Phänomene, welche Brandes im Gehler'schen Wört. Art. Hof S. 471 und 472 *) erwähnt, so wird man jenen Winkel bei *h* etwa gleich 60° annehmen können. Die Nebensonnen *f* und *g* entsprechen wahrscheinlich den Nebensonnen *E* und *D* des Danziger Phänomens. Der Hof *zzz* wird, wie gewöhnlich, einen Halbmesser von etwa 44° gehabt haben, und den beiden die Sonne zunächst umgebenden excentrischen Kreisen wird nach ihrer Vereinigung der gewöhnliche Halbmesser von etwa 22° zukommen. Wenigstens erwähnt Scheiner bei dem römischen Phänomene von 1630 für die beiden inneren excentrischen, aber beinahe zusammen fliessenden Höfe einen Durchmesser von 45°. Neben solchen zwei excentrischen Kreisen haben norwegische Beobachter noch einen dritten zur Sonne concentrischen Kreis gesehen, was eine noch ungewöhnlichere Erscheinung ist **). Sie steht vielleicht in genauer Verbindung mit einer anderen, bei der man um den innersten kreisrunden Hof einen zweiten diesen berührenden elliptischen Hof gesehen hat, dessen grosse Axe in der Regel horizontal liegt. Ein solches Phänomen wiederholte sich in Petersburg im Jahre 1758 viermal, wenn auch nicht immer mit gleicher Vollständigkeit, und ward von Aepinus beobachtet und als ein ganz neues beschrieben ***).

Zuerst am 23. April 1758 zeigte es sich in folgender Weise: (Taf. IV. Fig. 2.).

1) Die Sonne *S* als Mittelpunkt umgaben zwei Kreise. Der erste derselben *CFED* hatte dieselbe Breite, denselben Durchmesser und ähnliche Farben, wie die gewöhnlichen Höfe, die ohne Nebensonnen erscheinen, hatte aber das Eigenthümliche, dass er von einer weissen elliptischen Fläche, deren grössere Axe mit dem Horizonte parallel lief, umgeben war. Es war nämlich die in diesem Kreise enthaltene Fläche *CFED* ziemlich dunkler, als der übrige Himmel, aber die mondförmigen Räume *CGEFC* und *CHEDC*, welche aussen von dem elliptischen, innen von dem kreisrunden Bogen begrenzt wurden, glänzten in einem lebhaften weissen Lichte. Von dem zweiten Kreise unterhalb der Sonne sah man nur einen gewissen Theil *IK*, der noch keinem Quadranten gleichkam. Der

*) Man vergleiche auch Poggendorff VII. 529.

**) Vergl. Hansteen Mag. for Naturvidensskaberne. 1826. I.

***) Novi Commentarii Acad. Scient. Imp. Petrop. Tom. VIII. 1763. Seite 392. Die betreffende Abhandlung ist überschrieben: Halonum extraordinariarum Petropoli visarum descriptio. Auctore F. V. T. Aepino.

Durchmesser dieses Kreises betrug fast 90°; seine Breite war dem Sonnendurchmesser ungefähr gleich, und die Farben völlig dieselben, wie in dem der Sonne näheren Kreise. Der innere nämlich war roth, der äussere bläulich weiss gefärbt. Der dritte Kreis endlich *SLMN* war vollständig, ganz weiss, ging durch die Sonne selbst hindurch, lief am Himmel herum in horizontaler Lage, und hatte gleichfalls eine Breite, die dem Sonnendurchmesser sehr nahe gleich war.

2) Sichtbar waren ferner zwei Nebensonnen in den Durchschnittspunkten des horizontalen Ringes *SLMN* mit dem Perimeter der elliptischen Fläche *CGEH*, in *G* und *H* gelegen. Sie verbreiteten ein lebhaftes Licht, hatten aber keine runde, sondern eine unregelmässig vierseitige Gestalt. Nach der Sonne zu waren sie roth gefärbt; auf der von der Sonne abgewandten Seite zeigten sie dagegen eine bläulich-weisse Farbe. Die den Nebensonnen nahen Bogen *Gm, Hn* des Horizontalringes glänzten mit einem lebhafteren Lichte, als die übrigen Theile dieses Ringes; doch wurde dieser Glanz in weiterer Entfernung von den Nebensonnen matter und matter, wodurch die Erscheinung von horizontal sich erstreckenden, den unächten Sonnen *G* und *H* anhängenden Schweifen entstand.

3) Ueber den innersten Hof *CFED* merkte Aepinus noch das Folgende an: a) Der oberste Bogen *pq* und der unterste *rs*, in der Vertikalebene *AB* befindlich, gaben so blendendes Licht von sich, dass das Auge es kaum ertragen konnte. Jedoch für Nebensonnen diese leuchtenden Bogen zu nehmen, erlaubte ihre länglichte Gestalt nicht, denn sie hatten in dieser Gestalt mit einem Sonnenbilde keine Aehnlichkeit *). b) Die Stellen *F, D*, wo der horizontale weisse Ring den Hof *CFED* durchschnitt, zeigten keine Nebensonnen, waren auch nicht lichtvoller, als die übrigen Theile des Hofes **). c) Es schien einige Mal, als ob die ganze elliptische

---

*) Berührungsbogen und Nebensonnen mit und ohne Schweif in der durch die Sonne und das Auge des Beobachters gehenden Verticalebene sind Erscheinungen, welche in der genauesten Verbindung stehen, da der Berührungsbogen in vielen Fällen in der Nähe der Verticalebene in eine Nebensonne übergeht, umgekehrt die Nebensonne zu einem Berührungsbogen ausgedehnt erscheint. So auch hier und vielleicht in dem von Lowitz später beobachteten, vorher schon beschriebenen Phänomene.

**) Solche und ähnliche Beobachtungen widerlegen eine Ansicht, die sich leicht geltend machen könnte, als wären die Nebensonnen nur durch die Vereinigung der Lichtkraft zweier sich deckender Kreise entstanden. Vielmehr

Fläche *CGEH* innen roth, aussen bläulich gefärbt sei; aber wegen der höchst schwachen Färbung lässt sich dies nicht mit Sicherheit behaupten. — Mehr konnte Aepinus dieses erste Mal, obgleich das Phänomen etliche Stunden währte, über dasselbe nicht anmerken.

Es kehrte aber dasselbe Phänomen am 13. Mai wieder, in einigen Stücken freilich weniger vollständig, in der Hauptsache jedoch weit deutlicher, als jenes am 23. April. Auf Taf. IV. Fig. 3. ist der Haupttheil dieses Phänomens dargestellt. Es war dem vorher beschriebenen völlig ähnlich, ausser dass

1) der weisse Horizontalkreis *SLMN* sehr schwach war;

2) die Nebensonnen bei *G* und *H* wenig glänzten;

3) von dem zweiten die Sonne umgebenden Hofe zwar ein Bogen *IK*, aber kleiner, als in dem Phänomene vom 23. April gesehen wurde. Vorzüglich merkwürdig war aber das, dass

4) die ganze elliptische Fläche mit einem elliptischen Hofe *CGEH* umgeben war. Es war von diesem Hofe die grössere oder die Queraxe mit dem Horizonte parallel, die conjugirte oder kleinere dagegen normal auf dem Horizonte; die erstere Axe übertraf letztere, welche dem Durchmesser des kreisrunden Hofes *CFED* gleich und von ungefähr 45° war, um etwa 6 Grade. Uebrigens hatte der elliptische Hof dieselbe Breite, wie der kreisrunde, den er einschloss, und war auf ähnliche Weise gefärbt, innen nämlich roth, aussen blass blau. Die Stellen *rEs*, *pCq*, wo der elliptische Hof den kreisrunden berührte und mit diesem zusammenfloss, glänzten mit einem für die Augen kaum erträglichen Glanze, hatten aber wegen der ziemlich länglichten Gestalt jener Streifen keine Aehnlichkeit mit Nebensonnen. Ueber eine volle Stunde dauerte das Phänomen. Aepinus rechnete es unter die prachtvollsten, die er je gesehen. Nach Verlauf einer Stunde zerstreuten sich die leichten die Luft erfüllenden Nebel, wodurch das Phänomen zuerst matt wurde und endlich, als der Himmel völlig sich aufgeheitert hatte, ganz verschwand.

Dasselbe Phänomen beobachtete Aepinus am 19. August desselben Jahres von neuem. Als er nämlich etwa um 11½ Uhr nach der Sonne sah, erblickte er theils über, theils unter ihr einige farbige Bogen. Er vermuthete sogleich, er möchte einen Theil des

---

wurden Nebensonnen öfters ausserhalb der Höfe wahrgenommen, wie auch bei dem späteren Petersburger Phänomen von 1790. — Vergl. weiter unten Cassini's Beobachtung von 1683.

am 23. April und am 13. Mai gesehenen Phänomens vor Augen haben; und die Bogen *p' Cq'*, *r' Es'* seien Theile des elliptischen, dagegen die Bogen *pCq*, *rEs* Theile des kreisrunden Hofes. Es war in diesem Augenblicke die Luft sehr heiter und liess kaum, und nicht einmal kaum einige dünne Nebel bemerken. Doch wehte der NW-Wind unaufhörlich mehr Dünste zusammen, und sowie diese sich mehr verdichteten, ward das Phänomen vollständiger und den vorher beschriebenen ähnlicher. Um 12 Uhr stellte es sich wieder so dar, wie in Fig. 3. der Taf. IV., nur dass der Bogen *IK* ganz fehlte, die elliptische Fläche an ihren spitzeren Enden offen war und auch die Nebensonnen *G* und *H* sehr schwach leuchteten. In allen übrigen Umständen, nämlich in den Dimensionen der Durchmesser und der Breiten der kreisrunden Höfe und des elliptischen Hofes, in ihren Farben u. s. w. war dieses Phänomen jenem vom 13. Mai durchaus ähnlich. Nachdem sich gegen 1 Uhr die Dünste zerstreut hatten, verschwand es völlig.

Endlich am 19. April des Jahres 1759 sah Aepinus wieder die Anfänge des Phänomens sich darstellen. Er wartete, ob es sich von neuem vervollständigen würde, aber dieses Mal vergebens; denn der Himmel ward klar und das Phänomen verschwand.

Aepinus fügt hinzu, dass die vier erwähnten Phänomene im Grunde nur eines seien. Da es viermal in einem kleinen Zeitraum erschienen sei, so sei es keineswegs als selten zu bezeichnen; er habe es ein ungewöhnliches genannt, weil es bisher den Physikern fast unbekannt gewesen sei. Er habe in den meisten Schriftstellern, die von Nebensonnen und Höfen geschrieben hätten, nachgeschlagen, habe aber kein derartiges Phänomen erwähnt gefunden. Doch scheine das Römische Phänomen von 1630 hierher zu gehören. Zweitens sei das in den Philosoph. Transact. Num. 13. pag. 219. sqq. erwähnte, in Frankreich beobachtete Phänomen vom 9. April 1666 wahrscheinlich eben dasselbe, welches er beschrieben habe, nur sei jenes nicht so vollständig ausgebildet gewesen. Es ist dort gesagt, es sei nur der weisse Horizontalkreis, aber etwas unterbrochen, sowie der regenbogenfarbige Kreis *CFED*, aber ebenfalls mangelhaft, und der untere Theil *GEH* des elliptischen Bogens mit den beiden Nebensonnen in *G* und *H* sichtbar gewesen *). Das

*) The 9th of April, of this present year, — there appear'd three circles in the sky. One of them was very great, a little interrupted, and white every where. — It passed through the midst of the Sun's disk, and was pa-

dritte hierher gehörige Phänomen sei das von Huygens erwähnte, zu Paris auf der königl. Bibliothek den 12. Mai 1667 gesehene *). Der gegen die Sonne concave Berührungsbogen wird von Aepinus für einen elliptischen gehalten. Endlich erinnere er sich, dass in dem Journal des Sçavans vom Jahre 1683 erzählt werde, Cassini habe einen Hof um die Sonne gesehen und ausserdem auf jeder Seite der Sonne eine Nebensonne, jede gleich hoch über dem Horizonte mit der wahren Sonne. Diese Nebensonnen standen aber nicht in dem Hofe, sondern seitwärts, einen Zwischenraum von einigen Sonnen-Durchmessern davon entfernt, und Aepinus glaubt mit grosser Wahrscheinlichkeit behaupten zu können, es seien diese Nebensonnen der Art gewesen, wie sie in seinem Phänomene von dem Durchschnitte des elliptischen Ringes mit dem horizontalen Kreise gebildet werden. Das Phänomen, welches Newton in seiner Optik **) erwähnt, zeigte auch einen elliptischen Hof von 22° 35 im Halbmesser, dessen Hauptaxe aber perpendikulär zum Horizonte erschien, also ganz abweichend von den Beobachtungen des Aepinus. Die elliptische Krümmung war wohl nur eine optische Täuschung.

Der innerste Hof und der Horizontalkreis sind wohl diejenigen Theile des Gesammt-Phänomens, welche am häufigsten erscheinen. Aepinus berichtet, er habe vom 23. April bis zum 20. September 1758 an 26 Höfe angemerkt, viele andere ungerechnet, welche während eben der Zeit nur undeutlich hervortraten. Auch von anderen Beobachtern wird die Häufigkeit dieser Phänomene hervorgehoben. Galle erwähnt 78 Ringe, die er vom Januar 1838 bis

---

rallel tho the horizon. — The second was much less, and defective in some places, having the colours of a rainbow. — It had the true Sun for its center. The third was less, than the first, but greater than the second. It was not entire, but only an arch or portion of a circle, whose center was far distant from that of the Sun, and whose circumference did, by its middle, joyn to that of the least circle, intersecting the greatest circle by its two extreams. In this circle were discerned also the colours of a rainbow. — At the place, where the circumference of this circle did close whit that of the second, there was a great brightness of rainbow colours mixt together: And at the two extremities, where this second circle intersected the first, appear'd two Parhelia's or mocksuns.

*) Vergl. Hugenii de coron. et parh. S. 55. Die betreffende Stelle ist in Schumacher's astr. Abh. Hft. 3. S. 41. von Fraunhofer, wenn auch nicht eben vollständig, übersetzt.

**) Opticks, Book II. Part. IV. Obs. XIII.

Juli 1839 in Berlin gesehen hat *), wobei er als etwas Auffallendes hinzufügt, dass die vollständigen Ringe weit häufiger um den Mond als um die Sonne waren. Seltner als die Höfe sind die Nebensonnen oder Nebenmonde; doch dürfte die Meinung einiger Naturforscher, dass solche mehr den nördlicheren, als den südlicheren Gegenden der Erde angehören, zur Zeit noch wenig Wahrscheinlichkeit haben, da noch keine hinreichend grosse Anzahl solcher Beobachtungen zur Vergleichung vorliegt. Auch was die Dauer der Höfe betrifft, so ist man keineswegs zu der Behauptung berechtigt, dass dieselben in nördlicheren Gegenden wegen der im Allgemeinen trüberen Luft länger währten, da die physische Beschaffenheit der Beobachtungsorte, selbst bei deren geringen Entfernung von einander, allzu verschieden sein kann, als dass man aus den einen Beobachtungen sichere Schlüsse auf die anderen machen könnte. Zu Churchill am westlichen Theile der Hudsonsbay sieht man nach Wales **) zur Winterzeit häufig Nebensonnen, die den ganzen Tag über die Sonne begleiten. Aber auch an dem weit südlicher gelegenen Bosporus, wie Aristoteles erzählt, hat man zwei Nebensonnen vom Morgen bis zum Abend gesehen, wiewohl man sonst, sagt er, sie gewöhnlich nicht sieht, als wenn die Sonne nahe beim Horizonte ist ***). Wenn manche Naturforscher der Meinung sind, dass die Entstehung von Höfen (halones, Fraunhofer's Höfe grosser Art) und die Entstehung von Kränzen (coronae, Fraunhofer's Höfe kleiner Art) von ganz verschiedenen Wolkenbildungen abhänge, dass nämlich die Kränze dem Cumulus, die Höfe dem Cirrus angehören †), so ist es doch möglich, dass beide Phänomene zu gleicher Zeit, nämlich in über einander liegenden Wolkenschichten, sichtbar werden können. So stellt z. B. auch die dritte Figur auf Taf. III. diese Erscheinung dar, und ich füge hier noch eine zweite, auch rücksichtlich ihrer sonstigen Gestaltung höchst merkwürdige, von Huygens ††) angeführte Er-

---

*) Poggendorff XLIX. S. 3.

**) Philosoph. Transact. vol. 60. pag. 129.

***) Vergl. Plinius, zweites Buch d. Naturg. §. §. 28, 29, 31, 32, wo mehrere hierher gehörige Erscheinungen angeführt werden, wenngleich ohne alle ausführlichere Beschreibung, so dass sie für die Wissenschaft ohne Werth sind. Dasselbe gilt von den bei Livius hie und da angemerkten derartigen Phänomenen.

†) Vergl. Kämtz Lehrb. d. Meteor. Bd. 3. 1836. S. 115.

††) Huygens a. a. O. Seite 71. Eine ganz ungewöhnliche Erscheinung, die dort im Texte nicht ausführlich beschrieben, sondern nur in der zugehörigen

scheinung bei, welche 1233 am 8. April zu Hereford in England beobachtet ward. Ich habe sie auf Taf II. Fig. 5. nach Huygens wiedergegeben.

Schliesslich möchte ich im Interesse der Wissenschaft noch daran erinnern, dass es wohl an der Zeit sein dürfte, endlich die Terminologie bei den hier besprochenen Phänomenen bestimmt festzusetzen. Noch immer haben die Benennungen Nebensonne, Gegensonne, Ring, Hof, eine schwankende Bedeutung, so dass man bei den diese Phänomene betreffenden Beschreibungen, um sicher zu gehen, erst die vom Schriftsteller eingeführten Benennungen sich zu eigen machen muss.

---

Figur näher bezeichnet ist. Dauer: von Sonnenaufgang bis Mittag. Die wahre Sonne stand am reinsten Himmel. — Vergl. auch Fig. 21. der Abhandlung v. Huygens, ein von Kechel von Hollenstein beob. Phänom. darstellend. Schumacher a. a. O. S. 41.

# IV.

## Ueber
# die Lehre von der Dämmerung.

Les phénomènes crépusculaires sont jusqu'a présent trop négligés.

*Biot:* Traité élémentaire d'Astronomie physique. Tome I. Troisième Edition. p. VIII. *).

Von dem Herausgeber.

---

§. 1.

Die Lehre von der Dämmerung ist am besten und gründlichsten von Lambert in seiner Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae. Augustae Vindelicorum. MDCCLX. Pars V. Caput III. dargestellt worden, und unter den neueren Schriftstellern über diesen Gegenstand hat namentlich Biot in seinem Traité élémentaire d'Astronomie physique. Troisième Edition. Tome I. Paris. 1841. p. 317. sich der erwähnten Darstellung von Lambert fast wörtlich angeschlossen, so dass er selbst die von Lambert gebrauchten Figuren in ganz unveränderter Gestalt beibehalten hat. So vorzüglich aber auch Lamberts Darstellung jedenfalls ist, so leidet dieselbe doch eines Theils im Allgemeinen an einer gewissen

*) Auch Humboldt im Kosmos. Thl. I. S. 125. nennt die Dämmerung das wichtige Crepuscular-Phänomen.

Dunkelheit, und andern Theils scheint mir auch — wenigstens nach der blossen Ansicht der betreffenden Figur zu urtheilen — sowohl Lambert, als auch Biot, welcher, wie gesagt, jenem wörtlich gefolgt ist, die Horizontalrefraction nicht ganz richtig in Betrachtung gezogen zu haben, weshalb ich versuchen werde, diesen in mehreren Beziehungen wichtigen und interessanten Gegenstand in der vorliegenden Abhandlung einer neuen, im Wesentlichen sich jedoch gleichfalls an Lambért anschliessenden Behandlung zu unterwerfen, wobei ich voraussetze, dass der Leser im Allgemeinen mit den bei der Dämmerung vorkommenden Erscheinungen bekannt sei. Um aber diese Abhandlung, wie es im Zwecke unserer Zeitschrift liegt, möglichst allgemein und, ohne öfter auf andere Schriften verweisen zu müssen, für sich verständlich zu machen, ist es nöthig, die folgenden Bemerkungen über die atmosphärische Refraction, welche bei der Dämmerung unzweifelhaft eine sehr bedeutende Rolle spielt, vorauszuschicken.

## §. 2.

Bei den folgenden Entwickelungen über die atmosphärische Refraction werden wir von einigen Erfahrungssätzen ausgehen, deren Richtigkeit durch viele mit grosser Sorgfalt und Genauigkeit von mehreren Physikern angestellte Versuche als ausser allem Zweifel gesetzt betrachtet werden kann. Diese Sätze wollen wir, um eine sichere Grundlage für das Folgende zu gewinnen, jetzt hier in der Kürze zusammenstellen, wenn dieselben auch allgemein bekannt sind, und sich in jedem etwas vollständigern physikalischen Lehrbuche finden.

### I.

Der erste dieser Sätze ist das bekannte Fundamentaltheorem der gesammten Dioptrik, dass nämlich für jede zwei brechende Körper das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels und des Sinus des Brechungswinkels zu einander constant ist, und dass dieses Verhältniss jederzeit seinen reciproken Werth erhält, wenn die beiden brechenden Körper mit einander verwechselt werden. Wird also für zwei brechende Körper überhaupt der Einfallswinkel durch $\omega$, der Brechungswinkel durch $\omega'$ bezeichnet, und

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'}=n$$

gesetzt, so ist die Grösse $n$, welche bekanntlich der Brechungsex-

ponent für die beiden in Rede stehenden Körper genannt wird, constant oder verändert ihren Werth nicht, wie sich auch die beiden Winkel $\omega$ und $\omega'$ ändern mögen. Werden aber die beiden brechenden Körper mit einander verwechselt, so erhält der Brechungsexponent seinen reciproken Werth, und wird also in der vorhergehenden Bezeichnung durch den Bruch $\frac{1}{n}$ dargestellt. Auch hat die Erfahrung gelehrt, dass der Brechungsexponent immer grösser oder kleiner als die Einheit ist, jenachdem der Strahl aus einem dünneren in einen dichteren, oder aus einem dichteren in einen dünneren Körper übergeht. Im ersten Falle ist also jederzeit der Einfallswinkel grösser als der Brechungswinkel; im zweiten Falle ist dagegen der Einfallswinkel immer kleiner als der Brechungswinkel.

## II.

Ferner haben die Versuche gelehrt, dass, wenn $A$ und $B$ zwei einander berührende, von parallelen Ebenen begränzte brechende Körper sind, und ein Strahl aus der Luft in den Körper $A$, hierauf aus dem Körper $A$ in den Körper $B$, und dann aus dem Körper $B$ wieder in die Luft übergeht, jederzeit der erste einfallende und der letzte ausfahrende Strahl, die beide in der Luft liegen, einander parallel sind. Bezeichnen wir also den Einfallswinkel und den Brechungswinkel für die Luft und den Körper $A$ durch $\omega$ und $\omega'$, für den Körper $A$ und den Körper $B$ durch $\omega'$ und $\omega''$, für den Körper $B$ und die Luft durch $\omega''$ und $\omega$, wobei man nicht zu übersehen hat, dass die Körper $A$ und $B$ nach der Voraussetzung von parallelen Ebenen begränzt werden und der erste einfallende und letzte ausfahrende Strahl einander parallel sind, die entsprechenden Brechungsexponenten aber durch $m$, $k$, $n$; so ist nach I.

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'} = m, \quad \frac{\sin\omega'}{\sin\omega''} = k, \quad \frac{\sin\omega''}{\sin\omega} = n;$$

also, wenn man diese Gleichungen in einander multiplicirt:

$$mkn = 1,$$

oder

$$k = \frac{1}{mn} = \frac{1}{n} : m,$$

wo $m$ der Brechungsexponent für Luft und den Körper $A$, ferner $\frac{1}{n}$ der Brechungsexponent für Luft und den Körper $B$, endlich $k$.

der Brechungsexponent für die Körper $A$ und $B$ ist. Dies hat überhaupt auf den folgenden, auch noch durch viele andere Versuche ausser allem Zweifel gesetzten Satz geführt:

Wenn für die beiden brechenden Körper $A$ und $B$ der Brechungsexponent $\lambda$, für die beiden brechenden Körper $A$ und $C$ der Brechungsexponent $\mu$ ist, so ist jederzeit $\frac{\mu}{\lambda}$ der Brechungsexponent für die beiden brechenden Körper $B$ und $C$.

Namentlich ist die Richtigkeit dieses Satzes auch in allen den Fällen, wo $A$ der leere Raum ist, und $B$ und $C$ verschiedene Luftarten oder Gasarten sind, durch Versuche ausser allem Zweifel gesetzt worden.

III.

Wenn wir die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur 0 und dem barometrischen Drucke $0^m,76$ als Einheit der Dichtigkeiten der atmosphärischen Luft annehmen; so ist nach allgemein bekannten physikalischen Gesetzen die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur $t$ nach dem Centesimalthermometer und bei dem in Metern ausgedrückten barometrischen Drucke $b$:

$$\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}\ *).$$

Bezeichnen wir nun den Brechungsexponenten für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur $t$ und dem barometrischen Drucke $b$ durch $n$, so zeigen bei verschiedenen Temperaturen und Barometerständen angestellte Versuche, dass der Quotient

$$(n^2-1):\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}$$

oder der Bruch

$$\frac{0^m,76.(1+0,00375.t)(n^2-1)}{b}$$

*) Den allgemein bekannten Coefficienten 0,00375 habe ich hier absichtlich beibehalten, ohne auf neuere Untersuchungen Rücksicht zu nehmen. Bekanntlich ist dieser Coefficient von Gay-Lussac bestimmt worden; nach Rudberg ist derselbe 0,0036457; nach den übereinstimmenden Bestimmungen von Regnault und Magnus dagegen 0,003665, welche letztere Bestimmung gegenwärtig für die genaueste gehalten wird.

sehr nahe eine constante Grösse ist, d. h. dass die Grösse $n^2 - 1$, welche man gewöhnlich die Brechende Kraft zu nennen pflegt, der Dichtigkeit der Luft proportional, oder dass der Quotient der brechenden Kraft durch die Dichtigkeit dividirt, welchen man gewöhnlich das Brechungsvermögen zu nennen pflegt, eine constannte Grösse ist. Bezeichnen wir also, dies vorausgesetzt, den Brechungsexponenten für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ durch $N$, so ist $n = N$ für $t = 0$ und $b = 0^m,76$; folglich, weil der obige Bruch eine constante Grösse ist:

$$\frac{0^m,76.(1 + 0,00375.t)(n^2 - 1)}{b} = N^2 - 1,$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$N = \sqrt{1 + \frac{0^m,76.(1 + 0,00375.t.)(n^2 - 1)}{b}},$$

mittelst welcher Formel der Brechungsexponent $N$ für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ aus den durch unmittelbare Versuche bestimmten Werthen des Brechungsexponenten $n$ für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur $t$ und Barometerhöhe $b$ berechnet werden kann.

Nach Biot ist auf sieben Decimalstellen genau

$$N = 1,0002943$$

und

$$N^2 - 1 = 0,0005888$$

oder noch genauer

$$N^2 - 1 = 0,000588768.$$

Aus der obigen Gleichung zwischen $n$ und $N$ folgt auch

$$n = \sqrt{1 + \frac{b(N^2 - 1)}{0^m,76.(1 + 0,00375.t)}},$$

d. i., wenn wir die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur $t$ und der Barometerhöhe $b$ durch $D$ bezeichnen, weil nach dem Obigen

$$D = \frac{b}{0^m,76.(1 + 0,00375.t)}$$

ist,

$$n = \sqrt{1 + (N^2 - 1)D},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$K = N^2 - 1 = 0{,}000588768$$

setzen, wo also $K$ eine constante Grösse ist:

$$n = \sqrt{1 + KD}.$$

Ist $n_1$ der Brechungsexponent für den leeren Raum und atmosphärische Luft von der Dichtigkeit $D_1$, so ist nach der vorhergehenden Gleichung

$$n_1 = \sqrt{1 + KD_1};$$

also ist nach II.

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\sqrt{1 + KD_1}}{\sqrt{1 + KD}} = \sqrt{\frac{1 + KD_1}{1 + KD}}$$

der Brechungsexponent für atmosphärische Luft von der Dichtigkeit $D$ und atmosphärische Luft von der Dichtigkeit $D_1$.

Dies sind die Erfahrungssätze, welche wir unseren folgenden Betrachtungen über die atmospärische Refraction zum Grunden legen werden.

## §. 3.

In Taf. V. Fig. 1. sei nun $O$ der Mittelpunkt der Erde, welche wir hier als eine Kugel betrachten. Die Atmosphäre der Erde denke man sich von dem Punkte $s$ in derselben an bis zu der Oberfläche der Erde in $n$ mit der Oberfläche der Erde concentrische Schichten von gleicher Höhe eingetheilt, und nehme in jeder dieser Schichten die Luft als gleichförmig dicht an. Die Brechungsexponenten für den leeren Raum und die Luft in der

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, .... $n$ten

Schicht von oben nach unten seien respective

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \ldots\ \lambda_n.$$

Stellen wir uns nun vor, dass ein von dem Punkte $s$ in der Atmosphäre ausgehender Strahl nach und nach bei den Punkten

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ \ldots\ s_{n-1}$$

respective in die

2te, 3te, 4te, 5te, .... $n$te

Schicht übergeht, und bei dem Punkte $s_n$ an der Oberfläche der Erde anlangt, so wird wegen der bekanntlich von oben nach unten hin wachsenden Dichtigkeit der Luft in der Atmosphäre der Erde der ganze Weg

$$s\, s_1\, s_2\, s_3\, s_4 \ldots s_n$$

des Strahls nach dem Erfahrungssatze I. offenbar eine nach der Oberfläche der Erde hin concave gebrochene Linie sein, wobei man nur nicht zu übersehen hat, dass die in der Figur von dem Mittelpunkte $O$ der Erde nach den Punkten $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$, ... $s_{n-1}$ gezogenen geraden Linien die diesen Punkten entsprechenden Einfallslothe sind. Bezeichnen wir nun bei den Punkten

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots s_{n-1}$$

die Einfallswinkel und Brechnungswinkel respective durch

$$z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots z_{n-1}$$

und

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4 \ldots \zeta_{n-1};$$

so haben wir, weil nach dem Erfahrungssatze II. die denselben Punkten entsprechenden Brechungsexponenten

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \frac{\lambda_4}{\lambda_3}, \frac{\lambda_5}{\lambda_4}, \ldots \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}$$

sind, nach dem Erfahrungssatze I. die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\sin z_1}{\sin \zeta_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

$$\frac{\sin z_2}{\sin \zeta_2} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

$$\frac{\sin z_3}{\sin \zeta_3} = \frac{\lambda_4}{\lambda_3},$$

$$\frac{\sin z_4}{\sin \zeta_4} = \frac{\lambda_5}{\lambda_4},$$

u. s. w.

$$\frac{\sin z_{n-1}}{\sin \zeta_{n-1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}.$$

Multiplicirt man aber diese Gleichungen in einander und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man die Gleichung

$$1)\quad \frac{\sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \sin z_4 \ldots \sin z_{n-1}}{\sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin \zeta_3 \sin \zeta_4 \ldots \sin \zeta_{n-1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Bezeichnen wir nun noch, analog mit dem Vorhergehenden, die in den Punkten $s$ und $s_n$ von den Strahlen $s s_1$ und $s_{n-1} s_n$ mit den von dem Mittelpunkte $O$ der Erde nach den Punkten $s$ und $s_n$ gezogenen Einfallslothen eingeschlossenen spitzen Winkel respective durch $\zeta$ und $z_n$; so haben wir in den Dreiecken

$$s\,O\,s_1,\ s_1\,O\,s_2,\ s_2\,O\,s_3,\ s_3\,O\,s_4,\ \ldots\ s_{n-1}\,O\,s_n$$

nach einem bekannten trigonometrischen Elementarsatze die folgenden Proportionen:

$$\begin{aligned}
\sin\zeta : \sin z_1 &= Os_1 : Os,\\
\sin\zeta_1 : \sin z_2 &= Os_2 : Os_1,\\
\sin\zeta_2 : \sin z_3 &= Os_3 : Os_2,\\
\sin\zeta_3 : \sin z_4 &= Os_4 : Os_3,\\
&\text{u. s. w.}\\
\sin\zeta_{n-2} : \sin z_{n-1} &= Os_{n-1} : Os_{n-2},\\
\sin\zeta_{n-1} : \sin z_n &= Os_n : Os_{n-1};
\end{aligned}$$

aus denen sich auf der Stelle durch Zusammensetzung die Proportion

$$\sin\zeta\,\sin\zeta_1\,\sin\zeta_2\,\sin\zeta_3\ldots\sin\zeta_{n-2}\,\sin\zeta_{n-1}$$
$$:\sin z_1\,\sin z_2\,\sin z_3\,\sin z_4\ldots\sin z_{n-1}\,\sin z_n = Os_n : Os,$$

oder die Gleichung

$$2)\quad \frac{\sin z_1\,\sin z_2\,\sin z_3\,\sin z_4\ldots\sin z_{n-1}}{\sin\zeta_1\,\sin\zeta_2\,\sin\zeta_3\,\sin\zeta_4\ldots\sin\zeta_{n-1}}\cdot\frac{\sin z_n}{\sin\zeta}=\frac{Os}{Os_n}$$

ergiebt. Aus der Vergleichung der Gleichungen 1) und 2) erhält man aber auf der Stelle die Gleichung

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\cdot\frac{\sin z_n}{\sin\zeta}=\frac{Os}{Os_n},$$

oder die Gleichung

$$3)\quad \frac{\sin\zeta}{\sin z_n}=\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\cdot\frac{Os_n}{Os}.$$

Denken wir uns nun von dem Mittelpunkte $O$ der Erde auf die gehörig verlängerte Linie $ss_1$ ein Perpendikel gefällt, und bezeichnen dasselbe durch $P$, so ist

$$\sin\zeta=\frac{P}{Os};$$

also nach der Gleichung 3) offenbar

$$\frac{P}{\sin z_n}=\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\cdot Os_n,$$

und folglich, wenn wir den Erdhalbmesser $Os_n$ durch $r$ bezeichnen:

$$4)\quad P=r\,\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\,\sin z_n.$$

Denken wir uns jetzt, dass die Anzahl $n$ der gleich hohen Schichten, in welche wir die Atmosphäre von dem Punkte $s$ bis zum

Punkte $s_n$, d. h. bis zur Oberfläche der Erde, getheilt haben, in's Unendliche wächst, so geht die gebrochene Linie

$$s s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots s_n$$

in eine stetig gekrümmte Linie über; $P$ geht in das von dem Mittelpunkte $O$ der Erde auf die Berührende dieser Curve in dem Punkte $s$ gefällte Perpendikel, und der Winkel $z_n$ geht in den von der Berührenden dieser Curve in dem Punkte $s_n$, wo sie die Oberfläche der Erde trifft, mit dem vom Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte $s_n$ gezogenen Einfallslothe eingeschlossenen spitzen Winkel, welchen wir im Folgenden durch $Z$ bezeichnen wollen, über; ferner gehen $\lambda_1$ und $\lambda_n$ respective in die Brechungsexponenten für den leeren Raum und die atmosphärische Luft in dem Punkte $s$, und für den leeren Raum und die atmosphärische Luft in dem Punkte $s_n$, d. h. an der Erdoberfläche, welche wir im Folgenden respective durch $\lambda$ und $L$ bezeichnen wollen, über, und es ist also nach der Gleichung 4), wenn jetzt $P$ das von dem Mittelpunkte $O$ der Erde auf die dem Punkte $s$ entsprechende Berührende gefällte Perpendikel bezeichnet, für ein unendlich grosses $n$:

$$5)\quad P = r \frac{L}{\lambda} \sin Z,$$

welche Gleichung also eigentlich die Gränzgleichung ist, der sich die Gleichung 4) bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn die ganze Zahl $n$ in's Unendliche wächst.

Auf der Stelle erhellet aber, dass bei der vorhergehenden Betrachtung für den Punkt $s$ auch jeder andere Punkt der zwischen den Punkten $s$ und $s_n$ liegenden atmosphärischen Refractionscurve gesetzt werden kann, so dass also die Gleichung 5) überhaupt für jeden Punkt dieser Curve gilt, was einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen wird, da es sich aus den vorhergehenden Betrachtungen ganz von selbst ergiebt.

Bezeichnen wir nun die Dichtigkeit der Luft an der Erdoberfläche durch $D$, die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft in dem Punkte $s$ dagegen durch $\Delta$; so ist nach dem Erfahrungssatze III.

$$L = \sqrt{1 + KD},\ \lambda = \sqrt{1 + K\Delta};$$

wo $K$ seine aus dem Obigen bekannte Bedeutung hat; also

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{\sqrt{1 + KD}}{\sqrt{1 + K\Delta}},$$

und folglich nach 5)

$$6)\ P = r\frac{\sqrt{1+KD}}{\sqrt{1+K\varDelta}}\sin Z$$

oder

$$7)\ P = r\sqrt{\frac{1+KD}{1+K\varDelta}}\,.\sin Z.$$

§. 4.

Wir wollen nun annehmen, dass in Taf. V. Fig. 2. der Punkt $O$ der Mittelpunkt der Erde, und $OB = OB' = OB'' =$ u. s. w. deren Halbmesser sei. Der um $O$ als Mittelpunkt mit $OA = OA' = OA'' = OA''' =$ u. s. w. als Halbmesser beschriebene Kreis stelle die Gränze der Atmosphäre der Erde dar, wenigstens so weit dieselbe die Lichtstrahlen noch merklich bricht und zurückwirft, was wir in dieser Abhandlung überhaupt immer bloss unter der Gränze der Atmosphäre, wo dieser Ausdruck auch vorkommen mag, verstehen wollen. Tritt nun bei $A$ ein Sonnenstrahl $SA$ in die Atmosphäre, welcher, wegen der Brechung in $A$, von seinem anfänglichen geradlinigen Wege abgelenkt, und nach $AB$, wo $AB$ eine wenig gekrümmte gegen die Erde concave Linie darstellt, gebeugt wird, die Erdoberfläche in dem Punkte $B$ berührt, und dann auf einem dem Wege $AB$ ganz gleichen Wege $BA'$ in $A'$ wieder an das Ende der Atmosphäre gelangt; so wird in dem Orte $M$, dessen Horizont durch die Linie $MN$ dargestellt wird, der Gipfel des Dämmerungsbogens offenbar in der durch den Winkel $NMA'$ dargestellten Höhe erscheinen, was weiter zu erläutern an diesem Orte nicht nöthig sein wird. Diese Dämmerung aber, welche der Ort $M$ sieht, pflegt die erste Dämmerung genannt zu werden, und die der Höhe $NMA'$ des Gipfels des ersten Dämmerungsbogens über dem Horizonte des Punktes $M$ entsprechende Tiefe der Sonne unter dem Horizonte des Punktes $M$ ist offenbar der Winkel $SEN$. Erleidet nun aber der Strahl $ABA'$ in $A'$ an der Gränze der Atmosphäre eine Zurückwerfung, und gelangt demzufolge auf einem dem Wege $ABA$ ganz gleichen Wege $A'B'A''$ in $A''$ zum zweiten Male an das Ende der Atmosphäre, so erblickt der Punkt $M'$, dessen Horizont durch die Linie $M'N'$ dargestellt wird, den Gipfel des Dämmerungsbogens in der durch den Winkel $N'M'A''$ dargestellten Höhe. Diese Dämmerung aber, welche der Ort $M'$ sieht, pflegt die zweite Dämmerung genannt zu werden, und die der Höhe $N'M'A''$ des Gipfels des zweiten Dämmerungsbogens über dem Horizonte des Punkten $M'$ entsprechende Tiefe der Sonne unter dem Horizonte des Punktes $M'$

ist offenbar der Winkel $SE'N'$. Erleidet jetzt ferner der Strahl $A'B'A''$ in $A''$ an der Gränze der Atmosphäre eine neue Zurückwerfung, und gelangt demzufolge auf einem dem Wege $A'B'A''$ ganz gleichen Wege $A''B''A'''$ in $A'''$ wieder an die Gränze der Atmosphäre, so erblickt der Ort $M''$, dessen Horizont durch die Linie $M''N''$ dargestellt wird, den Gipfel des Dämmerungsbogens in der durch den Winkel $N''M''A'''$ dargestellten Höhe. Diese Dämmerung aber, welche der Punkt $M''$ sieht, pflegt die dritte Dämmerung genannt zu werden, und die der Höhe $N''M''A'''$ des Gipfels des Dämmerungsbogens über dem Horizonte des Punktes $M''$ entsprechende Tiefe der Sonne unter dem Horizonte des Punktes $M''$ ist offenbar der Winkel $SE''N''$. Wie man auf diese Art weiter gehen und zu Dämmerungen von noch höheren Ordnungen fortschreiten könnte, unterliegt keinem Zweifel. In der Figur sind der Einfachheit der folgenden Betrachtungen wegen die Höhen der Gipfel aller Dämmerungsbogen über den Horizonten der Punkte $M$, $M'$, $M''$, u. s. w. als gleich angenommen worden, was sonst durchaus nicht unbedingt nöthig gewesen sein würde.

Durch $A$, $A'$, $A''$, $A'''$ u. s. w. und durch $B$, $B'$, $B''$, u. s. w. wollen wir uns jetzt an die Curven $ABA'$, $A'B'A''$, $A''B''A'''$, u. s. w. Berührende gezogen denken, welche aus der Figur ohne weitere Erläuterung ersichtlich sind, und wollen auf die durch $A$, $A'$, $A''$, $A'''$, u. s. w. gehenden Berührenden von dem Mittelpunkte $O$ der Erde die Perpendikel $OC$, $OC'$, $OC''$, $OC'''$, u. s. w. fällen, wodurch die offenbar sämmtlich unter einander congruenten rechtwinkligen Dreiecke $AOC$, $A'OC$, $A''OC'$, $A'''OC''$, u. s. w. erhalten werden. Dann sind die Winkel $BDC$, $BD'C'$; $B'D'C$, $B'D''C'$; $B''D'C''$, $B''D'''C'''$; u. s. w. oder die denselben offenbar gleichen Winkel $BOC$, $BOC'$; $B'OC$, $B'OC''$; $B''OC'$. $B''OC'''$; u. s. w. nach der Lehre von der atmosphärischen Strahlenbrechung augenscheinlich die Horizontalrefraction, und sollen im Folgenden sämmtlich durch $\varrho$ bezeichnet werden. Die sämmtlich einander gleichen Winkel $AOC$, $A'OC'$, $A''OC''$, $A'''OC'''$, u. s. w. sollen durch $\omega$ bezeichnet werden, und die sämmtlich einander gleichen Winkel $A'OM$, $A''OM'$, $A'''OM''$, u. s. w. wollen wir durch $\varphi$ bezeichnen. Die beobachtete Höhe des Gipfels des Dämmerungsbogens über dem Horizonte des Beobachtungsorts soll für jede Dämmerung im Allgemeinen durch $\Theta$, und die entsprechende Tiefe der Sonne unter dem Horizonte des Beobachtungsorts soll im Allgemeinen durch $\Omega$ bezeichnet werden.

Für die erste Dämmerung ist nun

$$\Omega = SEN = COM.$$

Der Winkel $COM$ enthält aber den Winkel $\varrho$ zweimal, den Winkel $\omega$ einmal, und ausserdem noch den Winkel $\varphi$ einmal; also ist

$$COM = 2\varrho + \omega + \varphi,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden auch

$$\Omega = 2\varrho + \omega + \varphi.$$

Für die zweite Dämmerung ist

$$\Omega = SE'N' = COM'.$$

Der Winkel $COM'$ enthält aber den Winkel $\varrho$ viermal, den Winkel $\omega$ dreimal, und ausserdem noch den Winkel $\varphi$ einmal; also ist

$$COM' = 4\varrho + 3\omega + \varphi,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden auch

$$\Omega = 4\varrho + 3\omega + \varphi.$$

Für die dritte Dämmerung ist

$$\Omega = SE''N'' = COM''.$$

Der Winkel $COM''$ enthält aber den Winkel $\varrho$ sechsmal, den Winkel $\omega$ fünfmal, und ausserdem noch den Winkel $\varphi$ einmal; also ist

$$COM'' = 6\varrho + 5\omega + \varphi,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden auch

$$\Omega = 6\varrho + 5\omega + \varphi.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel, und auch das hier obwaltende allgemeine Gesetz fällt auf der Stelle in die Augen. Es ist nämlich offenbar ganz allgemein für die $n$te Dämmerung

$$8)\quad \Omega = 2n\varrho + (2n-1)\omega + \varphi,$$

oder

$$9)\quad (2n-1)\omega + \varphi = \Omega - 2n\varrho.$$

Bezeichnen wir nun aber ferner die einander gleichen Winkel $MA'O$, $M'A''O$, $M''A'''O$, u. s. w. sämmtlich durch $\psi$, so führt die Betrachtung der Dreiecke $A'OM$, $A''OM'$, $A'''OM''$, u. s. w. auf der Stelle zu der Gleichung

$$10)\quad \Theta + \varphi + \psi = 90^0,$$

und wenn wir den Erdhalbmesser durch $r$, die Entfernung der Gränze der Atmosphäre von dem Mittelpunkte der Erde durch $R$ bezeichnen, zu der Proportion

$$11)\quad r : R = \sin\psi : \sin(\varphi + \psi),$$

d. i. wegen der Gleichung 10) zu der Proportion

$$12)\ r : R = \sin\psi : \cos\Theta,$$

oder zu der Proportion

$$13)\ r : R = \cos(\Theta + \varphi) : \cos\Theta.$$

Bezeichnen wir jetzt die einander gleichen Perpendikel $OC$, $OC'$, $OC''$, $OC'''$, u. s. w. sämmtlich durch $P$, so ist offenbar

$$14)\ P = R\cos\omega.$$

Ist aber $D$ die Dichtigkeit der Luft an der Erdoberfläche, $\varDelta$ die Dichtigkeit der Luft an der Gränze der Atmosphäre, so ist nach der Gleichung 7), weil im vorliegenden Falle die scheinbare Zenithdistanz der Sonne in dem Punkte $B$ offenbar 90° ist,

$$P = r\sqrt{\frac{1 + KD}{1 + K\varDelta}},$$

und folglich nach 14):

$$15)\ r\sqrt{\frac{1 + KD}{1 + K\varDelta}} = R\cos\omega.$$

Vermöge der Proportion 13) und der Gleichung 15) haben wir nun die beiden Gleichungen:

$$R\cos(\Theta + \varphi) = r\cos\Theta,$$

$$R\cos\omega = r\sqrt{\frac{1 + KD}{1 + K\varDelta}};$$

aus denen sich durch Division die Gleichung

$$16)\ \frac{\cos(\Theta + \varphi)}{\cos\omega} = \cos\Theta\sqrt{\frac{1 + K\varDelta}{1 + KD}}$$

ergiebt; und verbindet man mit dieser Gleichung die Gleichung 9), nämlich die Gleichung

$$17)\ (2n - 1)\omega + \varphi = \Omega - 2n\varrho,$$

so hat man Gleichungen genug, um die Winkel $\omega$ und $\varphi$ bestimmen zu können. Durch Elimination von $\varphi$ erhält man nämlich leicht zur Bestimmung von $\omega$ die Gleichung

$$18)\ \frac{\cos\{\Theta + \Omega - 2n\varrho - (2n - 1)\omega\}}{\cos\omega} = \cos\Theta\sqrt{\frac{1 + K\varDelta}{1 + KD}},$$

und wenn man mittelst dieser Gleichung $\omega$ gefunden hat, so erhält man $\varphi$ mittelst der Formel

$$19)\ \varphi = \Omega - 2n\varrho - (2n - 1)\omega.$$

Die Entfernung $R$ der Gränze der Atmosphäre von dem Mittelpunkte

der Erde erhält man aber endlich mittelst der aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden Formel:

$$20)\quad R = r\,\frac{\cos\Theta}{\cos(\Theta+\varphi)}.$$

Uebrigens dürfen wir zu bemerken nicht unterlassen, dass wir vorher nur den in Taf. V. Fig. 2. dargestellten speciellen Fall betrachtet haben, wenn die nach den Punkten $M$, $M'$, $M''$, ... gezogenen Erdhalbmesser $OM$, $OM'$, $OM''$, ... links *) von den Linien $OA'$, $OA''$, $OA'''$, ... liegen. Wenn aber der entgegengesetzte Fall Statt finden sollte, d. h. wenn die nach den Punkten $M$, $M'$, $M''$, ... gezogenen Erdhalbmesser rechts *) von den Linien $OA'$, $OA''$, $OA'''$, ... liegen sollten, so brauchte man im Vorhergehenden bloss die durch $\varphi$ und $\psi$ bezeichneten Winkel $A'OM$, $A''OM'$, $A'''OM''$, u. s. w. und $MA'O$, $M'A''O$, $M''A'''O$, u. s. w. als negativ zu betrachten, und der durch $\Theta$ bezeichnete Winkel würde dann nicht mehr, wie im Vorhergehenden, ein spitzer, sondern ein stumpfer Winkel sein. Grösserer Deutlichkeit wegen wollen wir jedoch diesen zweiten Fall nun noch besonders betrachten, überlassen aber dem Leser, die demselben entsprechende Figur, wenn er deren bedürfen sollte, sich selbst zu construiren.

Für die erste Dämmerung ist

$$\Omega = SEN = COM.$$

Der Winkel $COM$ enthält aber den Winkel $\varrho$ zweimal, den Winkel $\omega$ einmal, und ausserdem den negativen Winkel $\varphi$ einmal; d. h., wie leicht erhellen wird, es ist

$$COM = 2\varrho + \omega - (-\varphi)$$

oder

$$COM = 2\varrho + \omega + \varphi,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden auch

$$\Omega = 2\varrho + \omega + \varphi.$$

Für die zweite Dämmerung ist

$$\Omega = SE'N' = COM'.$$

Der Winkel $COM'$ enthält aber den Winkel $\varrho$ viermal, den Winkel $\omega$ dreimal, und ausserdem noch den negativen Winkel $\varphi$ einmal; d. h., wie leicht erhellen wird, es ist

$$COM' = 4\varrho + 3\omega - (-\varphi)$$

oder

*) Immer in Bezug auf die Figur.

$$COM' = 4\varrho + 3\omega + \varphi,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden auch

$$\Omega = 4\varrho + 3\omega + \varphi.$$

Für die dritte Dämmerung ist

$$\Omega = SE''N'' = COM''.$$

Der Winkel $COM''$ enthält aber den Winkel $\varrho$ sechsmal, den Winkel $\omega$ fünfmal, und ausserdem noch den negativen Winkel $\varphi$ einmal; d. h., wie leicht erhellen wird, es ist

$$COM'' = 6\varrho + 5\omega - (-\varphi)$$

oder

$$COM'' = 6\varrho + 5\omega + \varphi,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden auch

$$\Omega = 6\varrho + 5\omega + \varphi.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel, und auch das hier obwaltende allgemeine Gesetz fällt auf der Stelle in die Augen. Es ist nämlich offenbar ganz allgemein für die $n$te Dämmerung

$$8^*)\quad \Omega = 2n\varrho + (2n-1)\omega + \varphi$$

oder

$$9^*)\quad (2n-1)\omega + \varphi = \Omega - 2n\varrho.$$

Bezeichnen wir nun aber ferner die einander gleichen Winkel $MA'O$, $M'A''O$, $M''A'''O$, u. s. w. sämmtlich durch $-\psi$, wo also $\psi$ eine negative Grösse ist, so führt die Betrachtung der Dreiecke $A'OM$, $A''OM'$, $A'''OM''$, u. s. w. auf der Stelle zu der Gleichung

$$\Theta - 90^0 = (-\varphi) + (-\psi),$$

d. i.

$$\Theta - 90^0 = -\varphi - \psi,$$

oder

$$10^*)\quad \Theta + \varphi + \psi = 90^0,$$

und, wenn wir den Erdhalbmesser durch $r$, die Entfernung der Gränze der Atmosphäre von dem Mittelpunkte der Erde durch $R$ bezeichnen, zu der Proportion

$$r : R = \sin(-\psi) : \sin\{(-\varphi) + (-\psi)\},$$

d. i.

$$r : R = -\sin\psi : -\sin(\varphi + \psi).$$

oder

$$11^*)\quad r : R = \sin\psi : \sin(\varphi + \psi),$$

folglich wegen der Gleichung 10*) zu der Proportion

$$12^*)\quad r:R = \sin\psi : \cos\Theta,$$

oder zu der Proportion

$$13^*)\quad r:R = \cos(\Theta+\varphi):\cos\Theta.$$

Bezeichnen wir jetzt die einander gleichen Perpendikel $OC$, $OC'$, $OC''$, $OC'''$, u. s. w. sämmtlich durch $P$, so ist offenbar

$$14^*)\quad P = R\cos\omega.$$

Ist aber $D$ die Dichtigkeit der Luft an der Erdoberfläche, $\Delta$ die Dichtigkeit der Luft an der Gränze der Atmosphäre, so ist nach der Gleichung 7), weil im vorliegenden Falle die scheinbare Zenithdistanz der Sonne in dem Punkte $B$ offenbar $90^0$ ist,

$$P = r\sqrt{\frac{1+KD}{1+K\Delta}},$$

und folglich nach 14*):

$$15^*)\quad r\sqrt{\frac{1+KD}{1+K\Delta}} = R\cos\omega.$$

Vermöge der Proportion 13*) und der Gleichung 15*) haben wir nun die beiden Gleichungen

$$R\cos(\Theta+\varphi) = r\cos\Theta,$$

$$R\cos\omega = r\sqrt{\frac{1+KD}{1+K\Delta}};$$

aus denen sich durch Division die Gleichung

$$16^*)\quad \frac{\cos(\Theta+\varphi)}{\cos\omega} = \cos\Theta\sqrt{\frac{1+K\Delta}{1+KD}}$$

ergiebt; und verbindet man mit dieser Gleichung die Gleichung 9*), nämlich die Gleichung

$$17^*)\quad (2n-1)\omega+\varphi = \Omega - 2n\varrho,$$

so hat man Gleichungen genug, um die Winkel $\omega$ und $\varphi$ bestimmen zu können. Durch Elimination von $\varphi$ erhält man nämlich leicht zur Bestimmung von $\omega$ die Gleichung

$$18^*)\quad \frac{\cos\{\Theta+\Omega-2n\varrho-(2n-1)\omega\}}{\cos\omega} = \cos\Theta\sqrt{\frac{1+K\Delta}{1+KD}}$$

und wenn man mittelst dieser Gleichung $\omega$ gefunden hat, so erhält man $\varphi$ mittelst der Formel

$$19^*)\quad \varphi = \Omega - 2n\varrho - (2n-1)\omega.$$

Die Entfernung $R$ der Gränze der Atmosphäre von dem Mittelpunkte der Erde erhält man aber endlich mittelst der aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden Formel

$$20^*)\quad R = r\frac{\cos\Theta}{\cos(\Theta+\varphi)}.$$

Vergleicht man dies mit dem Vorhergehenden, so erhellet auf der Stelle, dass die für den ersten Fall entwickelten Formeln auch für den zweiten Fall gelten, wenn man nur die im ersten Falle absolut genommenen $90^0$ nicht übersteigenden Winkel $\varphi$ und $\psi$ im zweiten Falle negativ und den Winkel $\Theta$ stumpf nimmt.

Für $\Theta = 0$ behalten alle vorhergehenden Gleichungen ihre Gültigkeit und vereinfachen sich nur noch einigermassen, was hier keiner weiteren Erläuterung bedarf.

Für $\Theta = 90^0$ aber, unter welcher Voraussetzung also die Punkte $M$, $M'$, $M''$, u. s. w. respective in den Verticalen $OA'$, $OA''$, $OA'''$, u. s. w. liegen, ist noch die folgende Betrachtung nöthig. Da in diesem Falle offenbar $\varphi = 0$ ist, so wird die Gleichung 9)

$$(2n-1)\omega = \Omega - 2n\varrho,$$

also

$$\omega = \frac{\Omega - 2n\varrho}{2n-1},$$

und folglich

$$\omega + \varrho = \frac{\Omega - 2n\varrho}{2n-1} + \varrho = \frac{\Omega - \varrho}{2n-1}.$$

Da nun die Winkel $A'OB$, $A''OB'$, $A'''OB''$, u. s. w. offenbar sämmtlich $\omega + \varrho$ sind, so ist in den auf gleiche Weise bezeichneten Dreiecken, wie sogleich in die Augen fallen wird,

$$R = r\sec(\omega + \varrho) = \frac{r}{\cos(\omega + \varrho)},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$20^*)\quad R = r\sec\left(\frac{\Omega - \varrho}{2n-1}\right) = \frac{r}{\cos\left(\frac{\Omega - \varrho}{2n-1}\right)},$$

nach welcher Formel also in dem vorliegenden Falle immer leicht gerechnet werden kann, weshalb es auch nicht nöthig ist, diesen Fall fernerhin noch besonders in's Auge zu fassen.

## §. 5.

Wir wollen nun die erste Dämmerung einer genaueren Betrachtung unterwerfen.

Aus der Gleichung 16), nämlich aus der Gleichung

$$\frac{\cos(\Theta+\varphi)}{\cos\omega}=\cos\Theta\sqrt{\frac{1+K\Delta}{1+KD}},$$

folgt leicht

$$\frac{\cos\omega+\cos(\Theta+\varphi)}{\cos\omega-\cos(\Theta+\varphi)}=\frac{\sqrt{1+KD}+\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}}{\sqrt{1+KD}-\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}},$$

d. i. nach bekannten goniometrischen Formeln:

$$\cot{}^1/_2(\Theta+\varphi+\omega)\cot{}^1/_2(\Theta+\varphi-\omega)$$
$$=\frac{\sqrt{1+KD}+\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}}{\sqrt{1+KD}-\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}},$$

also

$$21)\quad \cot{}^1/_2(\Theta+\varphi-\omega)$$
$$=\frac{\sqrt{1+KD}+\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}}{\sqrt{1+KD}-\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}}\operatorname{tang}{}^1/_2(\Theta+\varphi+\omega).$$

Nach 17) ist aber für $n=1$:

$$\varphi+\omega=\Omega-2\varrho.$$

Also ist

$$22)\quad \cot{}^1/_2(\Theta+\varphi-\omega)$$
$$=\frac{\sqrt{1+KD}+\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}}{\sqrt{1+KD}-\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}}\operatorname{tang}{}^1/_2(\Theta+\Omega-2\varrho)$$

oder

$$23)\quad \cot{}^1/_2(\Theta+\varphi-\omega)$$
$$=\frac{\sqrt{1+KD}+\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}}{\sqrt{1+KD}-\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}}\operatorname{tang}\left\{{}^1/_2(\Theta+\Omega)-\varrho\right\},$$

oder auch

$$24)\quad \operatorname{tang}{}^1/_2(\Theta+\varphi-\omega)$$
$$=\frac{\sqrt{1+KD}-\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}}{\sqrt{1+KD}+\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}}\cot\left\{{}^1/_2(\Theta+\Omega)-\varrho\right\}.$$

Mittelst dieser Gleichungen kann man $\varphi-\omega$ finden, und da man nun nach dem Obigen auch die Summe $\varphi+\omega$ wegen der Formel

$$25)\quad \varphi + \omega = \Omega - 2\varrho$$

kennt, so lassen sich die Winkel $\varphi$ und $\omega$ auf bekannte Weise mittelst der Formeln

$$26)\quad \begin{cases} \varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \omega) + \frac{1}{2}(\varphi - \omega), \\ \omega = \frac{1}{2}(\varphi + \omega) - \frac{1}{2}(\varphi - \omega) \end{cases}$$

bestimmen.

Berechnet man den Hülfswinkel $u$ mittelst der Formel

$$27)\quad \cos u = \cos\Theta\sqrt{\frac{1+K\varDelta}{1+KD}},$$

so ist, wie sich aus 23) oder 24) leicht ergiebt:

$$28)\quad \cot\tfrac{1}{2}(\Theta+\varphi-\omega) = \cot\tfrac{1}{2}u^2 \tan\{\tfrac{1}{2}(\Theta+\Omega)-\varrho\}$$

oder

$$29)\quad \tan\tfrac{1}{2}(\Theta+\varphi-\omega) = \tan\tfrac{1}{2}u^2 \cot\{\tfrac{1}{2}(\Theta+\Omega)-\varrho\}.$$

Man kann aber auch jeden der beiden Winkel $\varphi$ und $\omega$ für sich unmittelbar bestimmen. Weil nämlich nach 17) für $n = 1$

$$\omega = \Omega - 2\varrho - \varphi,$$
$$\varphi = \Omega - 2\varrho - \omega$$

ist, so ist nach 16)

$$\frac{\cos(\Theta+\varphi)}{\cos(\Omega-2\varrho-\varphi)} = \cos\Theta\sqrt{\frac{1+K\varDelta}{1+KD}},$$

$$\frac{\cos(\Theta+\Omega-2\varrho-\omega)}{\cos\omega} = \cos\Theta\sqrt{\frac{1+K\varDelta}{1+KD}};$$

oder, wenn wir etwas grösserer Symmetrie wegen statt des Winkels $\varphi$ jetzt den Winkel $\psi$ einführen, weil nach 10)

$$\varphi = 90^0 - \Theta - \psi$$

ist:

$$\frac{\sin\psi}{\sin(\Theta+\Omega-2\varrho+\psi)} = \cos\Theta\sqrt{\frac{1+K\varDelta}{1+KD}},$$

$$\frac{\cos(\Theta+\Omega-2\varrho-\omega)}{\cos\omega} = \cos\Theta\sqrt{\frac{1+K\varDelta}{1+KD}}.$$

Also ist, wie leicht erhellet:

$$\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)\cot\psi + \cos(\Theta+\Omega-2\varrho) = \frac{\sqrt{1+KD}}{\cos\Theta\sqrt{1+K\varDelta}},$$

$$\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)\tan\omega + \cos(\Theta+\Omega-2\varrho) = \frac{\cos\Theta\sqrt{1+K\varDelta}}{\sqrt{1+KD}};$$

und folglich

$$30)\begin{cases} \cot\psi = \dfrac{\sqrt{1+KD}}{\cos\Theta\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)\sqrt{1+K\Delta}} - \cot(\Theta+\Omega-2\varrho), \\ \tan\omega = \dfrac{\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}}{\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)\sqrt{1+KD}} - \cot(\Theta+\Omega-2\varrho). \end{cases}$$

Durch Einführung von ein Paar Hülfswinkeln $P$, $Q$ kann man sich die Rechnung nach diesen Formeln erleichtern, indem man nämlich auf diese Weise leicht die folgenden Formeln erhält:

$$30^*)\begin{cases} \cot P = \dfrac{\sqrt{1+KD}}{\cos\Theta\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)\sqrt{1+K\Delta}}, \\ \cot\psi = \dfrac{\sin(\Theta+\Omega-P-2\varrho)}{\sin P\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)}; \\ \cot Q = \dfrac{\cos\Theta\sqrt{1+K\Delta}}{\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)\sqrt{1+KD}}, \\ \tan\omega = \dfrac{\sin(\Theta+\Omega-Q-2\varrho)}{\sin Q\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Barometerhöhe und die Temperatur an der Oberfläche der Erde durch $b$ und $t$, die Barometerhöhe und die Temperatur an der Gränze der Atmosphäre durch $\beta$ und $\tau$, die Barometerhöhen nach dem metrischen Barometer, die Temperaturen nach dem Centesimalthermometer genommen, so haben wir nach §. 2. III. zur Berechnung der Dichtigkeiten $D$ und $\Delta$ die folgenden Formeln:

$$31)\begin{cases} D = \dfrac{b}{0^m{,}76.(1+0{,}00375.t)}, \\ \Delta = \dfrac{\beta}{0^m{,}76.(1+0{,}00375.\tau)}. \end{cases}$$

Bei der Einführung der Horizontalrefraction in die obigen Formeln muss man die zeitige Barometerhöhe $b$ und Temperatur $t$ an der Oberfläche der Erde gehörig berücksichtigen, und auch die gemessene Höhe des Dämmerungsbogens muss wegen der Refraction

gehörig corrigirt werden. Da man aber bei der Correction der gemessenen Höhe $\Theta$ offenbar am Besten und Genauesten nicht die astronomische, sondern die terrestrische Refraction in Anwendung bringen wird, so wird man dabei nicht anders verfahren können, als dass man zuerst aus der gemessenen Höhe $\Theta$ die Höhe der Atmosphäre näherungsweise berechnet, und daraus mittelst einfacher Auflösung eines ebenen Dreiecks, die ein Jeder leicht selbst finden wird, den Winkel am Mittelpunkte der Erde bestimmt, welcher von dem nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmesser und der vom Mittelpunkte der Erde nach dem beobachteten Gipfel des Dämmerungsbogens gezogenen geraden Linie eingeschlossen wird, von welchem Winkel bekanntlich die terrestrische Refraction abhängt. Hat man also diesen Winkel, so kann man die terrestrische Refraction bestimmen, wegen derselben die gemessene Höhe $\Theta$ corrigiren, und dann die Höhe der Atmosphäre von Neuem berechnen.

In Betreff der Grösse $\varDelta$ ist zu bemerken, dass dieselbe natürlich von der Höhe der Atmosphäre selbst abhängig ist, und daher in den obigen Formeln nicht als bekannt angenommen werden kann. Gewiss wird man dieselbe aber wegen ihrer grossen Kleinheit ohne merklichen Fehler zuerst als verschwindend zu betrachten berechtigt sein, und kann dann unter dieser Voraussetzung mittelst der obigen Formeln die Höhe der Atmosphäre berechnen. Hat man aber auf diese Weise einen ersten Näherungswerth der Höhe der Atmosphäre gefunden, so kann man denselben benutzen, um aus der beobachteten Barometerhöhe an der Oberfläche der Erde mittelst des Mariotte'schen Gesetzes die Dichtigkeit der Luft an der Gränze der Atmosphäre zu bestimmen, und, indem man dieselbe für $\varDelta$ in die obigen Formeln einführt, einen zweiten Näherungswerth der Höhe der Atmosphäre finden. Auch ist hier schon klar, wie man auf diesem Wege der successiven Näherungen der genauen Bestimmung der Höhe der Atmosphäre immer näher und näher kommen kann, wobei jedoch auch nicht unbemerkt gelassen werden darf, dass diese Rechnungen immer nur sehr unsicher bleiben werden, weil man bei der Bestimmung der Dichtigkeit der Luft an der Gränze der Atmosphäre natürlich auch auf die Abnahme der Temperatur in derselben von unten nach oben Rücksicht nehmen müsste, welches nicht möglich ist, da man das Gesetz dieser Abnahme noch gar nicht kennt; auch würde hierbei überdies noch die bekannte Frage nach der begränzten oder unbegränzten Richtigkeit des Mariotte'schen Gesetzes in Betracht gezogen werden müssen, indem durch dieselbe natürlich die Richtigkeit und Zulässigkeit der oben angegebenen Berechnungs-

art der Dichtigkeit der Luft an der Gränze der Atmosphäre vorzüglich mit bedingt wird.

Wir wollen nun noch einige Näherungsformeln zur Berechnung der obigen unbekannten Grössen entwickeln.

Setzt man nämlich

$$\sqrt{1+KD} = 1+d,\ \sqrt{1+K\Delta} = 1+\delta;$$

wo nach dem Binomischen Lehrsatze

$$32)\begin{cases} d = \tfrac{1}{2}KD - \tfrac{1}{8}(KD)^2 + \tfrac{1}{16}(KD)^3 - \ldots., \\ \delta = \tfrac{1}{2}K\Delta - \tfrac{1}{8}(K\Delta)^2 + \tfrac{1}{16}(K\Delta)^3 - \ldots. \end{cases}$$

ist; so ist nach 24)

$$33)\ tang\,\tfrac{1}{2}(\Theta+\varphi-\omega) = \frac{1+d-(1+\delta)\cos\Theta}{1+d+(1+\delta)\cos\Theta}\cot\left\{\tfrac{1}{2}(\Theta+\Omega)-\varrho\right\}.$$

Weil nun

$$1 - \cos\Theta = 2\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2,$$
$$1 + \cos\Theta = 2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2$$

ist, so ist für $\delta = 0$:

$$34)\ tang\,\tfrac{1}{2}(\Theta+\varphi-\omega) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 + \tfrac{1}{2}d}{\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 + \tfrac{1}{2}d}\cot\left\{\tfrac{1}{2}(\Theta+\Omega)-\varrho\right\}.$$

Die Grösse $\tfrac{1}{2}d$ ist aber wegen der grossen Kleinheit von $KD$ immer nur sehr klein, und man kann daher näherungsweise mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf $\tfrac{1}{2}d$ von der zweiten Ordnung sind,

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 + \tfrac{1}{2}d}{\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 + \tfrac{1}{2}d} = tang\,\tfrac{1}{2}\Theta^2 + \frac{\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 - \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2}{2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^4}d,$$

d. i.

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 + \tfrac{1}{2}d}{\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 + \tfrac{1}{2}d} = tang\,\tfrac{1}{2}\Theta^2 + \frac{\cos\Theta}{2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^4}d;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$35)\ tang\,\tfrac{1}{2}(\Theta+\varphi-\omega)$$

$$= tang\,\tfrac{1}{2}\Theta^2\cot\left\{\tfrac{1}{2}(\Theta+\Omega)-\varrho\right\} + \frac{\cos\Theta\cot\left\{\tfrac{1}{2}(\Theta+\Omega)-\varrho\right\}}{2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^4}d$$

setzen.

Für $\delta = 0$ ist ferner nach 30):

$$36)\left\{\begin{aligned} \cot\psi &= -\cot(\Theta+\Omega-2\varrho)+\frac{1+d}{\cos\Theta\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)},\\ \tang\omega &= -\cot(\Theta+\Omega-2\varrho)+\frac{\cos\Theta}{(1+d)\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)};\end{aligned}\right.$$

oder näherungsweise

$$37)\left\{\begin{aligned} \cot\psi &= -\cot(\Theta+\Omega-2\varrho)+\frac{1+d}{\cos\Theta\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)},\\ \tang\omega &= -\cot(\Theta+\Omega-2\varrho)+\frac{(1-d)\cos\Theta}{\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)}.\end{aligned}\right.$$

Auch ist

$$38)\left\{\begin{aligned} \cot\psi &= \frac{1-\cos\Theta\cos(\Theta+\Omega-2\varrho)}{\cos\Theta\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)}+\frac{d}{\cos\Theta\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)},\\ \tang\omega &= \frac{\cos\Theta-\cos(\Theta+\Omega-2\varrho)}{\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)}-\frac{d\cos\Theta}{\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)};\end{aligned}\right.$$

oder, weil

$$\begin{aligned}&\cos\Theta-\cos(\Theta+\Omega-2\varrho)\\ &=2\sin(\tfrac{1}{2}\Omega-\varrho)\sin(\Theta+\tfrac{1}{2}\Omega-\varrho)\end{aligned}$$

ist:

$$39)\left\{\begin{aligned} \cot\psi &= \frac{1-\cos\Theta\cos(\Theta+\Omega-2\varrho)}{\cos\Theta\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)}+\frac{d}{\cos\Theta\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)},\\ \tang\omega &= \frac{2\sin(\tfrac{1}{2}\Omega-\varrho)\sin(\Theta+\tfrac{1}{2}\Omega-\varrho)}{\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)}-\frac{d\cos\Theta}{\sin(\Theta+\Omega-2\varrho)}.\end{aligned}\right.$$

Hat man $\psi$ oder $\omega$ gefunden, so ergiebt sich $\varphi$ mittelst eines der beiden folgenden Ausdrücke:

$$40)\quad \varphi = 90^0-\Theta-\psi=\Omega-2\varrho-\omega.$$

Die Grösse $R$ findet man mittelst der Formel 20), nämlich mittelst der Formel

$$41)\quad R = r\frac{\cos\Theta}{\cos(\Theta+\varphi)},$$

oder $R-r$ mittelst der Formel

$$42)\quad R-r=r\frac{\cos\Theta-\cos(\Theta+\varphi)}{\cos(\Theta+\varphi)},$$

d. i. mittelst der Formel

$$43)\quad R-r=2r\frac{\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin(\Theta+\tfrac{1}{2}\varphi)}{\cos(\Theta+\varphi)}.$$

Für die folgenden Dämmerungen, wenn nämlich $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ ist, hat man nach 18) zur Bestimmung des Winkels $\omega$ respective die nachstehenden Gleichungen:

$$\frac{\cos(\Theta + \Omega - 4\varrho - 3\omega)}{\cos\omega} = \cos\Theta \sqrt{\frac{1 + K\varDelta}{1 + KD}},$$

$$\frac{\cos(\Theta + \Omega - 6\varrho - 5\omega)}{\cos\omega} = \cos\Theta \sqrt{\frac{1 + K\varDelta}{1 + KD}},$$

$$\frac{\cos(\Theta + \Omega - 8\varrho - 7\omega)}{\cos\omega} = \cos\Theta \sqrt{\frac{1 + K\varDelta}{1 + KD}},$$

$$\frac{\cos(\Theta + \Omega - 10\varrho - 9\omega)}{\cos\omega} = \cos\Theta \sqrt{\frac{1 + K\varDelta}{1 + KD}},$$

u. s. w.

In allen diesen Fällen wird man am besten thun, die vorstehenden Gleichungen bloss durch Näherung aufzulösen *), und hat dann zur Bestimmung des Winkels $\varphi$ respective die folgenden Formeln:

---

*) Eine Gleichung von der allgemeinen Form

$$\cos(\alpha - 3x) = a\cos x$$

kann man jedoch auch auf folgende Art auflösen.

Weil

$$a\cos x = \cos\alpha\cos 3x + \sin\alpha\sin 3x$$

und

$$\cos 3x = \cos x^3 - 3\cos x\sin x^2, \quad \sin 3x = 3\cos x^2\sin x - \sin x^3$$

ist, so ist

$$a\cos x$$
$$= \cos\alpha(\cos x^3 - 3\cos x\sin x^2) + \sin\alpha(3\cos x^2\sin x - \sin x^3),$$

und folglich

$$\frac{a}{\cos x^2} = a\sec x^2 = a(1 + \tang x^2)$$
$$= \cos\alpha(1 - 3\tang x^2) + \sin\alpha(3\tang x - \tang x^3),$$

also

$$\left.\begin{array}{r}\sin\alpha\tang x^3 + (a + 3\cos\alpha)\tang x^2 - 3\sin\alpha\tang x \\ + a - \cos\alpha\end{array}\right\} = 0$$

oder

$$\left.\begin{array}{r}\tang x^3 + (3\cot\alpha + a\,\mathrm{cosec}\,\alpha)\tang x^2 - 3\tang x \\ - (\cot\alpha - a\,\mathrm{cosec}\,\alpha)\end{array}\right\} = 0.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$u = \tang x,$$

so wird die vorstehende Gleichung:

$$\varphi = \Omega - 4\varrho - 3\omega,$$
$$\varphi = \Omega - 6\varrho - 5\omega,$$
$$\varphi = \Omega - 8\varrho - 7\omega,$$
$$\varphi = \Omega - 10\varrho - 9\omega,$$

u. s. w.

---

$$\left.\begin{array}{r} u^3 + (3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)u^2 - 3u \\ -(\cot\alpha - a\operatorname{cosec}\alpha) \end{array}\right\} = 0.$$

Um in dieser Gleichung das zweite Glied wegzuschaffen, setze man nach bekannten Regeln

$$u = v - \cot\alpha - {}^1/_3\, a\operatorname{cosec}\alpha,$$

so ist

$$\begin{aligned} u^3 = v^3 &- (3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)v^2 \\ &+ {}^1/_3(3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)^2 v \\ &- {}^1/_{27}(3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)u^2 = &\ (3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)v^2 \\ &- {}^2/_3(3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)^2 v \\ &+ {}^1/_9(3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)^3, \end{aligned}$$

$$-3u = -3v + (3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha),$$

$$-(\cot\alpha - a\operatorname{cosec}\alpha) = -(\cot\alpha - a\operatorname{cosec}\alpha).$$

Also ist, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} u^3 &+ (3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)u^2 - 3u - (\cot\alpha - a\operatorname{cosec}\alpha) \\ &= v^3 - {}^1/_3\{9 + (3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)^2\}v \\ &+ 2(\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha) + {}^2/_{27}(3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)^3, \end{aligned}$$

und man hat folglich zur Bestimmung von $v$ die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} v^3 - {}^1/_3\{9 + (3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)^2\}v \\ + 2(\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha) + {}^2/_{27}(3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)^3 \end{array}\right\} = 0.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} &9 + (3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)^2 \\ &= 9 + 9\cot\alpha^2 + 6a\cot\alpha\operatorname{cosec}\alpha + a^2\operatorname{cosec}\alpha^2 \\ &= (9 + 6a\cos\alpha + a^2)\operatorname{cosec}\alpha^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &2(\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha) + {}^2/_{27}(3\cot\alpha + a\operatorname{cosec}\alpha)^3 \\ &= {}^2/_{27}\{9(3 + a^2)\cot\alpha + a(27 + a^2)\operatorname{cosec}\alpha\}\operatorname{cosec}\alpha^2. \end{aligned}$$

Also ist die Gleichung zur Bestimmung von $v$:

$$\left.\begin{array}{l} v^3 - \dfrac{9 + 6a\cos\alpha + a^2}{3\sin\alpha^2}v \\ + \dfrac{2\{a(27 + a^2) + 9(3 + a^2)\cos\alpha\}}{27\sin\alpha^3} \end{array}\right\} = 0,$$

oder

Die Grössen $R$ oder $R - r$ findet man aber auch in allen diesen Fällen mittelst der Formeln 41) oder 43).

## §. 6.

Wir wollen jetzt auch zeigen, wie man sich bei der Berechnung der im Vorhergehenden durch $\Omega$ bezeichneten Tiefe der Sonne unter dem Horizonte des Beobachtungsorts, welche der Zeit, wo die Höhe des Gipfels des Dämmerungsbogens gemessen wurde, entspricht, zu verhalten hat.

Zuerst muss man den der Zeit der Beobachtung entsprechenden, $180^0$ nicht übersteigenden östlichen oder westlichen Stundenwinkel $\sigma$ der Sonne, und die derselben Zeit entsprechende Declination $\delta$ der Sonne aus den Ephemeriden berechnen, was keine Schwierigkeit hat und in jedem Lehrbuche der Astronomie gelehrt wird. Dann ergiebt sich aus der Betrachtung von Taf. V. Fig. 3. auf der Stelle, dass, wenn wir die Polhöhe des Beobachtungsorts durch $\varpi$, und die der Zeit der Beobachtung entsprechende Zenithdistanz der Sonne durch $z$ bezeichnen, in dem spärischen Dreiecke $SPZ$ zwischen der Sonne, dem Pol und dem Zenith $\angle SPZ = \sigma$, $PZ = 90^0 - \varpi$, $PS = 90^0 - \delta$, $ZS = z$ ist. Weil nun in dem in Rede stehenden sphärischen Dreiecke nach den Principien der sphärischen Trigonometrie

$$\cos ZS = \cos PZ . \cos PS + \sin PZ . \sin PS . \cos SPZ$$

ist, so ist

$$44)\quad \cos z = \sin\delta \sin\varpi + \cos\delta \cos\varpi \cos\sigma$$

Jenachdem nun aber

$$0 < \Omega < 90^0 \text{ oder } 90^0 < \Omega < 180^0$$

ist, ist offenbar

---

$$\left.\begin{array}{l} v^3 - \dfrac{3(1 + {}^2/_3\, a\cos\alpha + {}^1/_9\, a^2)}{\sin\alpha^2}\, v \\ + \dfrac{2\{a(1 + {}^1/_{27}\, a^2) + (1 + {}^1/_3\, a^2)\cos\alpha\}}{\sin\alpha^3} \end{array}\right\} = 0.$$

Hat man $v$ mittelst dieser Gleichung des dritten Grades bestimmt, so erhält man

$$u = \tang x$$

mittelst der aus dem Obigen bekannten Formel

$$u = v - \cot\alpha - {}^1/_3\, a \operatorname{cosec}\alpha$$

oder

$$u = v - \frac{3\cos\alpha + a}{3\sin\alpha}.$$

$$\Omega = z - 90^0 \text{ oder } \Omega = 270^0 - z,$$

also immer

$$\sin\Omega = -\cos z,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$45) \quad \sin\Omega = -\sin\delta\sin\varpi - \cos\delta\cos\varpi\cos\sigma.$$

Weil aber

$$\sin\Omega = -\sin\delta(\sin\varpi + \cos\varpi\cos\sigma\cot\delta)$$
$$= -\sin\varpi(\sin\delta + \cos\delta\cos\sigma\cot\varpi)$$

ist, so berechne man die Hülfswinkel $v$, $w$ mittelst der Formeln

$$46) \begin{cases} \cot v = \cos\sigma\cot\delta, \\ \cot w = \cos\sigma\cot\varpi; \end{cases}$$

dann ist

$$\sin\Omega = -\sin\delta(\sin\varpi + \cos\varpi\cot v)$$
$$= -\sin\varpi(\sin\delta + \cos\delta\cot w),$$

also

$$47) \quad \sin\Omega = -\frac{\sin\delta\cos(\varpi - v)}{\sin v}$$
$$= -\frac{\sin\varpi\cos(\delta - w)}{\sin w}.$$

Ob $\Omega$ zwischen 0 und 90° oder zwischen 90° und 180° zu nehmen ist, muss jederzeit aus den besonderen Umständen der Beobachtung beurtheilt werden, was niemals Schwierigkeiten haben wird.

Die Entwickelung anderer Methoden zur Berechnung von $\Omega$, welche die verschiedenen bekannten Relationen der sphärischen Trigonometrie, namentlich die Neper'schen Analogieen an die Hand geben, kann füglich dem eignen Fleisse des Lesers überlassen werden, indem das Obige für unsern gegenwärtigen Zweck völlig hinreicht.

## §. 7.

Mit der Aufgabe von der kürzesten Dämmerung haben sich mehrere berühmte Mathematiker längere Zeit eifrig beschäftigt, und wir dürfen daher diese Aufgabe schon wegen der grossen Berühmtheit, welche dieselbe erlangt hat, hier nicht unberührt lassen; aber auch in einer andern Beziehung scheint uns eine neue analytische Auflösung dieser Aufgabe nicht überflüssig zu sein, weil man bei den Auflösungen derselben durch die Differentialrechnung, wenigstens meistens und so viel uns bekannt geworden ist, den Nach-

weis zu geben unterlassen hat, dass die gefundene Bedingung, welche eigentlich nur die allgemeine Bedingung des Maximums und Minimums ist, oder auch keinem von beiden entsprechen kann, im vorliegenden Falle wirklich einem Minimum entspricht. Mit besonderer Rücksicht hierauf wollen wir daher in den folgenden Paragraphen eine neue analytische Auflösung der berühmten Aufgabe von der kürzesten Dämmerung zu geben versuchen, welche vielleicht auch noch in anderer Beziehung das Problem vollständiger behandelt als die bisherigen Auflösungen, und uns zugleich Gelegenheit zu einigen allgemeinen Bemerkungen über die Dämmerung überhaupt geben wird, von denen bis jetzt absichtlich noch nicht die Rede gewesen ist.

§. 8.

Unter der Dauer der Dämmerung an einem gewissen Tage versteht man überhaupt die Zeit, welche an diesem Tage die Sonne, die wir stets als einen Fixstern betrachten und also auf die Veränderlichkeit ihrer Declination an dem in Rede stehenden Tage nicht Rücksicht nehmen, gebraucht, um aus dem Horizonte bis zu einer bestimmten Tiefe unter demselben, welche überhaupt durch $\alpha$ bezeichnet werden mag und $90^0$ nicht übersteigen soll, oder umgekehrt aus derselben Tiefe $\alpha$ unter dem Horizonte bis in den letzteren zu gelangen, von welchen beiden Fällen bekanntlich der erstere der Abenddämmerung, der letztere der Morgendämmerung entspricht. Ob nun diese Tiefe $\alpha$ nach der gewöhnlichen Annahme gleich $18^0$ zu setzen ist, oder welchen numerischen Werth dieselbe überhaupt haben mag *), ist für die folgenden allgemeinen Betrachtungen ganz gleichgültig, indem es namentlich bei der Auflösung der Aufgabe von der kürzesten Dämmerung nur darauf ankommt, zu wissen, dass $\alpha$ eine constante Grösse ist und bei allen Anwendungen der Differentialrechnung als eine solche behandelt werden muss. Natürlich muss die Grösse $\alpha$ auch im Folgenden überall als bekannt oder gegeben angesehen werden. Die Polhöhe des Beobachtungsortes, welche wie im Vorhergehenden wieder durch $\varpi$ bezeichnet

---

*) Delambre sagt in seiner Astronomie théorique et pratique. Tome I. p. 340. über die Dauer der Dämmerung: „On ne connaît qu'un petit nombre d'observations de cette durée: deux sont de La Caille qui dans la zône torride a trouvé l'abaissement du soleil pour les momens où le crépuscule commence et finit $= 16^0$ et $17^0$; Lemonnier a trouvé de 17 à $21^0$: les Anciens supposaient $18^0$.

werden mag, ist im Folgenden auch immer als gegeben zu betrachten und bei den Anwendungen der Differentialrechnung als eine Constante zu behandeln.

Um nun zuerst im Allgemeinen zu zeigen, wie überhaupt für jeden bestimmten Tag die Dauer der Dämmerung berechnet werden kann, sei in Taf. V. Fig. 4. das Zenith des Beobachtungsorts $Z$, der Pol sei $P$, der Horizont sei $HT$, und $MN$ sei der Parallelkreis, welchen die Sonne $S$ an dem Tage, für den die Dauer der Dämmerung bestimmt werden soll, beschreibt. Ist dann $ZS = 90^0 + \alpha$, so wird die Dauer der Dämmerung an dem in Rede stehenden Tage durch die Zeit bestimmt, welche die Sonne gebraucht, um den Bogen $SS'$ ihres Parallelkreises zu durchlaufen. Diese Zeit wird aber bekanntlich lediglich durch den Winkel $SPS'$ bestimmt, und lässt sich leicht berechnen, wenn dieser Winkel bekannt ist, so dass es also bei der Ermittelung der Dauer der Dämmerung einzig und allein auf die Bestimmung des Winkels $SPS'$ ankommt. Nun ist aber $ZP$ das Complement der Polhöhe, $PS$ die Polardistanz der Sonne an dem Tage, für welchen die Dauer der Dämmerung bestimmt werden soll, die sich immer leicht aus den Ephemeriden berechnen lässt, und $ZS$ ist $90^0 + \alpha$; daher sind in dem sphärischen Dreiecke $ZSP$ alle drei Seiten bekannt, und der Winkel $ZPS$ desselben kann also nach den bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie berechnet werden. In dem spärischen Dreiecke $ZPS'$ sind aber auch alle drei Seiten bekannt, weil $ZP$ das Complement der Polhöhe, $PS'$ die Polardistanz der Sonne an dem Tage, für welchen die Dauer der Dämmerung bestimmt werden soll, und $ZS' = 90^0$ ist, so dass man also nach denselben Formeln wie vorher in diesem Dreiecke den Winkel $ZPS'$ berechnen kann. Zieht man endlich den Winkel $ZPS'$ von dem Winkel $ZPS$ ab, so erhält man den gesuchten Winkel $SPS'$, von welchem allein die Dauer der Dämmerung abhängt. Bezeichnen wir aber den in Graden ausgedrückten Winkel $SPS'$ durch $\vartheta$, die gesuchte in Stunden ausgedrückte Dauer der Dämmerung durch $\mathfrak{T}$, so ist bekanntlich

$$360 : \vartheta = 24 : \mathfrak{T},$$

also

$$48) \quad \mathfrak{T} = {}^1/_{15}\,\vartheta,$$

Um das Vorhergehende auf Formeln zu bringen, die uns bei der Auflösung der Aufgabe von der kürzesten Dämmerung, welche den Gegenstand der Betrachtungen des folgenden Paragraphen bilden wird, von Nutzen sein werden, wollen wir die gehörig als po-

sitiv oder negativ betrachtete Declination der Sonne an dem Tage, für welchen die Dauer der Dämmerung bestimmt werden soll, durch $\delta$ bezeichnen, und der Winkel $ZPS'$ des sphärischen Dreiecks $ZPS'$ mag durch $\varphi$ bezeichnet werden. Dann ist in dem sphärischen Dreiecke $ZPS'$ nach den Principien der sphärischen Trigonometrie

$$\cos ZPS' = \frac{\cos ZS' - \cos ZP.\cos PS'}{\sin ZP.\sin PS'},$$

d. i., weil

$$\angle ZPS' = \varphi,\ ZS' = 90^0,\ ZP = 90^0 - \varpi,\ PS' = 90^0 - \delta$$

ist:

$$49)\ \cos\varphi = -\tang\varpi\tang\delta;$$

und in dem sphärischen Dreiecke $ZPS$ ist

$$\cos ZPS = \frac{\cos ZS - \cos ZP.\cos PS}{\sin ZP.\sin PS},$$

d. i. weil

$$\angle ZPS = \varphi + \vartheta,\ ZS = 90^0 + \alpha,\ ZP = 90^0 - \varpi,\ PS = 90^0 - \delta$$

ist:

$$50)\ \cos(\varphi + \vartheta) = -\frac{\sin\alpha + \sin\varpi\sin\delta}{\cos\varpi\cos\delta}.$$

Um diese letztere Formel zur logarithmischen Rechnung bequem einzurichten, hat man auf bekannte Weise:

$$1 - \cos(\varphi + \vartheta) = \frac{\cos(\varpi - \delta) + \sin\alpha}{\cos\varpi\cos\delta},$$

$$1 + \cos(\varphi + \vartheta) = \frac{\cos(\varpi + \delta) - \sin\alpha}{\cos\varpi\cos\delta};$$

also

$$2\sin{}^1/_2(\varphi + \vartheta)^2 = \frac{\sin(90^0 - \varpi + \delta) + \sin\alpha}{\cos\varpi\cos\delta},$$

$$2\cos{}^1/_2(\varphi + \vartheta)^2 = \frac{\sin(90^0 - \varpi - \delta) - \sin\alpha}{\cos\varpi\cos\delta};$$

folglich nach bekannten goniometrischen Formeln:

$$\sin{}^1/_2(\varphi + \vartheta)^2 = \frac{\sin\{45^0 + {}^1/_2(\alpha - \varpi + \delta)\}\cos\{45^0 - {}^1/_2(\alpha + \varpi - \delta)\}}{\cos\varpi\cos\delta},$$

$$\cos{}^1/_2(\varphi + \vartheta)^2 = \frac{\sin\{45^0 - {}^1/_2(\alpha + \varpi + \delta)\}\cos\{45^0 + {}^1/_2(\alpha - \varpi - \delta)\}}{\cos\varpi\cos\delta};$$

und hieraus:

$$51)\begin{cases} \sin \frac{1}{2}(\varphi+\vartheta)=\sqrt{\dfrac{\sin\{45^0+\frac{1}{2}(\alpha-\varpi+\delta)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\alpha+\varpi-\delta)\}}{\cos\varpi\cos\delta}}, \\ \cos \frac{1}{2}(\varphi+\vartheta)=\sqrt{\dfrac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\alpha+\varpi+\delta)\}\cos\{45^0+\frac{1}{2}(\alpha-\varpi-\delta)\}}{\cos\varpi\cos\delta}}. \end{cases}$$

§. 9.

Die Aufgabe von der kürzesten Dämmerung verlangt nun, für einen bestimmten Ort, d. h. für einen Ort von gegebener Polhöhe, denjenigen Tag oder diejenige Declination der Sonne zu bestimmen, für welche die Dauer der Dämmerung am Kürzesten, d. h. der im Vorhergehenden durch $\vartheta$ bezeichnete Winkel ein Minimum wird; und um also diese Aufgabe aufzulösen, werden wir in den beiden aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Gleichungen

$$\cos\varphi = -\tang\varpi\tang\delta$$

und

$$\cos(\varphi+\vartheta) = -\frac{\sin\alpha+\sin\varpi\sin\delta}{\cos\varpi\cos\delta}$$

die Grössen $\alpha$, $\varpi$ als constant, die Grösse $\delta$ als unabhängige Variabele, die Grössen $\varphi$, $\vartheta$ als abhängige veränderliche Grössen zu betrachten, den Differentialquotienten von $\vartheta$ in Bezug auf $\delta$ als unabhängige veränderliche Grösse zu entwickeln, denselben der Null gleich zu setzen, und aus der dadurch sich ergebenden Gleichung die gesuchte Declination $\delta$ zu bestimmen haben. Aus der ersten der beiden obigen Gleichungen ergiebt sich aber auf der Stelle durch Differentiation nach $\delta$

$$\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}=\frac{\tang\varpi}{\cos\delta^2}$$

oder

$$52)\ \frac{\partial\varphi}{\partial\delta}=\frac{\tang\varpi}{\cos\delta^2\sin\varphi},$$

und aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen erhält man durch Differentiation nach $\delta$

$$\sin(\varphi+\vartheta)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}+\frac{\partial\vartheta}{\partial\delta}\right)=\frac{\sin\varpi+\sin\alpha\sin\delta}{\cos\varpi\cos\delta^2}$$

oder

$$53)\ \frac{\partial\varphi}{\partial\delta}+\frac{\partial\vartheta}{\partial\delta}=\frac{\sin\varpi+\sin\alpha\sin\delta}{\cos\varpi\cos\delta^2\sin(\varphi+\vartheta)}.$$

Weil nun die allgemeine Bedingung des Maximums und Minimums des Winkels $\vartheta$ durch die Gleichung

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\delta}=0$$

ausgedrückt wird, so erhalten wir für den Fall des Maximums oder Minimums aus dem Vorhergehenden unmittelbar die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}=\frac{tang\,\overline{\omega}}{cos\,\delta^2\,sin\,\varphi},\quad\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}=\frac{sin\,\overline{\omega}+sin\,\alpha\,sin\,\delta}{cos\,\overline{\omega}\,cos\,\delta^2\,sin\,(\varphi+\vartheta)};$$

aus denen sich ferner die Gleichung

$$\frac{tang\,\overline{\omega}}{sin\,\varphi}=\frac{sin\,\overline{\omega}+sin\,\alpha\,sin\,\delta}{cos\,\overline{\omega}\,sin\,(\varphi+\vartheta)}$$

oder die Gleichung

$$\frac{sin\,(\varphi+\vartheta)}{sin\,\varphi}=\frac{sin\,\overline{\omega}+sin\,\alpha\,sin\,\delta}{sin\,\overline{\omega}}$$

ergiebt, so dass wir also jetzt zur Bestimmung der drei Grössen $\varphi$, $\vartheta$, $\delta$ für den Fall des Maximums oder Minimums die drei folgenden Gleichungen haben:

$$54)\quad\begin{cases}cos\,\varphi=-tang\,\overline{\omega}\,tang\,\delta,\\ cos\,(\varphi+\vartheta)=-\dfrac{sin\,\alpha+sin\,\overline{\omega}\,sin\,\delta}{cos\,\overline{\omega}\,cos\,\delta},\\ \dfrac{sin\,(\varphi+\vartheta)}{sin\,\varphi}=\dfrac{sin\,\overline{\omega}+sin\,\alpha\,sin\,\delta}{sin\,\overline{\omega}}.\end{cases}$$

Aus der ersten dieser drei Gleichungen erhält man

$$sin\,\varphi^2=\frac{cos\,\overline{\omega}^2\,cos\,\delta^2-sin\,\overline{\omega}^2\,sin\,\delta^2}{cos\,\overline{\omega}^2\,cos\,\delta^2},$$

d. i.

$$sin\,\varphi^2=\frac{cos\,\overline{\omega}^2\,(1-sin\,\delta^2)-sin\,\delta^2\,(1-cos\,\overline{\omega}^2)}{cos\,\overline{\omega}^2\,cos\,\delta^2},$$

also

$$55)\quad sin\,\varphi^2=\frac{cos\,\overline{\omega}^2-sin\,\delta^2}{cos\,\overline{\omega}^2\,cos\,\delta^2}$$

oder auch

$$56)\quad sin\,\varphi^2=\frac{cos\,\delta^2-sin\,\overline{\omega}^2}{cos\,\overline{\omega}^2\,cos\,\delta^2}.$$

Aus der zweiten der drei obigen Gleichungen ergiebt sich

$$\sin(\varphi+\vartheta)^2 = \frac{\cos\overline{\omega}^2\cos\delta^2 - \sin\overline{\omega}^2\sin\delta^2 - \sin\alpha^2 - 2\sin\alpha\sin\overline{\omega}\sin\delta}{\cos\overline{\omega}^2\cos\delta^2},$$

d. i. wie vorher

$$57)\quad \sin(\varphi+\vartheta)^2 = \frac{\cos\overline{\omega}^2 - \sin\alpha^2 - \sin\delta^2 - 2\sin\alpha\sin\overline{\omega}\sin\delta}{\cos\overline{\omega}^2\cos\delta^2},$$

oder

$$58)\quad \sin(\varphi+\vartheta)^2 = \frac{\cos\delta^2 - \sin\alpha^2 - \sin\overline{\omega}^2 - 2\sin\alpha\sin\overline{\omega}\sin\delta}{\cos\overline{\omega}^2\cos\delta^2}.$$

Nach 55) und 57) ist also

$$\left\{\frac{\sin(\varphi+\vartheta)}{\sin\varphi}\right\}^2 = \frac{\cos\overline{\omega}^2 - \sin\alpha^2 - \sin\delta^2 - 2\sin\alpha\sin\overline{\omega}\sin\delta}{\cos\overline{\omega}^2 - \sin\delta^2},$$

welches in Verbindung mit der dritten der Gleichungen 54) auf der Stelle zu der Gleichung

$$\frac{(\sin\overline{\omega} + \sin\alpha\sin\delta)^2}{\sin\overline{\omega}^2}$$
$$= \frac{\cos\overline{\omega}^2 - \sin\alpha^2 - \sin\delta^2 - 2\sin\alpha\sin\overline{\omega}\sin\delta}{\cos\overline{\omega}^2 - \sin\delta^2}$$

führt, aus welcher nun die gesuchte Declination $\delta$ der Sonne bestimmt werden muss.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich zuvörderst leicht

$$\frac{\sin\alpha\sin\delta^2 + 2\sin\overline{\omega}\sin\delta}{\sin\overline{\omega}^2} = -\frac{\sin\alpha + 2\sin\overline{\omega}\sin\delta}{\cos\overline{\omega}^2 - \sin\delta^2},$$

und hieraus ferner

$$\sin\alpha\cos\overline{\omega}^2\sin\delta^2 - \sin\alpha\sin\delta^4 + 2\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}^2\sin\delta - 2\sin\overline{\omega}\sin\delta^3$$
$$= -\sin\alpha\sin\overline{\omega}^2 - 2\sin\overline{\omega}^3\sin\delta,$$

also

$$\begin{aligned}2\sin\overline{\omega}\sin\delta\cos\delta^2 &= \sin\alpha(\sin\delta^4 - \cos\overline{\omega}^2\sin\delta^2 - \sin\overline{\omega}^2)\\ &= \sin\alpha(\sin\delta^4 - \sin\delta^2 + \sin\overline{\omega}^2\sin\delta^2 - \sin\overline{\omega}^2)\\ &= -\sin\alpha\cos\delta^2(\sin\delta^2 + \sin\overline{\omega}^2),\end{aligned}$$

folglich

$$\cos\delta^2(\sin\alpha\sin\delta^2 + 2\sin\overline{\omega}\sin\delta + \sin\alpha\sin\overline{\omega}^2) = 0.$$

Diese Gleichung wird nun erfüllt durch

$$\cos\delta = 0$$

und

$$\sin\alpha \sin\delta^2 + 2\sin\varpi \sin\delta + \sin\alpha \sin\varpi^2 = 0.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen ist aber in dem vorliegenden Falle, wo $\delta$ die Declination der Sonne bezeichnet, welche bekanntlich nie $\pm 90^0$ erreicht, offenbar unzulässig, und es bleibt uns daher zur Bestimmung von $\delta$ nur die zweite Gleichnung, nämlich die Gleichung

$$\sin\alpha \sin\delta^2 + 2\sin\varpi \sin\delta + \sin\alpha \sin\varpi^2 = 0$$

oder

$$\sin\delta^2 + 2\frac{\sin\varpi}{\sin\alpha}\sin\delta + \sin\varpi^2 = 0.$$

Löst man diese Gleichung in Bezug auf $\sin\delta$ als unbekannte Grösse wie eine quadratische Gleichung auf, so erhält man

$$\left(\sin\delta + \frac{\sin\varpi}{\sin\alpha}\right)^2 = \frac{\sin\varpi^2(1 - \sin\alpha^2)}{\sin\alpha^2} = \frac{\cos\alpha^2 \sin\varpi^2}{\sin\alpha^2},$$

also

$$\sin\delta + \frac{\sin\varpi}{\sin\alpha} = \pm\frac{\cos\alpha \sin\varpi}{\sin\alpha},$$

und folglich

$$59)\quad \sin\delta = -\frac{\sin\varpi(1 \mp \cos\alpha)}{\sin\alpha}$$

oder

$$60)\quad \begin{cases} \sin\delta = -\dfrac{2\sin\varpi \sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\sin\alpha}, \\ \sin\delta = -\dfrac{2\sin\varpi \cos\frac{1}{2}\alpha^2}{\sin\alpha}; \end{cases}$$

oder

$$61)\quad \begin{cases} \sin\delta = -\sin\varpi \tan\frac{1}{2}\alpha, \\ \sin\delta = -\sin\varpi \cot\frac{1}{2}\alpha. \end{cases}$$

Wir erhalten hierdurch also für $\sin\delta$, und folglich auch für $\delta$ zwei Werthe, und müssen daher jetzt besonders untersuchen, ob für einen derselben, oder vielleicht auch für beide, der Winkel $\vartheta$ wirklich ein Minimum wird, oder ob, was allerdings auch der Fall sein könnte, keinem dieser beiden durch die obigen Formeln gelieferten Werthe von $\delta$ ein Minimum des Winkels $\vartheta$ entspricht.

§. 10.

Zuerst wollen wir jetzt zu ermitteln suchen, ob der Winkel $\vartheta$ für

$$\sin\delta = -\sin\varpi \cot {}^1/_2\alpha$$

ein Minimum wird.

Weil nach dem Obigen

$$\cos\varphi = -\tang\varpi \tang\delta$$

und in Folge der Gleichung

$$\sin\delta = -\sin\varpi \cot {}^1/_2\alpha$$

die Declination $\delta$, also auch $\tang\delta$ negativ ist, so ist offenbar $\cos\varphi$ positiv und nimmt ab oder zu, wenn $\delta$ respective zunimmt oder abnimmt. Also nimmt $\varphi$ zu oder ab, wenn $\delta$ respective zunimmt oder abnimmt, d. h. $\delta$ und $\varphi$ nehmen gleichzeitig zu und ab.

Ferner ist nach dem Obigen

$$\cos(\varphi+\vartheta) = -\frac{\sin\alpha + \sin\varpi \sin\delta}{\cos\varpi \cos\delta}.$$

Denken wir uns nun, dass $\delta$ sich um die beliebige positive oder negative Grösse $i$ verändere, und setzen der Kürze wegen

$$M = -\frac{\sin\alpha + \sin\varpi \sin\delta}{\cos\varpi \cos\delta},$$

$$N = -\frac{\sin\alpha + \sin\varpi \sin(\delta+i)}{\cos\varpi \cos(\delta+i)};$$

so ist

$$M - N = \frac{\sin\alpha + \sin\varpi \sin(\delta+i)}{\cos\varpi \cos(\delta+i)} - \frac{\sin\alpha + \sin\varpi \sin\delta}{\cos\varpi \cos\delta}$$

$$= \frac{\sin\alpha \{\cos\delta - \cos(\delta+i)\} + \sin\varpi \sin i}{\cos\varpi \cos\delta \cos(\delta+i)}$$

$$= \frac{2\sin\alpha \sin(\delta + {}^1/_2 i) \sin {}^1/_2 i + \sin\varpi \sin i}{\cos\varpi \cos\delta \cos(\delta+i)}$$

$$= \frac{2\sin {}^1/_2 i}{\cos\varpi \cos\delta \cos(\delta+i)} \{\sin\alpha \sin(\delta + {}^1/_2 i) + \sin\varpi \cos {}^1/_2 i\}.$$

Der Factor

$$\frac{2\sin {}^1/_2 i}{\cos\varpi \cos\delta \cos(\delta+i)}$$

ist, wenn wir uns von jetzt an unter $i$ immer eine der Null sehr

nahe kommende positive oder negative Grösse denken, mit $i$ gleichzeitig positiv und negativ. Die Gränze, welcher der andere Factor

$$\sin\alpha \sin(\delta + {}^1/_2 i) + \sin\overline{\omega} \cos{}^1/_2 i$$

des obigen Products sich nähert, wenn $i$ sich der Null nähert, ist

$$\sin\alpha \sin\delta + \sin\overline{\omega},$$

also, wenn wir, wie es unter der gemachten Voraussetzung erforderlich ist,

$$\sin\delta = -\sin\overline{\omega} \cot{}^1/_2\alpha$$

setzen,

$$\sin\overline{\omega}\,(1 - \sin\alpha \cot{}^1/_2\alpha),$$

oder

$$\sin\overline{\omega}(1 - 2\cos{}^1/_2\alpha^2) = -\sin\overline{\omega} \cos\alpha,$$

woraus sich ergiebt, dass die in Rede stehende Gränze, und folglich für der Null unendlich nahe kommende $i$ auch der Factor

$$\sin\alpha \sin(\delta + {}^1/_2 i) + \sin\overline{\omega} \cos{}^1/_2 i$$

selbst eine negative Grösse ist. Hält man dies mit dem Obigen zusammen, so ergiebt sich, dass für der Null unendlich nahe kommende $i$ die Differenz

$$M - N$$

negativ oder positiv ist, jenachdem $i$ positiv oder negativ ist. Also ist für der Null unendlich nahe kommende $i$ die Differenz

$$N - M$$

positiv oder negativ, d. h.

$$N > M \text{ oder } N < M,$$

jenachdem $i$ positiv oder negativ ist, d. h. jenachdem $\delta$ wächst oder abnimmt. Daher nimmt $\cos(\varphi + \vartheta)$ zu oder ab, wenn $\delta$ respective zunimmt oder abnimmt, und $\varphi + \vartheta$ nimmt folglich ab oder zu, wenn $\delta$ respective zunimmt oder abnimmt.

Wenn also $\delta$ zunimmt oder abnimmt, so nimmt $\varphi$ respective zu oder ab, und $\varphi + \vartheta$ nimmt respective ab oder zu, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass, wenn $\delta$ zunimmt oder abnimmt, jederzeit $\vartheta$ respective abnimmt oder zunimmt, und folglich für

$$\sin\delta = -\sin\overline{\omega} \cot{}^1/_2\alpha$$

offenbar weder ein Maximum, noch ein Minimum Statt finden kann.

Wir werden daher nun ferner untersuchen müssen, ob für

$$\sin \delta = - \sin \bar{\omega} \, tang \, {}^1/_2 \alpha$$

der Winkel $\vartheta$ wirklich ein Minimum wird.

§. 11.

Bevor wir jedoch zu dieser Untersuchung übergehen können, müssen wir die folgenden allgemeinen Betrachtungen vorausschicken.

Wenn $x$ einen bestimmten Werth einer unabhängigen veränderlichen Grösse, und $f(x)$ den demselben entsprechenden Werth einer von dieser veränderlichen Grösse abhängenden Function bezeichnet, so kann man, um zu beurtheilen, ob $f(x)$ ein Maximum oder Minimum dieser Function, oder keines von beiden ist, auf folgende Art verfahren.

Man lasse $x$ sich um die der Null unendlich nahe kommende Grösse $\Delta x$ verändern. Ist dann

I. $\Delta f(x)$ für positive und negative, immer als der Null unendlich nahe kommend gedachte, $\Delta x$ negativ, so ist $f(x)$ ein Maximum. Ist dagegen

II. $\Delta f(x)$ für positive und negative, immer als der Null unendlich nahe kommend gedachte, $\Delta x$ positiv, so ist $f(x)$ ein Minimum.

Weil aber

$$\Delta f(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \Delta x$$

ist, so lassen sich diese Bedingungen des Maximums und Minimums, wie sogleich in die Augen fallen wird, auch auf den folgenden Ausdruck bringen:

I. Wenn für der Null unendlich nahe kommende $\Delta x$ der Differenzenquotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ negativ oder positiv ist, jenachdem $\Delta x$ positiv oder negativ ist, so ist $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn für der Null unendlich nahe kommende $\Delta x$ der Differenzenquotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ positiv oder negativ ist, jenachdem $\Delta x$ positiv oder negativ ist, so ist $f(x)$ ein Minimum.

Dies kann man aber auch auf folgende Art ausdrücken:

I. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder

negative $\Delta x$ die Grössen $\Delta x$ und $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ stets ungleiche Vorzeichen haben, so ist $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative $\Delta x$ die Grössen $\Delta x$ und $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ stets gleiche Vorzeichen haben, so ist $f(x)$ ein Minimum.

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten nähern aber die Grössen

$$f'(x + \Delta x) \text{ und } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

sich desto mehr, je näher $\Delta x$ der Null kommt, und können einander beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur $\Delta x$ der Null nahe genug kommen lässt, woraus sogleich erhellet, dass für der Null unendlich nahe kommende $\Delta x$ die Grössen $f'(x + \Delta x)$ und $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ gleiche Vorzeichen haben werden. Daher können die obigen Bedingungen des Maximums und Minimums offenbar auch auf den folgenden Ausdruck gebracht werden.

I. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative $\Delta x$ die Grössen $\Delta x$ und $f'(x + \Delta x)$ stets ungleiche Vorzeichen haben, so ist $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative $\Delta x$ die Grössen $\Delta x$ und $f'(x + \Delta x)$ stets gleiche Vorzeichen haben, so ist $f(x)$ ein Minimum.

Lässt man endlich $i$ eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnen, so kann man diese Bedingungen auch auf folgende Art ausdrücken:

I. Wenn die Grösse $f'(x - i)$ positiv, die Grösse $f'(x + i)$ negativ ist, so ist $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn die Grösse $f'(x - i)$ negativ, die Grösse $f'(x + i)$ positiv ist, so ist $f(x)$ ein Minimum.

Wenn die Grössen $f'(x - i)$ und $f'(x + i)$ gleiche Vorzeichen haben, so ist, wie leicht erhellen wird, $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum.

## §. 12.

Mittelst der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Bedingungen des Maximums und Minimums wollen wir nun untersuchen, ob der im Obigen durch $\vartheta$ bezeichnete Winkel für

$$\sin\delta = -\sin\varpi \tang {}^1/_2\alpha$$

ein Minimum wird.

Nach 52) ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\delta} = \frac{\tang\varpi}{\cos\delta^2 \sin\varphi},$$

und nach 49) ist

$$\cos\varphi = -\tang\varpi \tang\delta,$$

also, wie wir auch schon in 55) gesehen haben,

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\cos\varpi^2 - \sin\delta^2}}{\cos\varpi\cos\delta}.$$

Daher ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\delta} = \frac{\sin\varpi}{\cos\delta\sqrt{\cos\varpi^2 - \sin\delta^2}}.$$

Weil nun $\delta$ wegen der Gleichung

$$\sin\delta = -\sin\varpi \tang {}^1/_2\alpha$$

offenbar negativ ist, so erhellet leicht, dass der Differential-quotient

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}$$

jederzeit abnimmt oder zunimmt, wenn $\delta$ respective zunimmt oder abnimmt.

Ferner ist nach 53) und 57)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\delta} + \frac{\partial\vartheta}{\partial\delta} = \frac{\sin\varpi + \sin\alpha\sin\delta}{\cos\varpi\cos\delta^2\sin(\varphi+\vartheta)}$$

$$= \frac{\sin\varpi + \sin\alpha\sin\delta}{\cos\delta\sqrt{\cos\varpi^2 - \sin\alpha^2 - \sin\delta^2 - 2\sin\alpha\sin\varpi\sin\delta}}.$$

Sei jetzt $i$ wieder eine der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Grösse und

$$M' = \cos\varpi^2 - \sin\alpha^2 - \sin\delta^2 - 2\sin\alpha\sin\varpi\sin\delta,$$

$$N' = \cos\varpi^2 - \sin\alpha^2 - \sin(\delta+i)^2 - 2\sin\alpha\sin\varpi\sin(\delta+i);$$

also

$$M' - N'$$

$$= \sin(\delta+i)^2 - \sin\delta^2 + 2\sin\alpha\sin\varpi\{\sin(\delta+i) - \sin\delta\}$$

$$= \{\sin(\delta+i) - \sin\delta\}\{\sin(\delta+i) + \sin\delta + 2\sin\alpha\sin\varpi\}$$

$$= 4\sin{}^1/_2 i\cos(\delta+{}^1/_2 i)\{\cos{}^1/_2 i\sin(\delta+{}^1/_2 i) + \sin\alpha\sin\varpi\}.$$

Der Factor

$$4 \sin \tfrac{1}{2} i \cos(\delta + \tfrac{1}{2} i)$$

ist positiv oder negativ, jenachdem $i$ positiv oder negativ ist. Die Gränze, welcher

$$\cos \tfrac{1}{2} i \sin(\delta + \tfrac{1}{2} i) + \sin\alpha \sin\overline{\omega}$$

sich nähert, wenn $i$ sich der Null nähert, ist

$$\sin\delta + \sin\alpha \sin\overline{\omega},$$

d. i., wenn man, wie es erforderlich ist,

$$\sin\delta = - \sin\overline{\omega} \tan \tfrac{1}{2}\alpha$$

setzt,

$$\sin\overline{\omega}(\sin\alpha - \tan \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Weil aber wenigstens nahe $\alpha = 18^0$, und folglich wenigstens nahe

$$\sin\alpha = 0{,}3090170, \tan \tfrac{1}{2}\alpha = 0{,}1583844$$

ist, so ist

$$\sin\alpha > \tan \tfrac{1}{2}\alpha,$$

also

$$\sin\overline{\omega}(\sin\alpha - \tan \tfrac{1}{2}\alpha)$$

eine positive Grösse. Daher ist für der Null unendlich nahe kommende $i$ offenbar auch

$$\cos \tfrac{1}{2} i \sin(\delta + \tfrac{1}{2} i) + \sin\alpha \sin\overline{\omega}$$

eine positive Grösse. Folglich ist für der Null unendlich nahe kommende $i$ die Grösse

$$4 \sin \tfrac{1}{2} i \cos(\delta + \tfrac{1}{2} i) \{\cos \tfrac{1}{2} i \sin(\delta + \tfrac{1}{2} i) + \sin\alpha \sin\overline{\omega}\},$$

d. i. die Differenz

$$M' - N',$$

positiv oder negativ, oder

$$N' < M' \text{ oder } N' > M',$$

jenachdem $i$ positiv oder negativ ist. Hieraus sieht man, dass die Grösse

$$\sqrt{\cos\overline{\omega}^2 - \sin\alpha^2 - \sin\delta^2 - 2 \sin\alpha \sin\overline{\omega} \sin\delta}$$

abnimmt oder zunimmt, wenn $\delta$ respective zunimmt oder abnimmt.

Auf ähnliche Art setze man

$$M'' = \frac{\sin\overline{\omega} + \sin\alpha \sin\delta}{\cos\delta},$$

$$N'' = \frac{\sin\overline{\omega} + \sin\alpha \sin(\delta + i)}{\cos(\delta + i)};$$

so ist

$$M'' - N'' = -\frac{\sin\varpi\{\cos\delta - \cos(\delta+i)\} + \sin\alpha\sin i}{\cos\delta\cos(\delta+i)}$$

$$= -\frac{2\sin\frac{1}{2}i}{\cos\delta\cos(\delta+i)}\{\sin\varpi\sin(\delta+\frac{1}{2}i)+\sin\alpha\cos\frac{1}{2}i\}.$$

Der Factor

$$-\frac{2\sin\frac{1}{2}i}{\cos\delta\cos(\delta+i)}$$

ist negativ oder positiv, jenachdem $i$ positiv oder negativ ist. Die Gränze, welcher der Factor

$$\sin\varpi\sin(\delta+\frac{1}{2}i) + \sin\alpha\cos\frac{1}{2}i$$

sich nähert, wenn $i$ sich der Null nähert, ist

$$\sin\varpi\sin\delta + \sin\alpha,$$

d. i.

$$\sin\alpha - \sin\varpi^2\tan\frac{1}{2}\alpha,$$

und folglich, weil

$$\sin\alpha > \tan\frac{1}{2}\alpha$$

ist, offenbar positiv. Also ist für der Null unendlich nahe kommende $i$ die Grösse

$$\sin\varpi\sin(\delta+\frac{1}{2}i)+\sin\alpha\cos\frac{1}{2}i$$

positiv, und die Grösse

$$-\frac{2\sin\frac{1}{2}i}{\cos\delta\cos(\delta+i)}\{\sin\varpi\sin(\delta+\frac{1}{2}i)+\sin\alpha\cos\frac{1}{2}i),$$

d. i. die Differenz

$$M''-N'',$$

ist negativ oder positiv, oder es ist

$$N'' > M'' \text{ oder } N'' < M'',$$

jenachdem $i$ positiv oder negativ ist. Hieraus sieht man, dass die Grösse

$$\frac{\sin\varpi + \sin\alpha\sin\delta}{\cos\delta}$$

zunimmt oder abnimmt, wenn $\delta$ respective zunimmt oder abnimmt.

Für

$$\sin\delta = -\sin\varpi\tan\frac{1}{2}\alpha$$

ist

$$\sin\varpi + \sin\alpha\sin\delta = \sin\varpi(1-\sin\alpha\tan\frac{1}{2}\alpha)$$
$$= \sin\varpi(1-2\sin\frac{1}{2}\alpha^2) = \sin\varpi\cos\alpha,$$

und die Grösse

$$\sin\varpi + \sin\alpha\sin\delta,$$

so wie auch die Grösse

$$\frac{\sin\varpi + \sin\alpha\sin\delta}{\cos\delta},$$

ist folglich positiv.

Nimmt man jetzt alles Bisherige zusammen, so ergiebt sich auf ganz unzweideutige Weise, dass die Grösse

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\delta} + \frac{\partial\vartheta}{\partial\delta}$$

zunimmt oder abnimmt, wenn die Grösse $\delta$ respective zunimmt oder abnimmt.

Setzen wir jetzt der Kürze wegen

$$\varphi = F(\delta),\quad \vartheta = f(\delta);$$

folglich

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\delta} = F'(\delta),\quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\delta} = f'(\delta)$$

und

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\delta} + \frac{\partial\vartheta}{\partial\delta} = F'(\delta) + f'(\delta);$$

so ist nach dem Vorhergehenden, wenn jetzt $i$ eine der Null unendlich nahe kommende positive Grösse bezeichnet:

$$F'(\delta + i) < F'(\delta),\quad F'(\delta - i) > F'(\delta)$$

und

$$F'(\delta+i) + f'(\delta+i) > F'(\delta) + f'(\delta),\quad F'(\delta-i) + f'(\delta-i) < F'(\delta) + f'(\delta)$$

oder, weil bekanntlich

$$f'(\delta) = 0$$

ist:

$$F'(\delta+i) + f'(\delta+i) > F'(\delta),\quad F'(\delta-i) + f'(\delta-i) < F'(\delta).$$

Folglich ist offenbar

$$\{F'(\delta+i) + f'(\delta+i)\} - F'(\delta+i) > 0,$$
$$\{F'(\delta-i) + f'(\delta-i)\} - F'(\delta-i) < 0;$$

d. i.

$$f'(\delta+i) > 0,\quad f'(\delta-i) < 0$$

oder $f'(\delta - i)$ ist negativ und $f'(\delta + i)$ ist positiv, woraus sich nach dem vorhergehenden Paragraphen unmittelbar ergiebt, dass $f(\delta)$ oder der Winkel $\vartheta$ für

$$62)\quad \sin\delta = -\sin\varpi\,\mathrm{tang}\,{}^1/_2\,\alpha$$

wirklich ein Minimum ist, und aus dieser Gleichung muss also die

Declination der Sonne bestimmt werden, welcher die kürzeste Dämmerung entspricht.

Dass diese Declination für alle Polhöhen stets negativ ist, ergiebt sich aus der vorhergehenden Gleichung unmittelbar. Auch erhellet auf der Stelle, dass es im Allgemeinen für jeden Ort zwei Tage giebt, an denen die Dauer der Dämmerung ein Minimum wird, weil die Sonne dieselbe positive oder negative Declination an zwei verschiedenen Tagen erreicht.

## §. 13.

Ueber die Formel

$$\sin\delta = -\sin\varpi \tang {}^1/_2\alpha$$

sind nun aber noch die folgenden Bemerkungen zu machen.

Zuerst kann man nämlich fragen, ob die Sonne die durch diese Formel bestimmte Declination wirklich erreicht, weil die grösste absolut genommene Abweichung der Sonne bekanntlich ungefähr $23^0.28'$ ist. Der grösste absolute Werth von $\delta$, welchen die obige Formel giebt, entspricht aber offenbar der Polhöhe $\varpi = 90^0$, und wird daher, weil wenigstens nahe $\alpha = 18^0$ ist, mittelst der Formel $\sin\delta = -\tang 9^0$ gefunden, woraus sich $\delta = -9^0.7'$ ergiebt, und also kein Zweifel ist, dass die Sonne die durch die Formel

$$\sin\delta = -\sin\varpi \tang {}^1/_2\alpha$$

bestimmte Declination immer wirklich erreicht.

Ferner ist klar, dass, wenn überhaupt von einem Minimum der Dauer der Dämmerung soll die Rede sein können, der Parallelkreis, welchen die Sonne an dem Tage, wo sie die durch die Formel

$$\sin\delta = -\sin\varpi \tang {}^1/_2\alpha$$

bestimmte Declination hat, den Horizont des Beobachtungsorts, dessen Polhöhe $\varpi$ ist, schneiden muss, eine Voraussetzung, welche auch der ganzen vorhergehenden Betrachtung stets zum Grunde gelegt und bei derselben immer festgehalten worden ist. Dies wird aber, wie leicht erhellet, der Fall, aber auch nur dann der Fall sein, wenn

$$90^0 - \delta < 180^0 - \varpi$$

ist, wobei man nur stets festzuhalten hat, dass $\delta$ negativ und folglich $90^0 - \delta$ grösser als $90^0$ ist. Aus der vorhergehenden Bedingung ergiebt sich

$$-\delta < 90^0 - \varpi,$$

folglich

$$\sin(-\delta) < \sin(90^0 - \varpi),$$

d. h.

$$-\sin\delta < \cos\varpi,$$

also, weil

$$\sin\delta = -\sin\varpi \tang {}^1/_2\alpha$$

ist:

$$\sin\varpi \tang {}^1/_2\alpha < \cos\varpi,$$

oder

$$\tang\varpi < \cot {}^1/_2\alpha,$$

oder

$$\tang\varpi < \tang(90^0 - {}^1/_2\alpha),$$

folglich

$$\varpi < 90^0 - {}^1/_2\alpha,$$

d. i. $\varpi < 81^0$. Hieraus sieht man also, dass die obige Bestimmung der Declination der Sonne, welcher die kürzeste Dämmerung entspricht, überhaupt nur für solche Orte gilt, deren Polhöhe kleiner als $81^0$ ist.

## §. 14.

Es bleibt uns nun bloss noch übrig, die Dauer der kürzesten Dämmerung selbst zu bestimmen, wozu wir am Einfachsten auf folgende Weise gelangen.

Die beiden Winkel $PSZ$ und $PS'Z$ der sphärischen Dreiecke $PSZ$ und $PS'Z$ in Taf. V. Fig. 4. wollen wir der Kürze wegen durch $S$ und $S'$ bezeichnen, so ist nach den Principien der sphärischen Trigonometrie

$$\cos S = \frac{\cos PZ - \cos ZS . \cos PS}{\sin ZS . \sin PS}$$

und

$$\cos S' = \frac{\cos PZ - \cos ZS' . \cos PS'}{\sin ZS' . \sin PS'},$$

d. i. wie leicht erhellen wird,

$$\cos S = \frac{\sin\varpi + \sin\alpha \sin\delta}{\cos\alpha \cos\delta}$$

und

$$\cos S' = \frac{\sin\varpi}{\cos\delta}.$$

Weil nun aber

$$\sin\delta = -\sin\overline{\omega}\,\tang\,{}^1/_2\,\alpha$$

ist, so ist

$$\cos S = \frac{\sin\overline{\omega}\,(1 - \sin\alpha\,\tang\,{}^1/_2\,\alpha)}{\cos\alpha\,\cos\delta},$$

d. i., weil

$$1 - \sin\alpha\,\tang\,{}^1/_2\,\alpha = 1 - 2\sin{}^1/_2\,\alpha^2 = \cos\alpha$$

ist,

$$\cos S = \frac{\sin\overline{\omega}}{\cos\delta},$$

und folglich

$$\cos S = \cos S', \text{ also } S = S'.$$

Macht man nun $ZQ = \alpha$, und legt durch $P$ und $Q$ den Bogen $PQ$ eines grössten Kreises, so ist in den sphärischen Dreiecken $PSQ$ und $PS'Z$ offenbar $PS = PS'$, $SQ = S'Z = 90^0$, $\angle PSQ = \angle PS'Z$, und es sind also in diesen beiden sphärischen Dreiecken zwei Seiten und die von denselben eingeschlossenen Winkel gleich; folglich sind diese beiden sphärischen Dreiecke einander congruent, und es ist also $PQ = PZ$, oder das sphärische Dreieck $PQZ$ ist gleichschenkelig. Ferner sind in den congruenten sphärischen Dreiecken $PSQ$ und $PS'Z$ auch die Winkel $SPQ$ und $S'PZ$ einander gleich, woraus, wenn man von diesen beiden gleichen Winkeln den Winkel $S'PQ$ abzieht (oder denselben zu den beiden in Rede stehenden gleichen Winkeln addirt), auf der Stelle $\angle SPS' = \angle ZPQ$, d. i., wenn wir wie gewöhnlich $\angle SPS' = \vartheta$ setzen, $\angle ZPQ = \vartheta$ folgt. Weil nun in dem gleichschenkeligen sphärischen Dreiecke $PQZ$

$$\cos ZPQ = \frac{\cos ZQ - \cos PQ\,.\cos PZ}{\sin PQ\,.\sin PZ},$$

d. i., wie leicht erhellet,

$$\cos\vartheta = \frac{\cos\alpha - \sin\overline{\omega}^2}{\cos\overline{\omega}^2}$$

ist, so ist

$$1 - \cos\vartheta = \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\overline{\omega}^2},$$

d. i. nach einer bekannten goniometrischen Formel

$$\sin{}^1/_2\,\vartheta^2 = \frac{\sin{}^1/_2\,\alpha^2}{\cos\overline{\omega}^2},$$

also

$$63)\quad \sin{}^1/_2\,\vartheta = \frac{\sin{}^1/_2\,\alpha}{\cos\overline{\omega}}.$$

Hat man mittelst dieser Formel den Winkel $\vartheta$ berechnet und in Graden ausgedrückt, so ist $\frac{1}{15}\,\vartheta$ die in Stunden ausgedrückte Dauer der kürzesten Dämmerung.

§. 15.

Um ein Beispiel für die Anwendung der vorhergehenden Formeln zu geben, sei

$$\varpi = 54^0.4'.35''$$

und $\alpha = 18^0$; so ist nach den Callet'schen Tafeln:

$$\log \sin \varpi = \left\{\begin{array}{r} 9{,}9083701 - 10 \\ +77 \end{array}\right.$$

$$\log tang\, {}^1\!/_2\, \alpha = 9{,}1997125 - 10$$

$$\log \sin \delta = 9{,}1080903 - 10n$$

also

$$\delta = -\, 7^0.22'.2''$$

Nach dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1836 hat die Sonne diese Declination zwischen dem 1. und 2. März und zwischen dem 11. und 12. October.

Um die Dauer der kürzesten Dämmerung zu bestimmen, hat man

$$\log \sin {}^1\!/_2\, \alpha = 9{,}1943324 - 10$$

$$\log \cos \varpi = \left\{\begin{array}{r} 9{,}7684351 - 10 \\ -145 \\ \hline 9{,}7684206 - 10 \end{array}\right.$$

$$\log \sin {}^1\!/_2\, \vartheta = 9{,}4259118 - 10$$

also

$${}^1\!/_2\, \vartheta = 15^0.27'.50''$$

$$\vartheta = 30.55.40$$

Dividirt man in diesen Winkel mit 15 hinein, so ergiebt sich für die Dauer der kürzesten Dämmerung

2 Stunden 3 Minuten 43 Secunden.

## V.

# Berechnung

der

## Lambert'schen Dämmerungsbeobachtungen.

Von dem Herausgeber.

---

§. 1.

Wir besitzen nur sehr wenige genauere Dämmerungsbeobachtungen.

Eine Beobachtung von Lacaille führt Biot im Traité élémentaire d'Astronomie physique. Troisième Édition. T. I. Paris. 1841. p. 311. an. Er sagt darüber Folgendes:

„Peu d'astronomes ont pris le soin d'en observer et d'en noter ainsi toutes les phases; sans doute parce qu'ils n'en sentaient pas l'importance pour leurs études habituelles. Mais, parmi ceux qui l'ont vue et décrite, il en est un dont le témoignage suffit pour constater la possibilité de l'observer avec précision: c'est Lacaille. Voici comment il s'exprime à ce sujet, dans le récit de son voyage au cap de Bonne-Espérance *):

„„Les 16 et 17 avril 1751, étant en mer et en calme, par
„„un ciel extrêmement clair et serein, où je distinguais Vénus à
„„l'horizon de la mer, comme une étoile de la seconde grandeur,

---

*) Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1751, page 454.

„„je vis la lumière crépusculaire terminée en arc de cercle, aussi
„„régulièrement que possible. Ayant réglé ma montre à l'heure
„„vraie, au coucher du Soleil, je vis cet arc confondu avec l'ho-
„„rizon; et je calculai, par l'heure où je fis cette observation, que
„„le Soleil était (alors) abaissé, le 16 avril, de 16°.38′; le 17
„„de 17°.13′." "

Mais, si ce témoignage formel de Lacaille lève toute incertitude sur la netteté du phénomène, et sur la possibilité de l'observer distinctement, dans des circonstances atmosphériques favorables, il en laisse une très grande sur son interprétation physique; car il reste à savoir si la courbe lumineuse dont on constate l'existence, le mouvement angulaire et la disparition, appartient à la limite géométrique du premier espace crépusculaire ou du second, ou du troisiéme, ou à quelque partie intermédiaire de l'un d'eux.

Parmi les astronomes et les géomètres qui se sont occupés de ce phénomène, Lambert est, je crois, le seul qui ait remarqué l'alternative précédente, et indiqué les moyens de la décider *). Pour en montrer l'étendue, comme il l'a fait lui même, mais avec des données probablement plus exactes, j'ai calculé, par ses formules, la hauteur des dernières couches d'air réfléchissantes qui résulterait des observations de Lacaille, en attribuant la courbe lumineuse observée à la limite du premier espace crépusculaire, du second, du troisième, et employant le pouvoir réfringent aujourd'hui connu de l'air atmosphérique, ainsi que la réfraction horizontale donnée par nos tables, pour une pression de $0^{m},76$ et une température de 20° centésimaux. On trouvera les formules nécessaires pour ce calcul dans une Note placée à la fin du présent chapitre. Voici quels ont été les résultats:

| | Hauteur des dernières couches d'air refléchissantes en mètres |
|---|---|
| Par la limite du premier espace crépusculaire .... | 58916 mètres |
| du second ............... | 10797 |
| du troisième ............. | 6392. |

Cette dernière hauteur étant moindre que celle à laquelle est parvenu M. Gay-Lussac, ne saurait être admise. La seconde parait encore bien faible, si l'on considère qu' à l'élévation de 7000 mètres, d'après les observations de M. Gay-Lussac, la densité de

*) Photométrie de Lambert, partie V. chap. III, page 440.

l'air n'était réduite qu' à la moitié environ de sa valeur à la surface du sol. La véritable hauteur finale est donc vraisemblablement intermédiaire entre celle-ci et la première; de sorte que la courbe crépusculaire, lorsqu'on l'observe à l'horizon, appartiendrait à quelque partie du second espace crépusculaire. C'est aussi l'opinion de Lambert, et il l'appuie sur des considérations photométriques qui paraissent évidentes."

Ich habe diese Stelle hier so ausführlich mitgetheilt, um zugleich Biot's, eines Physikers, auf dessen Urtheil jederzeit das grösste Gewicht zu legen ist, Ansicht über das Dämmerungsphänomen deutlich darzulegen.

## §. 2.

Die vollständigste Beobachtung des Dämmerungsphänomens, welche wir bis jetzt besitzen, rührt aber von Lambert her, und ist mitgetheilt in seiner Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae. Augustae Vindelicorum. MDCCLX. 8. p. 447 — p. 449. Er sagt über diese Beobachtung Folgendes.

„§. 1008. Sit*) *AFB* circulus verticalis, in quo est sol, *AB* horizon, *F* vertex, ut *AFBD* referat hemisphaerium coeli superius, quale patet spectatori in centro *C* constituto, atque in hoc iam describam crepusculi variationes, quales eas vespere d. 19. Novembris 1759 Augustae Vindelicorum e specula insignis Mechanici G. F. Brander observavi.

| Hora | min. | |
|---|---|---|
| IV. | 26. | occidit sol in *B*. |
| — | 29. | adparens eius occasus, initium crepusculi primarii, depressio solis $0^{0}.33'$. |
| — | 36. | Caelum in oriente *A* prope horizontem obscurescit, parum tamen adhuc minuitur claritas diurna. |
| V. | 0. | Irruit nox celeri passu. Conspicuae sunt fixae orientales, et Juppiter a meridie recedens. |
| — | 5. | Caelum orientem versus usque in verticem *F* tenebris obtectum. Micant stellae orientales. |
| — | 12. | Tenebrae sese diffundunt ultra verticem, atque in *H* |

*) Taf. V. Fig. 5.

Hora min.

fere dignoscuntur earum limites, haud tamen ita, ut sumi possit altitudo culminis crepusculi.

— 19. Absque dubitatione discernitur culmen crepusculi in *E*. Figura eius fere circulum sphaerae maximum *ED* refert, cum amplitudo horizontalis *DB* ab utraque parte circuli verticalis *AFB* ad 90 gradus excurrat. Altitudo culminis *EB* est = 8°.30′, depressio solis = 8°.3′.

— 25. Altitudo culminis *EB* = 7°.15′, depressio solis = 8°. 59′, amplitudo *DB* eadem.

— 31. Altitudo culminis *EB* = 7°.0′, depressio solis = 9°.55′.

— 36. Altitudo culminis *EB* = 6°.20′, depressio solis = 10°.42′.

— 43. Altitudo culminis *EB* = 5°.45′, depressio solis = 11°.48′.

— 48. Altitudo culminis *EB* = 5°.0′, depressio solis = 12°. 35′, minuitur amplitudo.

— 54. Altitudo culminis *EB* = 4°.30′, depressio solis = 13°.31′.

— 59. Altitudo culminis *EB* = 3°.40′, depressio solis = 14°.18′.

VI. 4. Altitudo culminis *EB* = 3°.15, depressio solis = 15°.5′, amplitudo *JB* vix est quadraginta graduum.

Paullatim quoque crepusculum miscetur lumini zodiacali, unde hanc ob caussam et ob frigus intensius abrupta est observatio.

§. 1009. Ceterum notandum altitudines *EB* potius esse debite majores quam vero minores, quod factum est, quo magis ad veram eius altitudinem accederem.“

Lambert hat a. a. O. nur die der Zeit $V^h.19^m$ entsprechende Beobachtung der Rechnung unterworfen, und ausserdem hat Brandes in der neuen Ausgabe des Gehler'schen physikalischen Wörterbuchs. Band II. Artikel Dämmerung. S. 274 und S. 275. noch die der Zeit $V^h.36^m$ entsprechende Beobachtung berechnet; andere Berechnungen dieser sehr merkwürdigen und jedenfalls unter sehr günstigen Umständen angestellten Beobachtungen, wobei auch noch bemerkt werden muss, dass Lambert und Brandes bei ihren Rechnungen nur die erste Dämmerung in Betrachtung gezogen haben, sind mir nicht bekannt geworden. Dadurch bin

ich veranlasst worden, diese Lambert'schen Dämmerungsbeobachtungen einmal einer vollständigen genauen Berechnung zu unterwerfen, und bin dabei von einem meiner früheren Schüler, dem Schulamts-Kandidaten Herrn Schlesicke aus Königsberg i. P., welcher sich hier mit grossem Eifer und sehr gutem Erfolge dem Studium der Mathematik und Physik unter meiner Leitung gewidmet hat, freundlichst unterstützt worden, indem Herr Schlesicke namentlich die Berechnung der zweiten Dämmerung, welche nicht ohne Schwierigkeit und manche Weitläufigkeit auszuführen war, ganz allein ausgeführt, und dadurch sich jedenfalls ein Verdienst um die Wissenschaft erworben hat. Die Resultate dieser Rechnungen werde ich nun im Folgenden mit den mir nöthig scheinenden Erläuterungen den geehrten Lesern dieser Beiträge zur meteorologischen Optik mitzutheilen mir erlauben.

Nach den in der vorhergehenden Abhandlung eingeführten Bezeichnungen, die wir auch in dem vorliegenden Aufsatze überall beibehalten werden, ist für die obigen Lambert'schen Beobachtungen von $V^h.19^m$ bis $VI^h.4^m$:

$$
\begin{aligned}
\Theta &= 8^0.30' \text{ und } & \Omega &= 8^0.\ 3' \\
&= 7\ .\ 15 & &= 8\ .59 \\
&= 7\ .\ \ 0 & &= 9\ .55 \\
&= 6\ .\ 20 & &= 10\ .42 \\
&= 5\ .\ 45 & &= 11\ .48 \\
&= 5\ .\ \ 0 & &= 12\ .35 \\
&= 4\ .\ 30 & &= 13\ .31 \\
&= 3\ .\ 40 & &= 14\ .18 \\
&= 3\ .\ 15 & &= 15\ .\ 5
\end{aligned}
$$

Nach der Refractionstafel der Connaissance des tems oder in den bekannten Kleinen astronomischen Ephemeriden von C. L. Harding und G. Wiesen ist die astronomische Horizontalrefraction

$$\varrho = 33'.46'',3 = 2026'',3$$

also

$$log\,\varrho = 3,3067.$$

Diese Refraction entspricht einem mittleren Barometerstande von $0^m,76$ oder 28'' und einer mittleren Temperatur von $+ 10^0$ C. oder $+ 8^0$ R. Ich habe den erwähnten mittleren Barometerstand beibehalten, die Horizontalrefraction aber auf die Temperatur des schmelzenden Eises reducirt, und demzufolge nach Anleitung der

Refractionstafel in den Kleinen astronomischen Ephemeriden von C. L. Harding und G. Wiesen zu dem obigen Logarithmus der Horizontalrefraction 0,0168 addirt, welches

$$log\,\varrho = 3{,}3235$$

also

$$\varrho = 2106'',2 = 35'.6'',2$$

und demnach

$$2\varrho = 1^0.10'.12'',4$$

giebt. Eine genaue Reduction wegen Barometer und Thermometer ist nicht möglich, da Lambert seinen Beobachtungen den Stand des Barometers und Thermometers beizufügen unterlassen hat; für die Reduction auf die Temperatur des schmelzenden Eises spricht aber der Umstand, dass die Beobachtungen in der zweiten Hälfte des Monats November angestellt worden sind.

Ferner ist, wie wir schon aus der vorhergehenden Abhandlung wissen,

$$K = 0{,}000588768$$

also

$$1 + K = 1{,}000588768$$

und

$$log(1 + K) = 0{,}0002547$$

$$log\sqrt{1 + K} = 0{,}0001274.$$

Den Erdhalbmesser $r$ nehme ich in einer runden, allgemein bekannten Zahl zu 860 Meilen an, so dass also

$$r = 860;\ log\,r = 2{,}9344985$$

ist, werde aber die Rechnung so führen, dass es leicht ist, an die Stelle des vorhergehenden jeden andern Erdhalbmesser zu setzen.

Dies sind die Data, welche den sämmtlichen folgenden Rechnungen zum Grunde liegen.

## §. 3.

Zuerst wollen wir nun die Rechnung unter der Voraussetzung anstellen, dass die Lambert'schen Beobachtungen der ersten Dämmerung entsprochen haben.

Die Formeln, nach denen unter dieser Voraussetzung die Rechnung geführt werden muss, sind die folgenden.

Zuerst muss man den Hülfswinkel $Q$ mittelst der dritten der

Formeln 30*) der vorhergehenden Abhandlung, wenn man in derselben $\varDelta = 0$ und $D = 1$ setzt, nämlich mittelst der Formel

$$\cot Q = \frac{\cos \Theta}{\sin(\Theta + \Omega - 2\varrho)\sqrt{1+K}}$$

berechnen. Dann findet man den Winkel $\omega$ mittelst der vierten der Formeln 30*) der vorhergehenden Abhandlung, nämlich mittelst der Formel

$$\tang \omega = \frac{\sin(\Theta + \Omega - Q - 2\varrho)}{\sin Q \sin(\Theta + \Omega - 2\varrho)},$$

worauf der Winkel $\varphi$ mitttelst der aus der Gleichung 17) der vorhergehenden Abhandlung für $n = 1$ sich sogleich ergebenden Formel

$$\varphi = \Omega - 2\varrho - \omega$$

erhalten wird. Hierauf erhält man $R$ mittelst der Formel 20) der vorhergehenden Abhandlung, nämlich mittelst der Formel

$$R = r \frac{\cos \Theta}{\cos(\Theta + \varphi)},$$

und die Differenz $R - r$ ist dann die gesuchte Höhe der Atmosphäre, in dem bekannten, hier stets festzuhaltenden Sinne.

Zu mehrerer Erläuterung der Rechnung werde ich die vollständige Berechnung einer der neun obigen Lambert'schen Beobachtungen, nämlich der, welche der Zeit $5^h.19^m$ entspricht, die auch **Lambert** und **Brandes** berechnet haben, hierher setzen.

$$\text{Zeit} = 5^h.19^m$$

$$\Theta = 8^0.30'; \ \Omega = 8^0.3'$$

$$\begin{aligned} \Theta &= 8^0.30'.0'',0 \\ \Omega &= \underline{8\ .\ 3\ .0,0} \\ \Theta + \Omega &= 16.33\ .0,0 \\ 2\varrho &= \underline{1.10\ .12,4} \\ \Theta + \Omega - 2\varrho &= 15.22\ .47,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{1+K} &= 0,0001274 \\ \log\sin(\Theta + \Omega - 2\varrho) &= \begin{cases} 9,4232380 - 10 \\ \quad + 3645 \end{cases} \\ \log.\sin(\Theta + \Omega - 2\varrho)\sqrt{1+K} &= 9,4237299 - 10 \end{aligned}$$

$$\log\cos\Theta = 9{,}9952033 - 10$$

$$\log.\sin(\Theta + \Omega - 2\varrho)\sqrt{1+K} = \underline{9{,}4237299 - 10}$$

$$\log\cot Q = 10{,}5714734 - 10$$

$$\underline{4425}$$

$$8419/30900/3{,}7$$

$$\underline{25257}$$

$$56430$$

$$Q = \begin{cases} 15^0.1'.\ 0'',0 \\ \quad\ \ -\ 3{,}7 \\ 15\ .0.\ 56{,}3 \end{cases}$$

$$\log\sin(\Theta + \Omega - 2\varrho) = 9{,}4236025 - 10$$

$$\log\sin Q = \begin{cases} 9{,}4129962 - 10 \\ \quad + 4422 \end{cases}$$

$$\log.\sin Q\sin(\Theta + \Omega - 2\varrho) = 8{,}8370409 - 10$$

$$\Theta + \Omega - 2\varrho = 15^0.22'.47'',6$$

$$Q = \underline{15\ .\ 0\ .56{,}3}$$

$$\Theta + \Omega - Q - 2\varrho = 0\ .21.51{,}3$$

$$\log\sin(\Theta + \Omega - Q - 2\varrho) = \begin{cases} 7{,}8028432 - 10 \\ \quad + 4293 \\ 7{,}8032725 - 10 \end{cases}$$

$$\log.\sin Q\sin(\Theta + \Omega - 2\varrho) = \underline{8{,}8370409 - 10}$$

$$\log\ \mathrm{tang}\ \omega = 8{,}9662316 - 10$$

$$0188$$

$$2295/21280/9{,}3$$

$$\underline{20655}$$

$$6250$$

$$\omega = 5^0.17'.\ 9'',3$$

$$\Omega = 8^0.\ 3'.\ 0'',0$$

$$2\varrho = \underline{1\ .10\ .\ 12{,}4}$$

$$\Omega - 2\varrho = 6\ .52\ .\ 47{,}6$$

$$\omega = \underline{5\ .17\ .\ \ 9{,}3}$$

$$\varphi = \Omega - 2\varrho - \omega = 1\ .35\ .\ 38{,}3$$

$$\Theta = \underline{8\ .30\ .\ \ 0{,}0}$$

$$\Theta + \varphi = 10\ .\ 5\ .\ 38{,}3$$

$$\log\cos(\Theta+\varphi) = \begin{cases} 9{,}9932396 - 10 \\ \quad - 144 \\ \hline 9{,}9932252 - 10 \end{cases}$$

$$\log\cos\Theta = 9{,}9952033 - 10$$
$$\log\cos(\Theta+\varphi) = 9{,}9932252 - 10$$
$$\log\frac{\cos\Theta}{\cos(\Theta+\varphi)} = 0{,}0019781$$
$$\log r = 2{,}9344985$$
$$\log R = 2{,}9364766$$
$$R = 863{,}93 \text{ Meilen}$$
$$\text{Höhe der Atmosphäre} = R - r = 3{,}93 \text{ Meilen.}$$

Lambert findet Dasselbe. Er giebt a. a. O. p. 450. die Zahl 3,9 mill. germ. an und sagt dabei p. 451: „Quae ergo ex hoc computo est altitudo aeris lumen reflectentis."

Ganz auf dieselbe strenge Weise sind die sämmtlichen Lambert'schen Beobachtungen von mir berechnet worden, und will ich nun die Resultate dieser, wenn auch nicht schwierigen, doch zeitraubenden Rechnung hier angeben:

| Zeit | $\Theta$ | $\Omega$ |
|---|---|---|
| $= 5^h. 19^m$; | $= 8^0. 30'$; | $= 8^0. 3'$ |
| $= 5 . 25$; | $= 7 . 15$; | $= 8 . 59$ |
| $= 5 . 31$; | $= 7 . 0$; | $= 9 . 55$ |
| $= 5 . 36$; | $= 6 . 20$; | $= 10 . 42$ |
| $= 5 . 43$; | $= 5 . 45$; | $= 11 . 48$ |
| $= 5 . 48$; | $= 5 . 0$; | $= 12 . 35$ |
| $= 5 . 54$; | $= 4 . 30$; | $= 13 . 31$ |
| $= 5 . 59$; | $= 3 . 40$; | $= 14 . 18$ |
| $= 6 . 4$; | $= 3 . 15$; | $= 15 . 5$ |

Entsprechend diesen Datis findet man nach der Reihe:

$$\log\frac{\cos\Theta}{\cos(\Theta+\varphi)} = 0{,}0019781$$
$$= 0{,}0023028$$
$$= 0{,}0027229$$
$$= 0{,}0030265$$
$$= 0{,}0034966$$
$$= 0{,}0038128$$
$$= 0{,}0041322$$
$$= 0{,}0043154$$
$$= 0{,}0046076$$

Diese Logarithmen gebe ich deshalb hier besonders an, damit man mit Hülfe derselben die Grösse $R$ mittelst der Formel

$$R = r \frac{\cos \Theta}{\cos(\Theta + \varphi)}$$

leicht für jeden beliebigen Werth von $r$ berechnen könne.

Für $r = 860$ Meilen erhält man:

$R = 863{,}93$ Meilen
$= 864{,}57$ „
$= 865{,}41$ „
$= 866{,}01$ „
$= 866{,}95$ „
$= 867{,}58$ „
$= 868{,}22$ „
$= 868{,}59$ „
$= 869{,}17$ „

also

Höhe der Atmosphäre $= R - r = 3{,}93$ Meilen
$= 4{,}57$ „
$= 5{,}41$ „
$= 6{,}01$ „
$= 6{,}95$ „
$= 7{,}58$ „
$= 8{,}22$ „
$= 8{,}59$ „
$= 9{,}17$ „

Die vierte Beobachtung hat auch Brandes a. a. O. S. 275. berechnet, und findet aus dieser Beobachtung für die Höhe der Atmosphäre 5,9 Meilen, ganz nahe mit dem von uns gefundenen Resultate 6,0 Meilen übereinstimmend; für die erste Beobachtung, die er eben so wie Lambert auch berechnet hat, findet er gleichfalls das etwas zu kleine Resultat 3,8 Meilen.

Bemerken wollen wir auch noch, dass

$$\omega = 5^0 . 17' . 9'',3$$
$$= 5 . 43 . 44,0$$
$$= 6 . 15 . 58,8$$
$$= 6 . 36 . 45,5$$
$$= 7 . 7 . 39,2$$
$$= 7 . 23 . 27,1$$
$$= 7 . 46 . 9,8$$
$$= 7 . 56 . 36,1$$
$$= 8 . 13 . 28,3$$

und

$$\varphi = 1^0 . 35' . 38'',3$$
$$= 2 . 5 . 3,6$$
$$= 2 . 28 . 48,8$$
$$= 2 . 55 . 2,1$$
$$= 3 . 30 . 8,4$$
$$= 4 . 1 . 20,5$$
$$= 4 . 34 . 37,8$$
$$= 5 . 11 . 11,5$$
$$= 5 . 41 . 19,3$$

ist.

Ueberblickt man die obigen für die Höhe der Atmosphäre gefundenen Werthe, so wird man sogleich ihre geringe Uebereinstimmung unter einander bemerken; besonders auffallend muss es aber sein, dass dieselben in einem fortwährenden Wachsen begriffen sind, so dass jeder späteren Beobachtung, d. h. jeder geringeren Höhe des Gipfels des Dämmerungsbogens oder jeder grösseren Tiefe der Sonne unter dem Horizonte des Beobachtungsorts eine grössere Höhe der Atmosphäre entspricht, was auch schon von Brandes a. a. O. bemerkt und hervorgehoben worden ist.

Bei den obigen Rechnungen ist die terrestrische Refraction noch nicht berücksichtigt worden; um deren Einfluss einigermassen beurtheilen zu können, habe ich nach der in §. 5. der vorhergehenden Abhandlung gegebenen allgemeinen Anleitung wenigstens die erste und letzte Lambert'sche Beobachtung auf folgende Art von Neuem berechnet.

Der Winkel am Mittelpunkte der Erde, welcher von den beiden von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Beobachtungsorte und nach dem Gipfel des Dämmerungsbogens gezogenen geraden Linien

eingeschlossen wird, ist offenbar der im Vorhergehenden durch $\varphi = \Omega - 2\varrho - \varpi$ bezeichnete Winkel.

Für die erste Beobachtung ist

$$\varphi = 1^0.35'.38'',3 = 5738'',3.$$

Multiplicirt man dies mit dem Coefficienten der terrestrischen Refraction, nämlich mit 0,08; so erhält man

$$0{,}08.\varphi = 459'',1 = 0^0.7'.39'',1.$$

Zieht man dies von der gemessenen Höhe $8^0.30'.0'',0$ des Gipfels des Dämmerungsbogens ab, so erhält man die corrigirte Höhe des Gipfels des Dämmerungsbogens

$$\Theta = 8^0.22'.20'',9.$$

Für diese Höhe ergiebt sich nun aus der ersten Beobachtung

$$\log \frac{\cos \Theta}{\cos(\Theta + \varphi)} = 0{,}0019638$$

also

$$R = 863{,}90 \text{ und } R - r = 3{,}90.$$

Auch ist jetzt

$$\varpi = 5^0.16'.33'',2 \text{ und } \varphi = 1^0.36'.14'',4.$$

Für die letzte Beobachtung ist

$$\varphi = 5^0.41'.19'',3 = 20479'',3.$$

Multiplicirt man dies wieder mit dem Coefficienten 0,08 der terrestrischen Refraction, so erhält man

$$0{,}08.\varphi = 1638'',3 = 27'.18'',3.$$

Zieht man dies von der gemessenen Höhe $3^0.15'.0'',0$ des Gipfels des Dämmerungsbogens ab, so erhält man die corrigirte Höhe desselben

$$\Theta = 2^0.47'.41'',7.$$

Für diese Höhe ergiebt sich nun aus der letzten Beobachtung

$$\log \frac{\cos \Theta}{\cos(\Theta + \varphi)} = 0{,}0044436$$

also

$$R = 868{,}84 \text{ und } R - r = 8{,}84.$$

Auch ist jetzt

$$\varpi = 8^0.3'.53'',4 \text{ und } \varphi = 5^0.50'.54'',2.$$

Vergleicht man diese für die Höhe der Atmosphäre gefundenen Werthe mit den vorher erhaltenen, so wird man sich überzeugen, dass dieselben von der terrestrischen Refraction nicht merklich af-

ficirt werden, und letztere also bei diesen Rechnungen füglich unberücksichtigt bleiben kann.

Zum Schluss wollen wir auch noch die der Zeit $5^h.5^m$ entsprechende Lambert'sche Beobachtung, wo $\Theta = 90^0$ war, berechnen, ohne irgend einen Werth auf diese Rechnung zu legen. Nach der Angabe von Brandes a. a. O. S. 271. ist für diesen Fall $\Omega = 6^0.30'$, und man muss jetzt nach der Formel 20*) der vorhergehenden Abhandlung, wenn man in derselben $n = 1$ setzt, nämlich nach der Formel

$$R = \frac{r}{\cos(\Omega - \varrho)}$$

auf folgende Art rechnen:

$$\Omega = 6^0.30'.0'',0$$
$$\varrho = 0.35.\ 6,2$$
$$\Omega - \varrho = 5.54.53,8$$
$$\log r = 2,9344985$$
$$\log\cos(\Omega - \varrho) = \begin{cases} 9,9976825 - 10 \\ \quad - 8 \\ 9,9976817 - 10 \end{cases}$$
$$\log R = 2,9368168$$

$$R = 864,60 \text{ Meilen}, \quad R - r = 4,60 \text{ Meilen}.$$

Hieraus ergäbe sich also eine Höhe der Atmosphäre, die etwas grösser wäre als die aus der ersten der neun obigen Beobachtungen, welche der Zeit $5^h.19^m$ entspricht, sich ergebende Höhe.

## §. 4.

Die geringe Uebereinstimmung der im Vorhergehenden für die Höhe der Atmosphäre erhaltenen Resultate unter einander, ganz vorzüglich aber der gewiss sehr bemerkenswerthe Umstand, dass die erhaltenen Höhen zugleich mit der Zeit oder der Tiefe der Sonne unter dem Horizonte fortwährend wachsen, veranlasst uns nothwendig zu der Frage, ob denn die der vorhergehenden Rechnung zum Grunde gelegte Voraussetzung, dass die Lambert'schen Beobachtungen der ersten Dämmerung oder der Hauptdämmerung angehören, wirklich richtig ist, oder ob dieselben nicht vielleicht der zweiten Dämmerung entsprechen. Um diese Frage gehörig beantworten zu können, wollen wir daher alle Lambert'schen Beobach-

tungen nochmals unter der Annahme, dass dieselben der zweiten Dämmerung entsprechen, berechnen, und legen dieser Rechnung die folgenden, schon in der vorhergehenden Abhandlung entwickelten Formeln zum Grunde.

Zuerst müssen wir mittelst der aus der Gleichung 18) der vorhergehenden Abhandlung für $n = 2$, $\varDelta = 0$, $D = 1$ fliessenden Gleichung

$$\cos(\Theta + \Omega - 4\varrho - 3\omega) = \frac{\cos\Theta}{\sqrt{1+K}} \cos\omega$$

den Winkel $\omega$ bestimmen. Setzt man der Kürze wegen

$$A = \Theta + \Omega - 4\varrho, \; M = \frac{\cos\Theta}{\sqrt{1+K}};$$

so wird diese Gleichung

$$\cos(A - 3\omega) = M\cos\omega,$$

und führt nach der Note zu §. 5. der vorhergehenden Abhandlung, wenn der Kürze wegen

$$u = \tang\omega$$

gesetzt wird, zu der folgenden Gleichung des dritten Grades:

$$\left.\begin{array}{r} u^3 + (3\cot A + M\,\mathrm{cosec}\,A)u^2 - 3u \\ -(\cot A - M\,\mathrm{cosec}\,A) \end{array}\right\} = 0,$$

durch deren Auflösung $u$, und daraus dann ferner $\omega$ gefunden werden muss. Hat man aber $\omega$ auf diese Weise erhalten, so ergiebt sich $\varphi$ mittelst der aus der Gleichung 17) der vorhergehenden Abhandlung für $n = 2$ fliessenden Formel

$$\varphi = \Omega - 4\varrho - 3\omega,$$

und $R$ erhält man nun wieder wie vorher mittelst der Formel

$$R = r\,\frac{\cos\Theta}{\cos(\Theta + \varphi)}.$$

Endlich ist die Differenz $R - r$ die Höhe der Atmosphäre, immer in dem aus dem Obigen bekannten Sinne genommen.

Für die neun Lambert'schen Beobachtungen ist nun

$$A = \Theta + \Omega - 4\varrho = 14^0.\ 12'.\ 35'',2$$
$$= 13 . 53 . 35,2$$
$$= 14 . 34 . 35,2$$
$$= 14 . 41 . 35,2$$
$$= 15 . 12 . 35,2$$
$$= 15 . 14 . 35,2$$
$$= 15 . 40 . 35,2$$
$$= 15 . 37 . 35,2$$
$$= 15 . 59 . 35,2,$$

so wie

$$\log M = \log \frac{\cos \Theta}{\sqrt{1+K}} = 0,9950759 - 1$$
$$= 0,9963864 - 1$$
$$= 0,9966233 - 1$$
$$= 0,9972140 - 1$$
$$= 0,9976819 - 1$$
$$= 0,9982168 - 1$$
$$= 0,9985317 - 1$$
$$= 0,9989827 - 1$$
$$= 0,9991735 - 1$$

Mittelst dieser Werthe hat Herr Schlesicke die folgenden neun cubischen Gleichungen zur Bestimmung von $u = tang\,\omega$ entwickelt:

$$u^3 + 15,8752291 . u^2 - 3u + 0,0787139 = 0;$$
$$u^3 + 16,2589409 . u^2 - 3u + 0,0873473 = 0;$$
$$u^3 + 15,4792830 . u^2 - 3u + 0,0971190 = 0;$$
$$u^3 + 15,3582882 . u^2 - 3u + 0,1037178 = 0;$$
$$u^3 + 14,8257511 . u^2 - 3u + 0,1132239 = 0;$$
$$u^3 + 14,7967203 . u^2 - 3u + 0,1183315 = 0;$$
$$u^3 + 14,3781198 . u^2 - 3u + 0,1251714 = 0;$$
$$u^3 + 14,4294571 . u^2 - 3u + 0,1285491 = 0;$$
$$u^3 + 14,0895722 . u^2 - 3u + 0,1335782 = 0.$$

Die strenge Auflösung dieser Gleichungen, wobei Herr Schlesicke theilweise einen eignen Weg einschlug, zeigte, dass jede derselben drei reelle Wurzeln habe. Als Wurzeln ergaben sich:

$u = 0{,}1555695;\ 0{,}0315076;\ -16{,}0623063$
$= 0{,}1464633;\ 0{,}0363243;\ -16{,}4417282$
$= 0{,}1507170;\ 0{,}0411164;\ -15{,}6711161$
$= 0{,}1467486;\ 0{,}0470646;\ -15{,}5521001$
$= 0{,}1496621;\ 0{,}0504956;\ -15{,}0259100$
$= 0{,}1465305;\ 0{,}0540335;\ -14{,}9972842$
$= 0{,}1484900;\ 0{,}0577967;\ -14{,}5844066$
$= 0{,}1450083;\ 0{,}0605810;\ -14{,}6350463$
$= 0{,}1468590;\ 0{,}0635847;\ -14{,}3000174.$

Addirt man diese mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Wurzeln einer jeden der vorhergehenden cubischen Gleichungen zusammen, so erhält man die folgenden Summen:

$+\ 15{,}8752292$
$+\ 16{,}2589406$
$+\ 15{,}4792827$
$+\ 15{,}3582869$
$+\ 14{,}8257523$
$+\ 14{,}7967202$
$+\ 14{,}3781199$
$+\ 14{,}4294570$
$+\ 14{,}0895737$

Zieht man von diesen Summen die Coefficienten der zweiten Glieder in den obigen cubischen Gleichungen ab, so erhält man die folgenden Differenzen:

$+\ 0{,}0000001$
$-\ 0{,}0000003$
$-\ 0{,}0000003$
$-\ 0{,}0000013$
$+\ 0{,}0000012$
$-\ 0{,}0000001$
$+\ 0{,}0000001$
$-\ 0{,}0000001$
$+\ 0{,}0000015$

welche so klein sind, dass sie im vorliegenden Falle füglich vernachlässigt werden können.

Von vorzüglicher Wichtigkeit ist jetzt die Entscheidung der Frage, welche Wurzeln der obigen cubischen Gleichungen im vorliegenden Falle zu nehmen sind.

Da der Winkel $\omega$, wie aus der vorhergehenden Abhandlung ganz von selbst erhellet, nur ein positiver spitzer Winkel sein kann, so kann $u = tang\,\omega$ nur positiv sein, und die dritten, negativen, Wurzeln der obigen cubischen Gleichungen sind also natürlich auszuschliessen; es bleibt demnach nur die Wahl zwischen den ersten und zweiten, positiven, Wurzeln dieser Gleichungen.

Berechnet man aber $\omega$ aus den ersten, positiven, Wurzeln unserer obigen cubischen Gleichungen mittelst der Formel

$$u = tang\,\omega,$$

so erhält man für $\omega$ die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned}
\omega &= 8^0.\ 50'.\ 33'',3\\
&= 8\ .\ 19\ .\ 57{,}0\\
&= 8\ .\ 34\ .\ 15{,}4\\
&= 8\ .\ 20\ .\ 54{,}5\\
&= 8\ .\ 30\ .\ 42{,}6\\
&= 8\ .\ 20\ .\ 10{,}5\\
&= 8\ .\ 26\ .\ 49{,}4\\
&= 8\ .\ 15\ .\ \ 3{,}1\\
&= 8\ .\ 21\ .\ 16{,}8
\end{aligned}$$

Sucht man nun hieraus den Winkel $\varphi$ mittelst der Formel

$$\varphi = \Omega - 4\varrho - 3\omega,$$

so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\ 20^0.\ 49'.\ \ 4'',7\\
&= -\ 18\ .\ 20\ .\ 15{,}8\\
&= -\ 18\ .\ \ 8\ .\ 11{,}0\\
&= -\ 16\ .\ 41\ .\ 17{,}3\\
&= -\ 16\ .\ \ 4\ .\ 32{,}6\\
&= -\ 14\ .\ 45\ .\ 56{,}3\\
&= -\ 14\ .\ \ 9\ .\ 53{,}0\\
&= -\ 12\ .\ 47\ .\ 34{,}1\\
&= -\ 12\ .\ \ 9\ .\ 15{,}2.
\end{aligned}$$

Nun könnte aber nach §. 4. der vorhergehenden Abhandlung der Winkel $\varphi$ nur dann negativ sein, oder ein negativer Werth des-

selben bloss dann eine Bedeutung haben, wenn $\Theta$ ein stumpfer Winkel wäre, was bei den Lambert'schen Beobachtungen niemals der Fall ist; also sind offenbar auch die ersten, positiven, Wurzeln unserer obigen cubischen Gleichungen auszuschliessen, und es bleiben uns demnach nur noch die zweiten, gleichfalls positiven, Wurzeln dieser Gleichungen übrig.

Bestimmt man aber aus den zweiten, positiven, Wurzeln der obigen cubischen Gleichungen mittelst der Formel

$$u = tang\,\omega$$

den Winkel $\omega$, so erhält man die folgenden Werthe für denselben, wobei zu bemerken ist, dass Herr Schlesicke die aus der Gleichung

$$u = tang\,\omega$$

sich ergebenden Werthe von $\omega$ nur als Näherungswerthe betrachtet, und, um der Gleichung

$$cos(A - 3\omega) = M\,cos\,\omega$$

noch genauer zu genügen, als durch die aus der Gleichung

$$u = tang\,\omega$$

sich unmittelbar ergebenden Werthe von $\omega$ schon möglich ist, die genauen Werthe von $\omega$ mittelst einer aus der Gleichung

$$cos\,(A - 3\omega) = M\,cos\,\omega$$

leicht zu entwickelnden Differentialformel auf bekannte Weise bestimmt hat:

$$\begin{aligned}\omega &= 1^0.\ 48'.\ 16'',0\\ &= 2.\ \ 4.\ 32,8\\ &= 2.\ 21.\ 17,1\\ &= 2.\ 34.\ 24,1\\ &= 2.\ 52.\ 46,4\\ &= 3.\ \ 4.\ 18,5\\ &= 3.\ 18.\ 28,8\\ &= 3.\ 27.\ 55,2\\ &= 3.\ 38.\ 25,6\end{aligned}$$

also

$$
\begin{aligned}
3\omega &= 5^0 . 24' . 48'',0 \\
&= 6 . 13 . 38,4 \\
&= 7 . 3 . 51,3 \\
&= 7 . 43 . 12,3 \\
&= 8 . 38 . 19,2 \\
&= 9 . 12 . 55,5 \\
&= 9 . 55 . 26,4 \\
&= 10 . 23 . 45,6 \\
&= 10 . 55 . 16,8
\end{aligned}
$$

folglich

$$
\begin{aligned}
4\varrho + 3\omega &= 7^0 . 45' . 12'',8 \\
&= 8 . 34 . 3,2 \\
&= 9 . 24 . 16,1 \\
&= 10 . 3 . 37,1 \\
&= 10 . 58 . 44,0 \\
&= 11 . 33 . 20,3 \\
&= 12 . 15 . 51,2 \\
&= 12 . 44 . 10,4 \\
&= 13 . 15 . 41,6
\end{aligned}
$$

Sucht man nun $\varphi$ mittelst der Formel

$$\varphi = \Omega - 4\varrho - 3\omega,$$

so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\varphi &= 0^0 . 17' . 47'',2 \\
&= 0 . 24 . 56,8 \\
&= 0 . 30 . 43,9 \\
&= 0 . 38 . 22,9 \\
&= 0 . 49 . 16,0 \\
&= 1 . 1 . 39,7 \\
&= 1 . 15 . 8,8 \\
&= 1 . 33 . 49,6 \\
&= 1 . 49 . 18,4
\end{aligned}
$$

lauter positive spitze Winkel, wie es im vorliegenden Falle erforderlich ist.

Hieraus erhält man ferner

$$\Theta + \varphi = 8^0 . 47' . 47'',2$$
$$= 7 . 39 . 56,8$$
$$= 7 . 30 . 43,9$$
$$= 6 . 58 . 22,9$$
$$= 6 . 34 . 16,0$$
$$= 6 . 1 . 39,7$$
$$= 5 . 45 . 8,8$$
$$= 5 . 13 . 49,6$$
$$= 5 . 4 . 18,4$$

also

$$\log \frac{\cos \Theta}{\cos(\Theta + \varphi)} = 0,0003418$$
$$= 0,0004125$$
$$= 0,0004943$$
$$= 0,0005656$$
$$= 0,0006718$$
$$= 0,0007520$$
$$= 0,0008517$$
$$= 0,0009222$$
$$= 0,0010047$$

Setzt man nun wieder

$$r = 860 \text{ Meilen},$$

so ergiebt sich mittelst der Formel

$$R = r \frac{\cos \Theta}{\cos(\Theta + \varphi)}$$

für $R$ das folgende System von Werthen:

$$R = 860,67720 \text{ Meilen}$$
$$= 860,81740 \quad „$$
$$= 860,97960 \quad „$$
$$= 861,12080 \quad „$$
$$= 861,33140 \quad „$$
$$= 861,49060 \quad „$$
$$= 861,68840 \quad „$$
$$= 861,82820 \quad „$$
$$= 861,99200 \quad „$$

folglich

Höhe der Atmosphäre $= R - r =$ 0,67720 Meilen
$=$ 0,81740 „
$=$ 0,97960 „
$=$ 1,12080 „
$=$ 1,33140 „
$=$ 1,49060 „
$=$ 1,68840 „
$=$ 1,82820 „
$=$ 1,99200 „

oder bis auf die zweite Decimalstelle abgekürzt:

Höhe der Atmosphäre $= R - r =$ 0,68 Meilen
$=$ 0,82 „
$=$ 0,98 „
$=$ 1,12 „
$=$ 1,33 „
$=$ 1,49 „
$=$ 1,69 „
$=$ 1,83 „
$=$ 1,99 „

Wenn es nun auch wohl der Natur der Sache gemäss zu sein scheint, dass die Lufttheilchen, welche die Sonnenstrahlen zweimal noch mit hinreichender Intensität reflectiren, in einer geringeren Höhe über der Erdoberfläche liegen müssen *), als die das Sonnenlicht nur einmal mit hinreichender Intensität reflectirenden Lufttheilchen; so tritt doch auch jetzt wieder auf völlig unzweideutige Weise das bemerkenswerthe Resultat hervor, dass jede spätere Beobachtung eine grössere Höhe der Atmosphäre liefert; oder dass zugleich mit der Tiefe der Sonne unter dem Horizonte des Beobachtungsorts die aus den Lambert'schen Beobachtungen abgeleiteten Höhen der Atmosphäre unausgesetzt wachsen, wobei zugleich die

*) Nimmt man 1 Meile = 7532,5 Meter an, so ist die von Biot unter Zugrundelegung der zweiten Dämmerung aus Lacaille's Beobachtung abgeleitete Höhe der Atmosphäre von 10797 Metern = 1,43 Meilen, was mit den vorher gefundenen Resultaten aus Lambert's Beobachtungen bei diesem Gegenstande als wenigstens nicht in offenbarem Widerspruche stehend betrachtet werden kann.

Uebereinstimmung dieser Resultate unter einander nur eine wenig genügende genannt werden darf.

Weil die Berechnung der Lambert'schen Beobachtungen unter Zugrundelegung der dritten Dämmerung ziemlich weitläufig ist, so habe ich dieselbe, um diese Untersuchung über das Dämmerungsphänomen für jetzt nicht zu weit auszudehnen, unterlassen, indem ich zugleich die Ueberzeugung hege, dass auch die Berechnung der dritten Dämmerung nicht zu genügendern Resultaten als die vorhergehenden Rechnungen führen, jedenfalls aber eine noch geringere Höhe der Atmosphäre liefern wird, wie man auch schon aus der von Biot unter Zugrundelegung der dritten Dämmerung aus Lacaille's Beobachtung abgeleiteten, oben in §. 1. angegebenen, Höhe der Atmosphäre zu schliessen berechtigt ist.

§. 5.

Die im Vorhergehenden für die Höhe der Atmosphäre gefundenen Resultate, namentlich aber der sowohl unter Voraussetzung einer ersten, als auch unter Voraussetzung einer zweiten Dämmerung sich ganz unzweideutig kund gebende, gewiss sehr bemerkenswerthe Umstand, dass die gefundenen Höhen zugleich mit der Tiefe der Sonne unter dem Horizonte des Beobachtungsorts unausgesetzt wachsen, sind nach meiner Meinung der ganzen Lehre von der Dämmerung, wie sie mit unwesentlichen hin und wieder vorkommenden Abänderungen jetzt allgemein dargestellt zu werden pflegt, keineswegs günstig. Auch scheint mir die oben angeführte Ansicht Biot's, dass die Gränze der Dämmerung, welche wir beobachten, gewissermassen ein Mittel zwischen der Gränze der ersten und zweiten Dämmerung sei, wenig Wahrscheinlichkeit für sich zu haben, indem daraus sich wohl schwerlich eine genügende Erklärung der vorher hervorgehobenen fortwährenden Zunahme der aus den Dämmerungsbeobachtungen abgeleiteten Werthe der Höhe der Atmosphäre gleichzeitig mit der Tiefe der Sonne unter dem Horizonte des Beobachtungsorts herleiten lassen dürfte, wenn ich gleich darüber genauere Untersuchungen noch nicht angestellt habe. Ich muss vielmehr nach der jetzigen Lage der Sache, wie sich dieselbe namentlich aus der obigen, mit Sorgfalt und Genauigkeit durchgeführten Berechnung der bis jetzt vorliegenden Beobachtungen des Dämmerungsphänomens ergiebt, der Meinung sein, dass keineswegs bloss die Zurückwerfung der Sonnenstrahlen von den Theilchen der Atmosphäre die Ursache desselben ist, wie jetzt allge-

mein angenommen wird, sondern dass dieses der häufigern und genaueren Beobachtung gewiss sehr werthe Phänomen noch durch andere Ursachen herbeigeführt wird, in welcher Ansicht mich auch noch der Umstand bestärkt, dass das Dämmerungsphänomen bis jetzt überhaupt nur so ausserordentlich selten mit einigermassen erträglicher Genauigkeit beobachtet worden ist, so dass ein besonderes Zusammentreffen günstiger Umstände nothwendig erforderlich zu sein scheint, wenn das Phänomen mit solcher Schärfe und Nettigkeit sich zeigen soll, wie Beobachtungen, die auf einige Genauigkeit sollen Anspruch machen dürfen, erfordern; wäre aber bloss die Zurückwerfung der Sonnenstrahlen von der Atmosphäre die Ursache des Phänomens; so sollte man meinen, dass ausser vorzüglicher Heiterkeit des Himmels, deren wir uns doch öfter erfreuen, andere ganz wesentliche günstige Umstände nicht nothwendig sein möchten, wenn das Phänomen mit vorzüglicher Schärfe und Bestimmtheit sich zeigen soll. Uebrigens ist die von mir so eben ausgesprochene Ansicht keineswegs völlig neu, und ist z. B., wie ich so eben zufällig finde, auch schon von dem älteren verdienten englischen Astronomen, Physiker und Mathematiker Johann Keill ausgesprochen worden, welcher sich in seiner namentlich wegen der in ihr enthaltenen eleganten rein geometrischen Betrachtungen jetzt immer noch sehr werthvollen Introductio ad veram Astronomiam, seu Lectiones astronomicae habitae in schola astronomica Academiae Oxoniensis. Authore Joanne Keill. M. D. Astronomiae Professore Saviliano R. S. S. Oxoniae, e Theatro Scheldoniano. MDCCXVIII. 8°. p. 301. in der Lectio XXI. De Crepusculis et Siderum Refractione, auf folgende Art äussert: „Reflectio Atmosphaerae non videtur esse sola Crepusculorum causa, sed circumfusa Soli aura Aetherea, illiusque quasi Atmosphaera etiam splendet post Solis occasum, cumque haec oriendo et occidendo longius impendit tempus quam Sol, ante Solis ortum, Aurora circulari figura enitetur; quae scil. est segmentum circuli Atmosphaerae Solaris ab Horizonte secti, cujus lux diversa prorsus est ab illa quae ex illustratione Atmosphaerae Terrestris oritur. Verum Crepusculi ex aura Aetherea Soli vicina provenientis, brevior est duratio, quam illius quae a nostra Atmosphäera oritur, quae Vespere non finitur, nisi cum Sol octodecim circiter gradus infra Horizontem deprimitur. At vero nulli certi statui possunt limites, qui initia aut fines Crepusculorum definiant. Eorum enim duratio pendet ex quantitate materiae in aëre suspensa ad lucis reflectionem idonea, et ex altitudine aëris. Hyeme frigore

condensatus aër humilis est, et exinde cito finiuntur Crepuscula. Aestate rarefactus aër altior est, et diutius a Sole illustratur, unde protrahuntur Crepuscula. Quin etiam duratio Crepusculi Matutini brevior est Vespertina duratione, ob aërem mane densiorem et humiliorem quam Vespere. Censentur autem Crepuscula incipere aut desinere quando stellae sexti ordinis primum mane desinunt conspici vel vespere fiant conspicuae, quae prius ob claritatem aëris latebant." Hiernach geht also Keill's Meinung dahin, dass die Sonnen-Atmosphäre einen wesentlichen Theil an dem Dämmerungsphänomene habe; eine Untersuchung, in wie weit diese Ansicht gegründet sein dürfte, scheint mir bei den wenigen Beobachtungen, welche wir bis jetzt besitzen, noch nicht an der Zeit zu sein; jedoch darf ich nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass Lambert, was man bei dessen Beobachtungen bis jetzt ganz unbeachtet gelassen zu haben scheint, bestimmt sagt: „Paullatim quoque crepusculum miscetur lumini zodiacali, unde hanc ob causam et ob frigus intensius abrupta est obseruatio." Bei der Beobachtung Lacaille's ist zwar des Zodiakallichts nicht ausdrücklich gedacht; jedoch scheint dieselbe in der äquatorischen Zone angestellt zu sein, und man weiss ja, dass in dieser Zone das Zodiakallicht sehr häufig sich zeigt; auch darf man nicht unbemerkt lassen, dass Lacaille's Beobachtung im Frühlinge, Lambert's Beobachtung im Herbst angestellt ist, in welchen Jahreszeiten bekanntlich das Zodiakallicht besonders häufig am Himmel glänzt.

So problematisch aber auch der Zusammenhang des Dämmerungsphänomens mit anderen Naturerscheinungen noch sein mag, so liegt doch gerade in dieser Ungewissheit über die eigentliche Natur dieses Phänomens, in welcher wir uns gegenwärtig jedenfalls noch befinden, die dringendste und lebhafteste Aufforderung an die Leser dieser Beiträge, sich eifrigst, unter sorgfältiger Beachtung aller sich irgend zeigender Nebenumstände, der Beobachtung der Dämmerungserscheinungen zu widmen, und deren Resultate dem Herausgeber der Beiträge zur Veröffentlichung in denselben gefälligst mitzutheilen, damit man möglichst alles diesen jedenfalls höchst wichtigen und interessanten Gegenstand Betreffende an einem und demselben Orte beisammen habe; dass mit diesen Beobachtungen genaue Messungen, wenn den Beobachtern die dazu nöthigen Hülfsmittel irgend zu Gebote stehen, verbunden werden müssen, versteht sich von selbst; jedoch werden auch Beobachtungen, bei denen solche Messungen anzustellen nicht möglich war, wenn dieselbe nur zur weiteren Aufklärung der Natur des Phänomens

beizutragen geeignet sind, in den Beiträgen die bereitwilligste und schleunigste Aufnahme finden.

Dass ich Dämmerungsbeobachtungen zur Bestimmung der Höhe der Atmosphäre, auch nur in dem im Vorhergehenden stets festgehaltenen Sinne, so lange nicht für ein geeignetes Hülfsmittel halten kann, so lange man die eigentliche Natur des Dämmerungsphänomens nicht genauer, als dies bis jetzt der Fall zu sein scheint, kennen gelernt hat, brauche ich nach meinen vorher ausführlich dargelegten Ansichten jetzt wohl kaum noch besonders zu bemerken; ob aber häufigere und sorgfältigere Beobachtungen der Dämmerungsphänomene, als bis jetzt angestellt worden sind, uns nicht vielleicht zugleich zu wünschenwerthen Aufschlüssen über andere Naturerscheinungen führen werden, muss die Zeit lehren; zu solchen und ähnlichen Beobachtungen zu veranlassen, gehört aber mit zu den Hauptzwecken, welche die vorliegende Zeitschrift zu erreichen strebt.

---

## VI.

# Miscellen.

Herr A. Bravais hat in seinem im vorigen Jahre erschienenen grossen Werke über die Höfe (Mémoire sur les halos et les phénomènes optiques qui les accompagnent; par M. A. Bravais, Lieutenant de vaisseau, Professeur à l'Ecole Royale Polytechnique in dem Journal de l'École Royale Polytechnique. Trente-unième Cahier. Tome XVIII. Paris. 1847. 4. p. 1—p. 270.) auch neue Bestimmungen der Brechungsexponenten des Eises gegeben, die ich, als für die Theorie der Höfe sehr wichtig, hier mittheilen will, indem ich bemerke, dass die Bestimmungen auf zwei Reihen von Beobachtungen beruhen, die am 30sten Januar 1847 und am 1sten Februar 1847 gemacht wurden:

| | $1^{re}$ serie | $2^{e}$ serie |
|---|---|---|
| Indice du rouge extrême ....... | 1,3027 | 1,3059 |
| „ de la lim. rouge-orangé ....... | 1,3069 | 1,3088 |
| „ de la lim. orangé-jaune ....... | 1,3083 | 1,3094 |
| „ de la lim. jaune-vert ....... | 1,3102 | 1,3097 |
| „ de la lim. vert-bleu ....... | 1,3123 | 1,3144 |
| „ de la lim. bleu-violet ....... | 1,3164 | 1,3160 |
| „ du violet extrême ....... | | 1,3172? |

Bei dem Indice de la lim. vert-bleu bemerkt Herr Bravais in Parenthese: (en supprimant l'indigo).

Auch zwei Reihen von Bestimmungen der Brechungsexponenten des flüssigen Wassers hat Herr Bravais gemacht, die ich hier gleichfalls mittheilen will:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Indice | du rouge | ...... | de 1,3313 | à | 1,3332 |
| ,, | de l'orangé | ...... | de 1,3332 | à | 1,3334 |
| ,, | du jaune | ...... | de 1,3334 | à | 1,3345 |
| ,, | du vert | ...... | de 1,3345 | à | 1,3379 |
| ,, | du bleu | ...... | de 1,3378 | à | 1,3395 |
| ,, | du violet | ...... | de 1,3395 | à | 1,3425 |

Das angewandte Verfahren hat Herr Bravais in einer besondern Note (Note III. p. 217.) seines Werkes beschrieben; dasselbe weicht übrigens von den bekannten Verfahrungsweisen nicht wesentlich ab, weshalb ich es für zu weitläufig gehalten habe, die ganze 3te Note des Herrn Bravais hier zu übersetzen, und die obige Mittheilung der Resultate mag daher für jetzt hinreichen. Das Werk des Herrn Bravais wird uns aber noch zu manchen anderen Mittheilungen in dieser Zeitschrift Gelegenheit geben.

*G.*

---

Druck von C. P. Melzer in Leipzig.

# Beiträge

zur

# meteorologischen Optik

und

# zu verwandten Wissenschaften.

In zwanglosen Heften

herausgegeben

von

**Johann August Grunert,**

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Erfurt, der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg und der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig, auswärtigem Mitgliede der Königlich Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, correspondirendem Mitgliede der Königlich Baierischen Akademie der Wissenschaften zu München, der Königlich Schwedischen Societät der Wissenschaften zu Upsala und der Kaiserlich Oesterreichischen Akademie der Wissenschaften zu Wien ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Danzig, Halle, Marburg und Leipzig.

Erster Theil. Drittes Heft.

Mit einer lithographirten Tafel.

Leipzig, 1849.

Verlag von E. B. Schwickert.



# VII.

# Die Theorie der Luftspiegelung.

Von dem Herausgeber.

---

## §. 1.

Bei der Entwickelung der Theorie der Luftspiegelung werde ich von einigen Sätzen ausgehen, deren Richtigkeit durch viele mit der grössten Sorgfalt und Genauigkeit von mehreren ausgezeichneten Physikern angestellte Versuche als ausser allem Zweifel gesetzt betrachtet werden kann, zu denen aber auch die physikalische Theorie des Lichts, die jedoch im Folgenden absichtlich nicht weiter angewandt werden soll, um der ganzen Untersuchung soviel als möglich einen vorzugsweise geometrischen Charakter zu verleihen, mit gleicher Sicherheit führt. Diese Sätze sollen jetzt, um eine sichere Grundlage für das Folgende zu gewinnen, und um alle Sätze, die als eigentliche Fundamentalsätze für das Folgende zu betrachten sind, beisammen zu haben, hier in der Kürze zusammengestellt werden, wenn dieselben auch längst allgemein bekannt sind, und sich in jedem etwas vollständigern physikalischen Lehrbuche sämmtlich finden. Wird dadurch auch eine kleine Wiederholung in Bezug auf andere Abhandlungen in dieser Zeitschrift veranlasst, so hat dies darin seinen Grund und findet dadurch seine Entschuldigung, dass alle Abhandlungen möglichst für sich und ganz unabhängig von anderen Abhandlungen verständlich sein und für sich ein Ganzes bilden sollen.

### 1.

Der erste dieser Sätze ist das bekannte Fundamentaltheorem der gesammten Dioptrik, dass nämlich für jede zwei brechende Körper oder Media das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels und des Sinus des Brechungswinkels zu einander constant ist, und

dass dieses Verhältniss jederzeit seinen reciproken Werth erhält, wenn die beiden brechenden Körper mit einander verwechselt werden. Wird also für zwei brechende Körper überhaupt der Einfallswinkel durch $\omega$, der Brechungswinkel durch $\omega'$ bezeichnet, und

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'} = n$$

gesetzt, so ist die Grösse $n$, welche bekanntlich der Brechungsexponent für die beiden in Rede stehenden Körper genannt wird, constant oder verändert ihren Werth nicht, wie sich auch die beiden Winkel $\omega$ und $\omega'$ ändern mögen. Werden aber die beiden brechenden Körper mit einander verwechselt, so dass der einfallende und der gebrochene Strahl, welche vorher respective im ersten und zweiten Körper lagen, jetzt respective im zweiten und ersten Körper liegen; so erhält der Brechungsexponent seinen reciproken Werth, und wird also in der vorhergehenden Bezeichnung durch den Bruch $\frac{1}{n}$ dargestellt. Auch hat die Erfahrung gelehrt, dass der Brechungsexponent immer grösser oder kleiner als die Einheit ist, jenachdem der Strahl aus einem dünnern in einen dichtern, oder aus einem dichtern in einen dünnern Körper übergeht. Im ersten Falle ist also jederzeit der Einfallswinkel grösser als der Brechungswinkel; im zweiten Falle ist dagegen der Einfallswinkel immer kleiner als der Brechungswinkel.

## 2.

Ferner haben die Versuche gelehrt, dass, wenn $A$ und $B$ zwei einander berührende, von parallelen Ebenen begränzte brechende Körper oder Media sind, und ein Strahl aus der Luft in den Körper $A$, hierauf aus dem Körper $A$ in den Körper $B$, und dann aus dem Körper $B$ wieder in die Luft übergeht, jederzeit der erste einfallende und der letzte ausfahrende Strahl, welche Strahlen beide in der Luft liegen, einander parallel sind. Bezeichnen wir also den Einfallswinkel und den Brechungswinkel für die Luft und den Körper $A$ durch $\omega$ und $\omega'$, für den Körper $A$ und den Körper $B$ durch $\omega'$ und $\omega''$, für den Körper $B$ und die Luft durch $\omega''$ und $\omega$, wobei man nicht zu übersehen hat, dass die Körper $A$ und $B$ nach der Voraussetzung von parallelen Ebenen begränzt werden und in Folge der Beobachtungen und Versuche der erste einfallende und letzte ausfahrende Strahl einander parallel sind, die entsprechenden Brechungsexponenten aber durch $n$, $n'$, $n''$; so ist nach 1.

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'} = n, \quad \frac{\sin\omega'}{\sin\omega''} = n', \quad \frac{\sin\omega''}{\sin\omega} = n'';$$

also, wenn man diese Gleichungen in einander multiplicirt:

$$n\,n'\,n'' = 1,$$

oder

$$n' = \frac{1}{n\,n''} = \frac{1}{n''} : n,$$

wo $n$ der Brechungsexponent für Luft und den Körper $A$, ferner $\frac{1}{n''}$ der Brechungsexponent für Luft und den Körper $B$, endlich $n'$ der Brechungsexponent für die Körper $A$ und $B$ ist. Dies hat überhaupt auf den folgenden, auch noch durch viele andere Versuche ausser allem Zweifel gesetzten Satz geführt:

Wenn für die beiden brechenden Körper $A$ und $B$ der Brechungsexponent $\beta$, für die beiden brechenden Körper $A$ und $C$ der Brechungsexponent $\gamma$ ist, so ist jederzeit $\frac{\gamma}{\beta}$ der Brechungsexponent für die beiden brechenden Körper $B$ und $C$.

Namentlich ist die Richtigkeit dieses Satzes auch in allen den Fällen, wo $A$ der leere Raum ist, und $B$ und $C$ verschiedene Luftarten oder Gasarten sind, durch Versuche unzweifelhaft dargethan worden.

3.

Wenn wir die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur 0 und dem barometrischen Drucke $0^m,76$ als Einheit der Dichtigkeiten der atmosphärischen Luft annehmen; so ist nach allgemein bekannten physikalischen Gesetzen die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur $t$ nach dem Centesimalthermometer und bei dem in Metern ausgedrückten barometrischen Drucke $b$:

$$\frac{b}{0^m,76 . (1 + 0,00375 . t)},$$

wobei wir auf die durch neuere Versuche gefundenen Werthe des Coefficienten 0,00375 jetzt keine Rücksicht nehmen, sondern diesen ältern Coefficienten, weil er der bekannteste und am Meisten gebrauchte ist, beibehalten wollen.

Bezeichnen wir nun den Brechungsexponenten für den leeren

Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur $t$ und dem barometrischen Drucke $b$ durch $n$, so zeigen bei verschiedenen Temperaturen und Barometerständen angestellte Versuche unzweifelhaft, dass der Quotient

$$(n^2-1):\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}$$

oder der Bruch

$$\frac{0^m,76.(1+0,00375.t)(n^2-1)}{b}$$

sehr nahe eine constante Grösse ist, d. h. dass die Grösse $n^2-1$, welche man gewöhnlich die brechende Kraft zu nennen pflegt, der Dichtigkeit der Luft proportional, oder dass der Quotient der brechenden Kraft durch die Dichtigkeit der Luft dividirt, welchen man gewöhnlich das Brechungsvermögen zu nennen pflegt, eine constante Grösse ist. Bezeichnen wir also, dies vorausgesetzt, den Brechungsexponenten für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ durch $N$, so ist $n=N$ für $t=0$ und $b=0^m,76$; folglich, weil der obige Bruch eine constante Grösse ist:

$$\frac{0^m,76.(1+0,00375.t)(n^2-1)}{b}=N^2-1,$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$N=\sqrt{1+\frac{0^m,76.(1+0,00375.t)(n^2-1)}{b}},$$

mittelst welcher Formel der Brechungsexponent für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ aus den durch unmittelbare Versuche bestimmten Werthen des Brechungsexponenten $n$ für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur $t$ und Barometerhöhe $b$ berechnet werden kann.

Nach Biot ist bis auf sieben Decimalstellen genau

$$N=1,0002943$$

und

$$N^2-1=0,0005888.$$

Aus der obigen Gleichung zwischen $n$ und $N$ folgt auch

$$n=\sqrt{1+\frac{b(N^2-1)}{0^m,76.(1+0,00375.t)}},$$

d. i., wenn wir die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur $t$ und der Barometerhöhe $b$ durch $D$ bezeichnen, weil nach dem Obigen

$$D = \frac{b}{0^m{,}76 \,.\, (1 + 0{,}00375 \,.\, t)}$$

ist,

$$n = \sqrt{1 + (N^2 - 1)D},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$K = N^2 - 1 = 0{,}0005888$$

setzen, wo also $K$ eine constante Grösse ist:

$$n = \sqrt{1 + KD}.$$

Ist $n_1$ der Brechungsexponent für den leeren Raum und atmosphärische Luft von der Dichtigkeit $D_1$, so ist nach der vorhergehenden Gleichung:

$$n_1 = \sqrt{1 + KD_1};$$

also ist nach 2.

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\sqrt{1 + KD_1}}{\sqrt{1 + KD}} = \sqrt{\frac{1 + KD_1}{1 + KD}}$$

der Brechungsexponent für atmosphärische Luft von der Dichtigkeit $D$ und atmosphärische Luft von der Dichtigkeit $D_1$. Weil

$$1 + KD_1 = 1 + KD + K(D_1 - D)$$

ist, so ist auch

$$\frac{n_1}{n} = \sqrt{1 + \frac{K(D_1 - D)}{1 + KD}}.$$

Dies sind die Erfahrungssätze, — wenigstens wollen wir diese Sätze jetzt bloss als auf dem Wege der Erfahrung gewonnene Sätze ansehen, — welche wir unserer folgenden Entwickelung der Theorie der Luftspiegelung zum Grunde legen werden.

## §. 2.

Die Erde nehmen wir bei den folgenden Untersuchungen als eben an, was im vorliegenden Falle wenigstens ohne allen merklichen Fehler gewiss verstattet sein wird; und denken wir uns dann die Atmosphäre in Schichten von gleicher Höhe, in deren jeder die Luft als gleichförmig dicht angenommen wird, getheilt, so muss man sich diese Schichten sämmtlich als von der Erdfläche parallelen

Ebenen begränzt vorstellen. Ferner nehmen wir eine Vertikalebene als Ebene der $xy$ an, auf welche wir alle unsere folgenden Betrachtungen beziehen, indem wir nur den Weg eines fortwährend in dieser Vertikalebene die Atmosphäre durchdringenden Lichtstrahls betrachten. Die Axe der $x$ nehmen wir horizontal, die Axe der $y$ vertikal an, so dass in den Figuren der positive Theil der Axe der $x$ stets nach der rechten Seite, der positive Theil der Axe der $y$ nach oben hin liegt.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun überhaupt $n$ gleich hohe Schichten der Atmosphäre in stetiger Folge, in deren jeder die Luft als gleichförmig dicht vorausgesetzt wird, betrachten, und wollen annehmen, dass ein von einem Punkte $s$ in der äussersten Gränze der ersten Schicht ausgehender Lichtstrahl bei dem Punkte $s_1$ in die 2te Schicht, bei dem Punkte $s_2$ in die 3te Schicht, u. s. w., bei dem Punkte $s_{n-2}$ in die $(n-1)$te Schicht, bei dem Punkte $s_{n-1}$ in die $n$te Schicht trete, und bei dem Punkte $s_n$ an der äussersten Gränze der $n$ten Schicht anlange, wobei in den Punkten

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots s_{n-1}$$

der Strahl Brechungen erleidet. Durch die sämmtlichen Punkte

$$s, s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots s_{n-1}, s_n$$

wollen wir uns Vertikallinien gezogen denken, und wollen in den Punkten

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots s_{n-1}$$

die Einfallswinkel respective durch

$$z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots z_{n-1};$$

die Brechungswinkel respective durch

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \ldots \zeta_{n-1}$$

bezeichnen. Die spitzen Winkel, welche der erste und letzte Strahl $ss_1$ und $s_{n-1}s_n$ respective mit den Vertikalen in $s$ und $s_n$ einschliessen, sollen durch $\zeta$ und $z_n$ bezeichnet werden. Die Brechungsexponenten für den leeren Raum und die Luft in der

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, ... $n$ten

Schicht seien respective

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots \lambda_n.$$

Dies vorausgesetzt, müssen wir nun zwei Fälle unterscheiden, jenachdem der Strahl nach und nach aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt.

In dem ersten Falle, welchem Taf. VI. Fig. 1. und Taf. VI. Fig. 1*. entsprechen, wenn nämlich der Strahl nach und nach aus den oberen in die unteren Schichten tritt, ist nach §. 1. 1. und §. 1. 2.

$$\frac{\sin z_1}{\sin \zeta_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

$$\frac{\sin z_2}{\sin \zeta_2} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

$$\frac{\sin z_3}{\sin \zeta_3} = \frac{\lambda_4}{\lambda_3},$$

$$\frac{\sin z_4}{\sin \zeta_4} = \frac{\lambda_5}{\lambda_4},$$

u. s. w.

$$\frac{\sin z_{n-1}}{\sin \zeta_{n-1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}};$$

also, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichungen multiplicirt:

$$\frac{\sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \sin z_4 \ldots \sin z_{n-1}}{\sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin \zeta_3 \sin \zeta_4 \ldots \sin \zeta_{n-1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Nun ist aber offenbar

$$\zeta_1 = z_2, \; \zeta_2 = z_3, \; \zeta_3 = z_4, \; \ldots \; \zeta_{n-2} = z_{n-1};$$

also, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\frac{\sin z_1}{\sin \zeta_{n-1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1},$$

und folglich, weil offenbar auch $z_1 = \zeta$, $\zeta_{n-1} = z_n$ ist:

$$\frac{\sin \zeta}{\sin z_n} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Bezeichnen wir nun die Gränzen, denen, wenn $n$ in's Unendliche wächst und demzufolge der Weg des Lichtstrahls in eine stetig gekrümmte Linie übergeht, die Grössen

$$\zeta, \; z_n, \; \lambda_1, \; \lambda_n$$

sich nähern, respective durch

$$\mathfrak{Z}, \; Z, \; \mathfrak{L}, \; L;$$

wo $\mathfrak{Z}$, $Z$ die spitzen Winkel der Berührenden des Wegs oder der Trajectoria des Lichts im Ausgangspunkte und Endpunkte des Strahls

mit den diesen Punkten entsprechenden Vertikalen, und $\mathfrak{L}$, $L$ die Brechungsexponenten für den leeren Raum und die Luft im Ausgangspunkte und Endpunkte des Strahls bezeichnen; so ist nach dem Obigen offenbar

$$\frac{\sin \mathfrak{Z}}{\sin Z} = \frac{L}{\mathfrak{L}}$$

oder

$$\mathfrak{L} \sin \mathfrak{Z} = L \sin Z.$$

Hieraus sieht man, dass die Grösse $L \sin Z$ für denselben Strahl oder dieselbe Refractionscurve constant, und folglich, wenn wir diese Constante durch $\mu$ bezeichnen,

$$L \sin Z = \mu$$

ist.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Ausgangspunkts des Strahls durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und die Coordinaten seines Endpunkts durch $x$, $y$; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie offenbar in dem Falle Taf. VI. Fig. 1.

$$tang\,(180^0 - Z) = \frac{\partial x}{\partial y}, \text{ d. i. } tang\, Z = -\frac{\partial x}{\partial y};$$

dagegen ist in dem Falle Taf. VI. Fig. 1*.

$$tang\, Z = \frac{\partial x}{\partial y};$$

also ist allgemein

$$tang\, Z = \mp \frac{\partial x}{\partial y},$$

wenn das obere Zeichen dem Falle Taf. VI. Fig. 1., das untere dem Falle Taf. VI. Fig. 1*. entspricht.

In dem zweiten der beiden oben namhaft gemachten Fälle, welchem Taf. VI. Fig. 2. und Taf. VI. Fig. 2*. entsprechen, wenn nämlich der Strahl nach und nach aus den unteren in die oberen Schichten tritt, gelangt man durch eine der vorhergehenden ganz ähnliche Betrachtung zu der Gleichung

$$L \sin Z = \mu,$$

wo auch die Symbole ganz ähnliche Bedeutungen haben wie vorher. Bezeichnen wir nun aber wieder die Coordinaten des Ausgangspunkts des Strahls durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und die Coordinaten seines Endpunkts durch $x$, $y$; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie offenbar in dem Falle Taf. VI. Fig. 2.

$$tang\, Z = \frac{\partial x}{\partial y},$$

dagegen in dem Falle Taf. VI. Fig. 2*.

$$tang(180^0 - Z) = \frac{\partial x}{\partial y}, \text{ d. i. } tang\, Z = - \frac{\partial x}{\partial y};$$

also allgemein

$$tang\, Z = \pm \frac{\partial x}{\partial y},$$

wenn das obere Zeichen dem Falle Taf. VI. Fig. 2., das untere dem Falle Taf. VI. Fig. 2*. entspricht.

Um nun aber die folgenden Betrachtungen möglichst zu vereinfachen, wollen wir, wodurch die Allgemeinheit der Untersuchung offenbar nicht beeinträchtigt werden wird, die positiven $y$ immer nach oben, die positiven $x$ aber immer so annehmen, dass, wenn man sich durch den Ausgangspunkt des Strahls ein dem primitiven Systeme der $xy$ paralleles Coordinatensystem gelegt dächte, in diesem Systeme der positive Theil der ersten Coordinatenaxe mit dem Strahle auf einer und derselben Seite der zweiten Coordinatenaxe liegen würde, welcher Voraussetzung offenbar die Fälle Taf. VI. Fig. 1. und Taf. VI. Fig. 2. entsprechen, so dass man also unter dieser Voraussetzung nach dem Vorhergehenden die beiden Gleichungen

$$1)\quad L \sin Z = \mu$$

und

$$2)\quad tang\, Z = \mp \frac{\partial x}{\partial y}$$

hat, wo man in der Gleichung 2) das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem der Strahl nach und nach aus den oberen Schichten in die unteren Schichten, oder aus den unteren Schichten in die oberen Schichten tritt, was von nun an im Folgenden stets festgehalten werden soll.

## §. 3.

Weil nach 2), indem immer die wegen der Vorzeichen gegebene Bestimmung festgehalten wird,

$$tang\, Z = \mp \frac{\partial x}{\partial y},$$

und nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\sin Z^2 = \frac{\tang Z^2}{1 + \tang Z^2}$$

ist, so ist

$$\sin Z^2 = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

also, weil $\sin Z$ immer positiv ist:

$$3)\quad \sin Z = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}.$$

Weil ferner bekanntlich

$$\cos Z = \frac{\sin Z}{\tang Z}$$

ist, so ist

$$4)\quad \cos Z = \mp \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}},$$

wo, wie immer, das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem der Strahl aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt.

Auch ist unmittelbar nach 2)

$$5)\quad \cot Z = \mp \frac{\partial y}{\partial x},$$

immer mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen.

Weil nun aber nach 1) allgemein

$$L \sin Z = \mu$$

ist, so ist nach 3)

$$6)\quad \frac{L}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} = \mu.$$

Bezeichnen wir jetzt die Dichtigkeit der Luft in der dem Endpunkte der vertikalen Coordinate $y$ entsprechenden horizontalen Schicht durch $\mathfrak{D}_y$, so ist nach §. 1. 3.

$$7)\quad L = \sqrt{1 + K\mathfrak{D}_y},$$

wo die numerische Constante $K$ den in §. 1. angegebenen Werth hat. Also ist

$$8)\ \frac{\sqrt{1 + K\mathfrak{D}y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} = \mu,$$

oder

$$9)\ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{1}{\mu}\sqrt{1 + K\mathfrak{D}_y},$$

folglich

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{1 + K\mathfrak{D}_y}{\mu^2},$$

woraus

$$10)\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{1 - \mu^2}{\mu^2} + \frac{K}{\mu^2}\mathfrak{D}_y,$$

oder, wenn man

$$11)\ \mathfrak{A} = \frac{1 - \mu^2}{\mu^2},\quad \mathfrak{B} = \frac{k}{\mu^2}$$

setzt, wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Constanten sind:

$$12)\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_y$$

folgt. Nach dem Obigen ist aber

$$\cot Z = \mp\frac{\partial y}{\partial x},\ \text{also}\ \cot Z^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2;$$

folglich

$$\cot Z^2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_y,$$

woraus, weil $Z$ ein spitzer Winkel und daher $\cot Z$ positiv ist,

$$13)\ \cot Z = \sqrt{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_y}$$

folgt. Also ist nach dem Vorhergehenden mit der gewöhnlichen Bestimmung wegen der Vorzeichen

$$\mp\frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_y}$$

oder

$$14)\ \frac{\partial y}{\partial x} = \mp\sqrt{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_y}.$$

Setzen wir nun

$$15)\ \mathfrak{D}_y = \mathfrak{D}_{\mathfrak{y}} + D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} \text{ oder } D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} = \mathfrak{D}_y - \mathfrak{D}_{\mathfrak{y}},$$

wo $D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}$ die Veränderung bezeichnet, welche die Dichtigkeit der Luft von der dem Ausgangspunkte des Strahls entsprechenden horizontalen Schicht bis zu der dem Endpunkte des Strahls entsprechenden horizontalen Schicht erleidet, und demzufolge natürlich positiv und negativ sein kann, auch

$$16)\ D^{(\mathfrak{y})}_{(\mathfrak{y})} = 0$$

ist; so ist

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_y = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}} + \mathfrak{B}D^{(y)}_{(\mathfrak{y})},$$

oder, wenn wir den Ausgangspunkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ des Strahls als gegeben oder constant, demzufolge natürlich auch $\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}$ als constant betrachten, und der Kürze wegen

$$17)\ A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}},\quad B = \mathfrak{B}$$

setzen, wo $A$ und $B$ Constanten bezeichnen,

$$18)\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_y = A + BD^{(y)}_{(\mathfrak{y})},$$

also nach 14):

$$19)\ \frac{\partial y}{\partial x} = \mp\sqrt{A + BD^{(y)}_{(\mathfrak{y})}},$$

oder

$$20)\ \frac{\partial x}{\partial y} = \mp\frac{1}{\sqrt{A + BD^{(y)}_{(\mathfrak{y})}}},$$

oder

$$21)\ \partial x = \mp\frac{\partial y}{\sqrt{A + BD^{(y)}_{(\mathfrak{y})}}},$$

welche Form der Gleichung den sogleich von selbst ersichtlichen Vortheil darbietet, dass $x$ bloss durch $y$ ausgedrückt ist, oder dass in derselben die veränderlichen Grössen gesondert sind.

## §. 4.

Wir wollen nun auch den zweiten Differentialquotienten entwickeln, weil wir von demselben späterhin Gebrauch zu machen Gelegenheit haben werden.

Nach 12) ist

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_\gamma,$$

also, wenn man differentiirt:

$$2\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mathfrak{B}\frac{\partial \mathfrak{D}_\gamma}{\partial x},$$

folglich

$$22)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\mathfrak{B}\left\{\frac{\partial \mathfrak{D}_\gamma}{\partial x} : \frac{\partial y}{\partial x}\right\} = {}^1/_2\, B\left\{\frac{\partial \mathfrak{D}_\gamma}{\partial x} : \frac{\partial y}{\partial x}\right\},$$

oder nach einem bekannten Princip der Differentialrechnung:

$$23)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\,\mathfrak{B}\frac{\partial \mathfrak{D}_\gamma}{\partial y} = {}^1/_2\, B\frac{\partial \mathfrak{D}_\gamma}{\partial y}.$$

Ferner ist nach 19)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = A + B D^{(\gamma)}_{(\mathfrak{y})},$$

also, wenn man differentiirt:

$$2\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = B\frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\mathfrak{y})}}{\partial x},$$

folglich

$$24)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\, B\left\{\frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\mathfrak{y})}}{\partial x} : \frac{\partial y}{\partial x}\right\} = {}^1/_2\,\mathfrak{B}\left\{\frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\mathfrak{y})}}{\partial x} : \frac{\partial y}{\partial x}\right\},$$

oder nach dem schon vorher angewandten Princip der Differentialrechnung:

$$25)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\, B\frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\mathfrak{y})}}{\partial y} = {}^1/_2\,\mathfrak{B}\frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\mathfrak{y})}}{\partial y}.$$

§. 5.

Zuvörderst ist nun nöthig, dass wir uns mit der weiteren Entwickelung und Bestimmung der Constanten $A$, $B$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ beschäftigen.

Setzen wir allgemein

$$26)\quad y = \varphi(x),\ \text{also}\ \frac{\partial y}{\partial x} = \varphi'(x);$$

so ist nach 19)

$$\varphi'(x) = \mp\sqrt{A + BD_{(\mathfrak{y})}^{(y)}},$$

also

$$(\varphi'(x))^2 = A + BD_{(\mathfrak{y})}^{(y)},$$

und folglich, wenn man gleichzeitig, wie es erforderlich ist, $\mathfrak{x}$ für $x$ und $\mathfrak{y}$ für $y$ setzt:

$$(\varphi'(\mathfrak{x}))^2 = A + BD_{(\mathfrak{y})}^{(\mathfrak{y})},$$

woraus sich nach 16)

$$27)\ A = (\varphi'(\mathfrak{x}))^2$$

ergiebt, und zugleich erhellet, dass die Constante $A$ positiv ist.

Weil nach 11)

$$\mathfrak{A} = \frac{1-\mu^2}{\mu^2},\quad \mathfrak{B} = \frac{K}{\mu^2}$$

ist, so ist

$$\mu^2 = \frac{1}{1+\mathfrak{A}},$$

und folglich

$$\mathfrak{B} = B = K(1+\mathfrak{A}).$$

Ferner ist nach 17)

$$\mathfrak{A} = A - \mathfrak{B}\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}} = A - B\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$B = K(1 + A - B\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}),$$

woraus

$$B = \frac{K(1+A)}{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}},$$

also nach 27)

$$28)\ B = \frac{K\{1+(\varphi'(\mathfrak{x}))^2\}}{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}$$

folgt, und zugleich erhellet, dass auch die Constante $B$ positiv ist.

Setzt man der Kürze wegen

$$29)\ \omega = \varphi'(\mathfrak{x}),\ \overline{\omega} = \sqrt{\frac{K}{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}};$$

welches Letztere verstattet ist, da die Grösse

$$\frac{K}{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}$$

offenbar positiv ist, da $K$ und $\mathfrak{D}_\mathfrak{y}$ positive Grössen sind; so ist

$$30)\ \omega = \varphi'(\mathfrak{x}),\ \overline{\omega}^2 = \frac{K}{1+K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}};$$

folglich nach 27) und 28)

$$31)\ A = \omega^2,\ B = (1+\omega^2)\overline{\omega}^2;$$

und daher nach 19), 20), 21):

$$32)\ \varphi'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = \mp\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}},$$

oder

$$33)\ \frac{\partial x}{\partial y} = \mp\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}}},$$

oder

$$34)\ \partial x = \mp\frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}}}.$$

Nach 25) und 26) ist:

$$35)\ \varphi''(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1\!/_2\,(1+\omega^2)\overline{\omega}^2\frac{\partial D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}}{\partial y}.$$

Weil nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{A} = A - B\mathfrak{D}_\mathfrak{y}$$

ist, so ist

$$\mathfrak{A} = \omega^2 - (1+\omega^2)\overline{\omega}^2\mathfrak{D}_\mathfrak{y} = \omega^2 - (1+\omega^2)\frac{K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}{1+K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}},$$

d. i.

$$\mathfrak{A} = \frac{\omega^2 - K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}{1+K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}},$$

oder

$$36)\ \mathfrak{A} = \frac{(\varphi'(\mathfrak{x}))^2 - K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}{1+K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}.$$

Aus der Gleichung

$$\overline{\omega}^2 = \frac{K}{1+K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}$$

folgt auch

$$37)\ \mathfrak{D}_\mathfrak{y} = \frac{K-\overline{\omega}^2}{K\overline{\omega}^2},$$

also ist nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{A} = \omega^2 - (1+\omega^2)\varpi^2 \frac{K - \varpi^2}{K\varpi^2},$$

oder

$$\mathfrak{A} = \omega^2 - (1+\omega^2) \frac{K - \varpi^2}{K},$$

d. i., wie man leicht findet:

$$38)\quad \mathfrak{A} = \frac{(1+\omega^2)\varpi^2 - K}{K} = \frac{(1+\omega^2)\varpi^2}{K} - 1.$$

Ferner ist

$$39)\quad \mathfrak{B} = B = (1+\omega^2)\varpi^2.$$

Weil nach 38)

$$1 + \mathfrak{A} = \frac{(1+\omega^2)\varpi^2}{K},$$

und nach dem Obigen

$$\mu^2 = \frac{1}{1+\mathfrak{A}}$$

ist, so ist

$$\mu^2 = \frac{K}{(1+\omega^2)\varpi^2},$$

also, weil $\mu = L \sin Z$ offenbar eine positive Grösse, und nach dem Obigen auch $\varpi$ positiv ist:

$$40)\quad \mu = \frac{\sqrt{K}}{\varpi\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{1}{\varpi}\sqrt{\frac{K}{1+\omega^2}}.$$

Führt man für $\omega$ und $\varpi$ ihre aus dem Obigen bekannten Werthe ein, so wird

$$41)\quad \mu = \sqrt{\frac{1 + K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}{1 + (\varphi'(\mathfrak{x}))^2}}.$$

§. 6.

Bezeichnen wir den spitzen Neigungswinkel der Berührenden der Trajectoria in dem Ausgangspunkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ des Strahls gegen den Horizont, indem wir diesen Winkel als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem der Strahl aus den unteren in die oberen oder aus den oberen in die unteren Schichten tritt, durch $i$; so ist offenbar, indem die Zeichen immer wie oben genommen werden:

$$\mathfrak{Z} = 90^0 \pm i,$$

also

$$\cot \mathfrak{Z} = \cot(90^0 \pm i) = \mp \tan i.$$

Weil nun nach 5) und 26)

$$\cot Z = \mp \frac{\partial y}{\partial x} = \mp \varphi'(x),$$

also

$$\cot \mathfrak{Z} = \mp \varphi'(\mathfrak{x})$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden allgemein

$$42)\ \tan i = \varphi'(\mathfrak{x}),$$

d. i. nach 30)

$$43)\ \omega = \tan i.$$

Folglich ist $1 + \omega^2 = \sec i^2$, und daher nach 32)

$$44)\ \frac{\partial y}{\partial x} = \mp \sqrt{\tan i^2 + \varpi^2 \sec i^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}},$$

d. i., weil *cos i* jedenfalls positiv ist:

$$45)\ \frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{\sqrt{\sin i^2 + \varpi^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}}{\cos i},$$

oder

$$46)\ \frac{\partial y}{\partial x} = \mp \sec i \sqrt{\sin i^2 + \varpi^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}.$$

Auch ist

$$47)\ \frac{\partial x}{\partial y} = \mp \frac{\cos i}{\sqrt{\sin i^2 + \varpi^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}},$$

oder

$$48)\ \partial x = \mp \frac{\cos i \,\partial y}{\sqrt{\sin i^2 + \varpi^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}}.$$

Weil nach dem Obigen, jenachdem der Strahl aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt, *sin i* negativ oder positiv ist, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\partial x = \frac{\cos i \,\partial y}{\sin i \sqrt{1 + \varpi^2 \operatorname{cosec} i^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}},$$

d. i.

$$49)\ \partial x = \frac{\cot i \,\partial y}{\sqrt{1 + \varpi^2 \operatorname{cosec} i^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}}.$$

Führt man für $\varpi^2$ seinen bekannten Werth in die vorhergehenden Formeln ein, so wird

$$50)\ \frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{\sqrt{\sin i^2 + \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}} D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}}{\cos i},$$

oder

$$51)\ \frac{\partial y}{\partial x} = \mp \sec i \sqrt{\sin i^2 + \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}} D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}};$$

ferner

$$52)\ \frac{\partial x}{\partial y} = \mp \frac{\cos i}{\sqrt{\sin i^2 + \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}} D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}},$$

oder

$$53)\ \partial x = \mp \frac{\cos i\, \partial y}{\sqrt{\sin i^2 + \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}} D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}},$$

oder

$$54)\ \partial x = \frac{\cot i\, \partial y}{\sqrt{1 + \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}} \operatorname{cosec} i^2\, D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}}.$$

Auch ist nach 31)

$$55)\ A = \tang i^2,\ B = \sec i^2 \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}$$

oder

$$56)\ A = \tang i^2,\ B = \frac{K \sec i^2}{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}} = \frac{K}{(1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}) \cos i^2}.$$

Ferner ist nach 38)

$$57)\ \mathfrak{A} = \frac{\sec i^2}{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}} - 1 = \frac{1}{(1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}) \cos i^2} - 1$$

oder

$$58)\ \mathfrak{A} = \frac{\tang i^2 - K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}} = \frac{\sin i^2 - K\mathfrak{D}_\mathfrak{y} \cos i^2}{(1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}) \cos i^2}$$

und nach 39)

$$59)\ \mathfrak{B} = \frac{K \sec i^2}{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}} = \frac{K}{(1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}) \cos i^2}.$$

## §. 7.

In Betreff des zweiten Differentialquotienten bemerken wir noch Folgendes.

Nach 23) und 25) ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\, B \frac{\partial \mathfrak{D}_\gamma}{\partial y} = {}^1/_2\, B \frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\eta)}}{\partial y}.$$

Also ist

$$60)\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\,(1+\omega^2)\,\varpi^2 \frac{\partial \mathfrak{D}_\gamma}{\partial y} = {}^1/_2\,(1+\omega^2)\,\varpi^2 \frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\eta)}}{\partial y},$$

oder

$$61)\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\,\varpi^2 \sec i^2 \frac{\partial \mathfrak{D}_\eta}{\partial y} = {}^1/_2\,\varpi^2 \sec i^2 \frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\eta)}}{\partial y},$$

oder

$$62)\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{K \sec i^2}{2(1+K\mathfrak{D}_\eta)} \cdot \frac{\partial \mathfrak{D}_\gamma}{\partial y} = \frac{K \sec i^2}{2(1+K\mathfrak{D}_\eta)} \cdot \frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\eta)}}{\partial y},$$

oder

$$63)\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{K}{2(1+K\mathfrak{D}_\gamma)\cos i^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{D}_\gamma}{\partial y} = \frac{K}{2(1+K\mathfrak{D}_\gamma)\cos i^2} \cdot \frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\eta)}}{\partial y}.$$

Weil $B = (1 + \omega^2)\varpi^2$ positiv ist, so hat

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

gleiches Vorzeichen mit

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_\gamma}{\partial y} \text{ oder } \frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\eta)}}{\partial y}.$$

## §. 8.

So lange

$$\omega^2 + (1+\omega^2)\,\varpi^2 D^{(\gamma)}_{(\eta)} > 0,$$

d. i.

$$D^{(\gamma)}_{(\eta)} > -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\varpi^2}$$

ist, ist nach dem Obigen $\frac{\partial y}{\partial x}$, d. i.

$$\cot Z = \mp \frac{\partial y}{\partial x},$$

und also auch $Z$ reell.

Wenn

$$\omega^2 + (1+\omega^2)\,\varpi^2 D^{(y)}_{(\mathfrak{v})} = 0,$$

d. i.

$$D^{(y)}_{(\mathfrak{v})} = -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\varpi^2}$$

ist, so ist nach dem Obigen $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, also

$$\cot Z = 0,\; Z = 90^0;$$

d. h. die Berührende der Trajectoria in dem Punkte $(xy)$ schliesst mit der Axe der $y$ einen rechten Winkel ein, und ist folglich horizontal.

So lange

$$\omega^2 + (1+\omega^2)\,\varpi^2 D^{(y)}_{(\mathfrak{v})} < 0,$$

d. i.

$$D^{(y)}_{(\mathfrak{v})} < -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\varpi^2}$$

ist, ist nach dem Obigen $\frac{\partial y}{\partial x}$, d. i.

$$\cot Z = \mp \frac{\partial y}{\partial x},$$

und also auch $Z$ imaginär.

Weil nach dem Obigen bekanntlich

$$\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\varpi^2} = \frac{\tang i^2}{\varpi^2 \sec i^2} = \frac{\sin i^2}{\varpi^2} = \frac{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{v}}}{K}\sin i^2$$

ist, so sind die vorhergehenden Bedingungen

$$D^{(y)}_{(\mathfrak{v})} \gtreqless -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\varpi^2}$$

einerlei mit den Bedingungen

$$D^{(y)}_{(\mathfrak{v})} \gtreqless -\frac{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{v}}}{K}\sin i^2,$$

d. i., weil

$$-\frac{K}{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}$$

negativ ist, einerlei mit den Bedingungen

$$-\frac{K}{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}\,D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} \lesseqqgtr \sin i^2,$$

oder

$$\sin i^2 \gtreqqless -\frac{K}{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}\,D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}.$$

Weil nach dem Obigen bekanntlich

$$D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} = \mathfrak{D}_y - \mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}$$

ist, so kann man statt der Bedingungen

$$D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} \gtreqqless -\frac{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}{K}\sin i^2$$

auch setzen

$$\mathfrak{D}_y - \mathfrak{D}_{\mathfrak{y}} \gtreqqless -\frac{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}{K}\sin i^2,$$

oder

$$\mathfrak{D}_y \gtreqqless \mathfrak{D}_{\mathfrak{y}} - \frac{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}{K}\sin i^2,$$

oder

$$\mathfrak{D}_y \gtreqqless -\frac{\sin i^2 - K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}\cos i^2}{K};$$

und statt der Bedingungen

$$\sin i^2 \gtreqqless -\frac{K}{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}\,D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}$$

kann man setzen:

$$\sin i^2 \gtreqqless -\frac{K(\mathfrak{D}_y - \mathfrak{D}_{\mathfrak{y}})}{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}.$$

Rücksichtlich der Bedingungen

$$\mathfrak{D}_y \gtreqqless -\frac{\sin i^2 - K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}\cos i^2}{K}$$

kann man aber auch noch bemerken, dass dieselben einerlei sind mit den Bedingungen

$$K\mathfrak{D}_y \gtreqless K\mathfrak{D}_\mathfrak{y} \cos i^2 - \sin i^2,$$

oder

$$1 + K\mathfrak{D}_y \gtreqless (1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}) \cos i^2,$$

oder

$$\frac{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}{1 + K\mathfrak{D}_y} \cos i^2 \lesseqgtr 1,$$

oder

$$\frac{\sqrt{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}}{\sqrt{1 + K\mathfrak{D}_y}} \cos i \lesseqgtr 1;$$

d. i., weil nach 7)

$$L = \sqrt{1 + K\mathfrak{D}_y}, \quad \mathfrak{L} = \sqrt{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}$$

und nach §. 6.

$$\mathfrak{Z} = 90^0 \pm i, \text{ also } \sin \mathfrak{Z} = \cos i$$

ist, einerlei mit den Bedingungen

$$\frac{\mathfrak{L}}{L} \sin \mathfrak{Z} \lesseqgtr 1,$$

also, weil bekanntlich

$$L \sin Z = \mathfrak{L} \sin \mathfrak{Z}$$

ist, einerlei mit den Bedingungen

$$\sin Z \lesseqgtr 1.$$

## §. 9.

Ein Uebergang von

$$\omega^2 + (1 + \omega^2)\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} > 0$$

zu

$$\omega^2 + (1 + \omega^2)\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} < 0,$$

oder von

$$D_{(\eta)}^{(\gamma)} > -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}$$

zu

$$D_{(\eta)}^{(\gamma)} < -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\overline{\omega}^2},$$

d. h. nach dem vorhergehenden Paragraphen ein Uebergang von der Möglichkeit der Trajectoria zu einer Unmöglichkeit derselben, kann, eine stetige Veränderung von $D_{(\eta)}^{(\gamma)}$ vorausgesetzt, immer nur durch

$$\omega^2 + (1+\omega^2)\overline{\omega}^2 D_{(\eta)}^{(\gamma)} = 0$$

oder durch

$$D_{(\eta)}^{(\gamma)} = -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}$$

vor sich gehen. Dann ist aber nach dem vorhergehenden Paragraphen die Berührende der Trajectoria in dem entsprechenden Punkte $(xy)$ horizontal, und der Strahl kann also gar nicht weiter nach oben oder nach unten hin in der Atmosphäre vordringen, sondern wird sich von dem in Rede stehenden Punkte an fortwährend nach einer dem Horizonte parallelen Richtung bewegen; er kann jedoch, wenn man sich denkt, dass seine Neigung gegen den Horizont gewissermassen nur unendlich klein geworden sei, durch eine Reflexion an den betreffenden Schichten der Atmosphäre wieder nach unten oder nach oben gebeugt werden, und wird dann einen zweiten Zweig der Trajectoria beschreiben, welcher dem vor der erlittenen Reflexion beschriebenen ersten Zweige offenbar vollkommen symmetrisch ist, d. h. durch Umdrehung des ersten Zweigs um eine gewisse vertikale, auf der Axe der $x$ also senkrecht stehende oder der Axe der $y$ parallele gerade Linie, welche die Axe der Trajectoria genannt werden soll, entstanden gedacht werden kann. Dieser zweite Zweig der Trajectoria, insofern es einen solchen giebt, was jederzeit besonders ermittelt werden muss, indem man untersucht, ob $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ werden kann, soll im Gegensatz zu dem ersten vor der erlittenen Reflexion beschriebenen Zweige, den wir den directen Zweig nennen wollen, der reflectirte Zweig der Trajectoria genannt werden, und nur wenn ein solcher reflectirter Zweig existirt, findet eine eigentliche Luftspiegelung Statt. Den Ausgangspunkt $(xy)$ des Strahls sieht jedes

in dem directen Zweige der Trajectoria befindliche Auge direct, jedes in dem reflectirten Zweige befindliche Auge dagegen durch Luftspiegelung.

Bezeichnen wir die primitiven Coordinaten des Punktes der Trajectoria, in welchem $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ wird oder die Berührende der Trajectoria der Axe der $x$ parallel ist, also nach dem Vorhergehenden eine Luftspiegelung Statt findet, welcher Punkt etwa der Scheitel der Trajectoria genannt werden mag, wenn es nämlich überhaupt einen solchen Punkt giebt, durch $\xi$, $\eta$, und legen durch diesen Punkt $(\xi\eta)$ ein dem primitiven Systeme der $xy$ paralleles Coordinatensystem der $XY$; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten allgemein

$$x = \xi + X,\ y = \eta + Y.$$

Unterscheiden wir jetzt den directen und reflectirten Zweig von einander, und bezeichnen deshalb die Coordinaten der Punkte im ersten durch Hinzufügung oberer Accente, die Coordinaten der Punkte im zweiten durch Hinzufügung unterer Accente zu den allgemeinen Symbolen der Coordinaten; so ist nach dem Obigen für den directen Zweig

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(\eta)}^{(y')}}.$$

Weil aber nach dem Vorhergehenden

$$x' = \xi + X',\ y' = \eta + Y'$$

ist, so ist

$$\partial x' = \partial X',\ \partial y' = \partial Y',\ \frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{\partial Y'}{\partial X'};$$

also

$$\frac{\partial Y'}{\partial X'} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(\eta)}^{(\eta+Y')}},$$

oder auch in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$\frac{\partial Y'}{\partial X'} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(\eta+Y')}^{(\eta+Y')}},$$

die Vorzeichen immer nach der aus dem Obigen bekannten Regel genommen.

Wegen der Symmetrie des directen und reflectirten Zweigs ist aber allgemein

$$X' = -X_1, \quad Y' = Y_1;$$

also

$$\partial X' = -\partial X_1, \quad \partial Y' = \partial Y_1, \quad \frac{\partial Y'}{\partial X'} = -\frac{\partial Y_1}{\partial X_1};$$

und es ist folglich für den reflectirten Zweig

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = \pm\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(\eta+Y_1)}_{(\eta)}}$$

oder

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = \pm\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(\eta+Y_1)}_{(\eta+\vartheta_1)}},$$

die Vorzeichen nach der bekannten Regel genommen.

Führen wir nun wieder die allgemeinen Symbole der Coordinaten ein, so ist für den directen Zweig:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \mp\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(\eta+Y)}_{(\eta)}}$$

oder

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \mp\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(\eta+Y)}_{(\eta+\vartheta)}},$$

und für den reflectirten Zweig:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \pm\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(\eta+Y)}_{(\eta)}}$$

oder

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \pm\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(\eta+Y)}_{(\eta+\vartheta)}}.$$

Weil nun allgemein

$$x = \xi + X, \quad y = \eta + Y;$$

also

$$\partial x = \partial X, \; \partial y = \partial Y, \; \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial X}$$

ist; so ist für den directen Zweig:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(y)}_{(\eta)}}',$$

und für den reflectirten Zweig:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\varpi^2 D^{(y)}_{(\eta)}}.$$

Beide Zweige lassen sich aber auch unter der allgemeinen Gleichung

$$64)\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D^{(y)}_{(\eta)}},$$

oder für das System der $XY$ unter der allgemeinen Gleichung

$$65)\quad \frac{\partial Y}{\partial X} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D^{(\eta+Y)}_{(\eta+\vartheta)}}$$

zusammenfassen, wenn man nur festsetzt, dass in diesen Gleichungen die Quadratwurzel für den directen Zweig stets positiv, für den reflectirten Zweig stets negativ genommen werden soll.

Völlig allgemein ist auch für die ganze aus den beiden Zweigen bestehende stetige Curve

$$66)\quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D^{(y)}_{(\eta)}$$

oder

$$67)\quad \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^2 = \omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D^{(\eta+Y)}_{(\eta+\vartheta)},$$

wobei sich von selbst versteht, dass die zweite dieser beiden Gleichungen überhaupt nur gilt, wenn es einen reflectirten Zweig wirklich giebt, was jederzeit besonders untersucht werden muss.

Durch Differentiation der Gleichung 66) erhält man

$$2\,\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (1+\omega^2)\varpi^2\,\frac{\partial D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial x},$$

also

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\,(1+\omega^2)\varpi^2 \left\{\frac{\partial D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial x} : \frac{\partial y}{\partial x}\right\},$$

d. i.

$$68)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\,(1+\omega^2)\varpi^2\,\frac{\partial D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial y}.$$

Durch Differentiation der Gleichung 67) ergiebt sich

$$2\,\frac{\partial Y}{\partial X}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}=(1+\omega^2)\overline{\omega}^2\,\frac{\partial D_{(\eta+\mathfrak{Y})}^{(\eta+Y)}}{\partial X},$$

also

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}=\tfrac{1}{2}(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\left\{\frac{\partial D_{(\eta+\mathfrak{Y})}^{(\eta+Y)}}{\partial X}:\frac{\partial Y}{\partial X}\right\},$$

d. i.

$$69)\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}=\tfrac{1}{2}(1+\omega^2)\overline{\omega}^2\,\frac{\partial D_{(\eta+\mathfrak{Y})}^{(\eta+Y)}}{\partial Y}.$$

§. 10.

Wenn weder $y$ noch $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ verschwindet, so ist nach der allgemeinen Theorie der Curven *) die Trajectoria in dem Punkte $(xy)$ gegen die horizontale Axe der $x$ concav oder convex, jenachdem $y$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben. Weil aber nach 60)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\tfrac{1}{2}(1+\omega^2)\overline{\omega}^2\frac{\partial \mathfrak{D}_Y}{\partial y}$$

ist, so kann man dies offenbar auch auf folgende Art ausdrücken:

Wenn weder $y$ noch $\frac{\partial \mathfrak{D}_Y}{\partial y}$ verschwindet, so ist die Trajectoria in dem Punkte $(xy)$ gegen die horizontale Axe der $x$ concav oder convex, jenachdem $y$ und $\frac{\partial \mathfrak{D}_Y}{\partial y}$ ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben, d. h. jenachdem, wenn $y$ zu- oder abnimmt, die Dichtigkeit $\mathfrak{D}_Y$ der Luft respective ab- oder zunimmt, oder zu- oder abnimmt.

Ferner leitet man aus der Lehre von der Concavität und Convexität in der allgemeinen Theorie der Curven und aus der Gleichung 60) auch leicht noch die folgenden Sätze ab:

Wenn $y$ verschwindet, aber weder $\frac{\partial y}{\partial x}$, noch $\frac{\partial \mathfrak{D}_Y}{\partial y}$

*) M. s. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung. Erster Theil. Leipzig. 1837. S. 276 ff.

verschwindet, so ist die Trajectoria in dem Punkte $(xy)$ nach der Seite der positiven $x$ hin concav oder convex, jenachdem $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial \mathfrak{D}_\gamma}{\partial y}$ ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

Wenn $y$ und $\frac{\partial y}{\partial x}$ verschwinden, aber $\frac{\partial \mathfrak{D}_\gamma}{\partial y}$ nicht verschwindet, so ist die Trajectoria in dem Punkte $(xy)$ nach der Seite der positiven $y$ hin concav oder convex, jenachdem $\frac{\partial \mathfrak{D}_\gamma}{\partial y}$ positiv oder negativ ist.

## §. 11.

Nach 64) ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D^{(\gamma)}_{(\eta)}},$$

wenn man nur die Quadratwurzel für den directen Zweig positiv, für den reflectirten Zweig negativ nimmt. Also ist

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = (1+\omega^2)(1+\varpi^2 D^{(\gamma)}_{(\eta)}),$$

und folglich

$$\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= \mp(1+\omega^2)(1+\varpi^2 D^{(\gamma)}_{(\eta)})\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D^{(\gamma)}_{(\eta)}},$$

immer mit derselben Bestimmung wegen der Quadratwurzel wie vorher. Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises der Trajectoria in dem Punkte $(xy)$ durch $\alpha, \beta$; so ist nach bekannten Formeln aus der Lehre vom Krümmungskreise:

$$70)\left\{\begin{aligned} \alpha &= x \pm \frac{2(1+\varpi^2 D^{(\gamma)}_{(\eta)})\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D^{(\gamma)}_{(\eta)}}}{\varpi^2 \frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\eta)}}{\partial y}}, \\ \beta &= y + \frac{2(1+\varpi^2 D^{(\gamma)}_{(\eta)})}{\varpi^2 \frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\eta)}}{\partial y}}. \end{aligned}\right.$$

Weil $\beta$ von $\omega = tang\, i$ gar nicht abhängt, so erhellet, dass für alle einen gemeinschaftlichen Ausgangspunkt habende, aber verschiedenen Werthen von $i$ entsprechende Trajectorien die Mittelpunkte der, gleiche zweite Coordinaten habenden und daher in einer der horizontalen Axe der $x$ parallelen geraden Linie liegenden Punkten dieser Trajectorien entsprechenden Krümmungskreise auch sämmtlich in einer der horizontalen Axe der $x$ parallelen geraden Linie liegen, oder dass der geometrische Ort der Mittelpunkte dieser Krümmungskreise jederzeit eine horizontale gerade Linie ist.

Für den Halbmesser $\varrho$ des dem Punkte $(xy)$ der Trajectoria entsprechenden Krümmungskreises erhält man sehr leicht den folgenden Ausdruck:

$$71)\quad \varrho = (\pm)\frac{2\left(1+\varpi^2 D_{(\eta)}^{(y)}\right)\sqrt{(1+\omega^2)\left(1+\varpi^2 D_{(\eta)}^{(y)}\right)}}{\varpi^2 \frac{\partial D_{(\eta)}^{(y)}}{\partial y}},$$

wo das eingeklammerte Zeichen jederzeit so genommen werden muss, dass $\varrho$, wie es seiner Natur nach sein muss, eine positive Grösse wird.

Die vorhergehenden Formeln weiter umzugestalten, was nach den obigen Vorbereitungen keine Schwierigkeit haben würde, wollen wir der Kürze wegen unterlassen.

Für die Coordinaten $x_1$, $y_1$ der Punkte der Evolute der Trajectoria hat man bekanntlich die Ausdrücke:

$$72)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x \pm \frac{2\left(1+\varpi^2 D_{(\eta)}^{(y)}\right)\sqrt{\omega^2+(1+\omega^2)\varpi^2 D_{(\eta)}^{(y)}}}{\varpi^2 \frac{\partial D_{(\eta)}^{(y)}}{\partial y}}, \\ y_1 &= y + \frac{2\left(1+\varpi^2 D_{(\eta)}^{(y)}\right)}{\varpi^2 \frac{\partial D_{(\eta)}^{(y)}}{\partial y}}; \end{aligned}\right.$$

aus welchen zwei Gleichungen man $x$ und $y$ eliminiren muss, um die Gleichung der Evolute zwischen $x_1$ und $y_1$ zu erhalten.

§. 12.

Wenn die Gleichung $y=\varphi(x)$ der Trajectoria gegeben ist, so kann man $D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}$ finden. Denn es ist nach 66) in völliger Allgemeinheit

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\omega^2+(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\,D^{(y)}_{(\mathfrak{y})},$$

d. i.

$$(\varphi'(x))^2=\omega^2+(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\mathfrak{y})},$$

oder, weil bekanntlich nach 29)

$$\omega=\varphi'(\mathfrak{x})$$

ist:

$$(\varphi'(x))^2=(\varphi'(\mathfrak{x}))^2+\{1+(\varphi'(\mathfrak{x}))^2\}\,\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\mathfrak{y})},$$

also

$$73)\quad D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}=\frac{(\varphi'(x))^2-(\varphi'(\mathfrak{x}))^2}{\{1+(\varphi'(\mathfrak{x}))^2\}\,\overline{\omega}^2},$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\overline{\omega}^2=\frac{K}{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}$$

ist:

$$74)\quad D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}=\frac{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}{K}\cdot\frac{(\varphi'(x))^2-(\varphi'(\mathfrak{x}))^2}{1+(\varphi'(\mathfrak{x}))^2},$$

durch welche Formel $D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}$ als Function von $x$ dargestellt ist.

Weil bekanntlich

$$\mathfrak{D}_y=\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}+D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}$$

ist, so ist auch

$$75)\quad \mathfrak{D}_y=\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}+\frac{1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}{K}\cdot\frac{(\varphi'(x))^2-(\varphi'(\mathfrak{x}))^2}{1+(\varphi'(\mathfrak{x}))^2},$$

oder

$$76)\quad \mathfrak{D}_y=\frac{1}{K}\cdot\frac{(\varphi'(x))^2-(\varphi'(\mathfrak{x}))^2}{1+(\varphi'(\mathfrak{x}))^2}+\frac{1+(\varphi'(x))^2}{1+(\varphi'(\mathfrak{x}))^2}\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}},$$

oder

$$77)\quad \mathfrak{D}_y=\frac{(\varphi'(x))^2-(\varphi'(\mathfrak{x}))^2+K\{1+(\varphi'(x))^2\}\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}{K\{1+(\varphi'(\mathfrak{x}))^2\}},$$

oder

$$78)\ \mathfrak{D}_y = \frac{K\mathfrak{D}_\mathfrak{y} - (\varphi'(\mathfrak{x}))^2 + (1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y})(\varphi'(x))^2}{K\{1 + (\varphi'(\mathfrak{x}))^2\}}.$$

Mittelst dieser Formeln kann man die Dichtigkeit der Luft, und also auch deren Gesetz bestimmen, wenn man die Gestalt der Trajectoria kennt.

Setzt man nach 42)

$$\varphi'(\mathfrak{x}) = tang\, i,$$

so wird nach dem Vorhergehenden

$$79)\ D_{(\mathfrak{y})}^{(y)} = \frac{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}{K} \cdot \frac{(\varphi'(x))^2 - tang\, i^2}{sec\, i^2},$$

oder

$$80)\ D_{(\mathfrak{y})}^{(y)} = -\frac{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}{K}\{sin\, i^2 - (\varphi'(x))^2 cos\, i^2\}.$$

Ferner ist

$$81)\ \mathfrak{D}_y = \mathfrak{D}_\mathfrak{y} - \frac{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}{K}\{sin\, i^2 - (\varphi'(x))^2 cos\, i^2\},$$

d. i., wie man leicht findet:

$$82)\ \mathfrak{D}_y = -\frac{sin\, i^2 - K\mathfrak{D}_\mathfrak{y} cos\, i^2}{K} + \frac{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}{K} cos\, i^2 (\varphi'(x))^2.$$

## §. 13.

Wenn, um zu den im vorhergehenden Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln ein Beispiel zu geben, die Trajectoria eine gerade Linie ist, so sei, da sie bekanntlich durch den Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ geht,

$$83)\ y - \mathfrak{y} = a(x - \mathfrak{x})$$

ihre Gleichung. Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a, \text{ d. i. } \varphi'(x) = a$$

und folglich auch $\varphi'(\mathfrak{x}) = a$. Daher ist nach 74)

$$D_{(\mathfrak{y})}^{(y)} = \frac{1 + K\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}{K} \cdot \frac{a^2 - a^2}{1 + a^2},$$

d. i. $D_{(\mathfrak{y})}^{(y)} = 0$ oder $\mathfrak{D}_y = \mathfrak{D}_\mathfrak{y}$. Also ist unter der Voraussetzung,

dass die Trajectoria eine gerade Linie ist, die Dichtigkeit der Luft constant, und verändert sich daher gar nicht.

Wenn, um zu den im vorhergehenden Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln ein zweites Beispiel zu geben, die Trajectoria eine Parabel mit vertikaler Axe ist, deren Axe von ihrem Scheitel aus nach oben, d. h. nach der Seite der positiven $y$ hin liegt; so seien $\alpha$, $\beta$ die Coordinaten ihres Scheitels, und $p$ sei ihr Parameter. Dann ist die Gleichung dieser Parabel in Bezug auf ihre Axe, den Scheitel als Anfang der Coordinaten genommen,

$$84)\ x_1{}^2 = py_1.$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist aber

$$x = \alpha + x_1,\ \ y = \beta + y_1;\ \text{also}\ x_1 = x - \alpha,\ \ y_1 = y - \beta;$$

folglich die Gleichung der Trajectoria im Systeme der $xy$:

$$85)\ (x-\alpha)^2 = p(y-\beta),$$

oder

$$86)\ y - \beta = \frac{(x-\alpha)^2}{p},$$

oder

$$87)\ y = \beta + \frac{\alpha^2}{p} - \frac{2\alpha}{p}x + \frac{1}{p}x^2,$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$88)\ a = \beta + \frac{\alpha^2}{p},\quad b = -\frac{2\alpha}{p},\quad c = \frac{1}{p}$$

setzen:

$$89)\ y = a + bx + cx^2.$$

Daher ist

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2,\ \ \varphi'(x) = b + 2cx;$$

also

$$\varphi'(\mathfrak{x}) = b + 2c\mathfrak{x},$$

und folglich nach 73)

$$D_{(v)}^{(y)} = \frac{(b+2cx)^2 - (b+2c\mathfrak{x})^2}{\varpi^2\{1+(b+2c\mathfrak{x})^2\}}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
&(b+2cx)^2 - (b+2c\mathfrak{x})^2 \\
&= 4c(bx+cx^2) - 4c(b\mathfrak{x}+c\mathfrak{x}^2) \\
&= 4c(a+bx+cx^2) - 4c(a+b\mathfrak{x}+c\mathfrak{x}^2) \\
&= 4c(y-\mathfrak{y}),
\end{aligned}$$

also

$$90)\quad D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} = \frac{4c(y-\mathfrak{y})}{\varpi^2\{1+(b+2c\mathfrak{x})^2\}}$$

oder

$$91)\quad D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} = \frac{4c(1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}})}{K\{1+(b+2c\mathfrak{x})^2\}}(y-\mathfrak{y}).$$

Auch ist

$$1+(b+2c\mathfrak{x})^2$$
$$= 1+b^2+4bc\mathfrak{x}+4c^2\mathfrak{x}^2 = 1+b^2-4ac+4c\mathfrak{y},$$

und daher

$$92)\quad D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} = \frac{4c(y-\mathfrak{y})}{\varpi^2(1+b^2-4ac+4c\mathfrak{y})},$$

oder

$$93)\quad D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} = \frac{4c(1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}})}{K(1+b^2-4ac+4c\mathfrak{y})}(y-\mathfrak{y}).$$

Ferner ist auch nach 88)

$$b+2c\mathfrak{x} = -\frac{2\alpha}{p}+\frac{2\mathfrak{x}}{p} = \frac{2(\mathfrak{x}-\alpha)}{p},$$

also

$$1+(b+2c\mathfrak{x})^2 = \frac{4(\mathfrak{x}-\alpha)^2+p^2}{p^2},$$

und folglich

$$\frac{4c}{1+(b+2c\mathfrak{x})^2} = \frac{4p}{4(\mathfrak{x}-\alpha)^2+p^2} = \frac{p}{(\mathfrak{x}-\alpha)^2+{}^1/_4p^2};$$

also

$$94)\quad D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} = \frac{p(y-\mathfrak{y})}{\varpi^2\{(\mathfrak{x}-\alpha)^2+{}^1/_4p^2\}},$$

oder

$$95)\quad D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} = \frac{p(1+K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}})}{K\{(\mathfrak{x}-\alpha)^2+{}^1/_4p^2\}}(y-\mathfrak{y}).$$

Bezeichnen wir nun das Stück der Normale der Trajectoria im Ausgangspunkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ des Strahls, welches zwischen diesem Punkte und der Axe der Parabel liegt, durch $N$, so ist nach der Lehre von der Parabel offenbar

$$N^2 = (\mathfrak{x}-\alpha)^2+{}^1/_4p^2,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$96)\ D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} = \frac{p}{\varpi^2 N^2}(y - \mathfrak{y})$$

oder

$$97)\ D^{(y)}_{(\mathfrak{y})} = \frac{p(1 + K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}})}{KN^2}(y - \mathfrak{y}),$$

woraus das Gesetz der Veränderung der Dichtigkeit der Luft ohne Weiteres erhellet.

Wenn die Trajectoria eine Parabel mit vertikaler Axe ist, deren Axe von ihrem Scheitel aus nach unten, d. h. nach der Seite der negativen $y$ hin liegt, und wie vorher $\alpha$, $\beta$ die Coordinaten des Scheitels sind, $p$ aber wieder den Parameter bezeichnet, so ist in Bezug auf die Axe, den Scheitel als Anfang der Coordinaten genommen, ihre Gleichung

$$98)\ x_1^2 = -py_1.$$

Hieraus sieht man, dass dieser Fall auf der Stelle aus dem vorhergehenden erhalten wird, wenn man überall $-p$ statt $p$ setzt.

## §. 14.

Wenn $D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}$ als Function von $y$ gegeben ist und die Gleichung der Trajectoria gefunden werden soll, so muss man sich auf folgende Art verhalten, wobei wir die im Vorhergehenden eingeführten Bezeichnungen sämmtlich beibehalten.

Für den directen Zweig ist nach dem Obigen bekanntlich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp\sqrt{\omega^2 + (1 + \omega^2)\varpi^2 D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}},$$

die Quadratwurzel positiv genommen, also

$$\partial x = \mp\frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1 + \omega^2)\varpi^2 D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}}},$$

und folglich

$$x = \mp\int\frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1 + \omega^2)\varpi^2 D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}}} + Const.$$

Setzt man nun überhaupt

$$F(y) = \int\frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1 + \omega^2)\varpi^2 D^{(y)}_{(\mathfrak{y})}}},$$

so ist

$$x = \mp F(y) + Const.$$

Da der Ausgangspunkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ des Strahls jedenfalls im directen Zweige liegt, so ist

$$\mathfrak{x} = \mp F(\mathfrak{y}) + Const.,$$

also

$$x - \mathfrak{x} = \mp \{F(y) - F(\mathfrak{y})\}$$

oder

$$x = \mathfrak{x} \mp \{F(y) - F(\mathfrak{y})\},$$

d. i.

$$99)\ x = \mathfrak{x} \mp \int_{\mathfrak{y}}^{y} \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D_{(\eta)}^{(y)}}}.$$

Insofern es nun einen reflectirten Zweig wirklich giebt, was jederzeit besonders untersucht werden muss, seien wie früher $\xi$, $\eta$ die Coordinaten des Punktes, in welchem die Luftspiegelung Statt findet, oder des Scheitels der Trajectoria, und $x'$, $y'$ seien die Coordinaten eines beliebigen Punktes im reflectirten Zweige, so ist offenbar, wenn $y = y'$ ist, wegen der gegenseitigen symmetrischen Lage des directen und des reflectirten Zweiges, nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie:

$$\xi = {}^1/_2(x + x'),\ \text{also}\ x' = 2\xi - x;$$

und folglich nach 99) für den reflectirten Zweig:

$$x' = 2\xi - \mathfrak{x} \pm \int_{\mathfrak{y}}^{y} \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D_{(\eta)}^{(y)}}},$$

oder, wenn wir wieder $x$ für $x'$ schreiben:

$$100)\ x = 2\xi - \mathfrak{x} \pm \int_{\mathfrak{y}}^{y} \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D_{(\eta)}^{(y)}}},$$

die Quadratwurzel immer positiv genommen.

Auch ist für den directen Zweig:

$$101)\ x = \xi - \left\{\xi - \mathfrak{x} \pm \int_{\mathfrak{y}}^{y} \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D_{(\eta)}^{(y)}}}\right\},$$

und für den reflectirten Zweig:

$$102)\ x = \xi + \left\{ \xi - \mathfrak{x} \pm \int_{\mathfrak{y}}^{y} \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}} \right\}.$$

Setzt man

$$103)\ \psi(y) = \xi - \mathfrak{x} \pm \int_{\mathfrak{y}}^{y} \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}},$$

so ist für den directen Zweig:

$$x = \xi - \psi(y),$$

und für den reflectirten Zweig:

$$x = \xi + \psi(y).$$

Weil nun

$$\begin{aligned} &\{x - (\xi - \psi(y))\}\{x - (\xi + \psi(y))\} \\ &= \{x - \xi + \psi(y)\}\{x - \xi - \psi(y)\} \\ &= (x - \xi)^2 - \{\psi(y)\}^2 \\ &= x^2 - 2\xi x + \xi^2 - \{\psi(y)\}^2 \end{aligned}$$

ist, so ist klar, dass sich beide Zweige der Trajectoria in der einen Gleichung

$$104)\ x^2 - 2\xi x + \xi^2 - \{\psi(y)\}^2 = 0,$$

wo für $\psi(y)$ sein obiger Werth gesetzt werden muss, zusammenfassen lassen.

Die in den vorhergehenden Gleichungen vorkommende Grösse $\xi$ muss auf folgende Art bestimmt werden.

Zuerst bestimme man $\eta$ aus der sich unmittelbar aus §. 8. oder §. 9. ergebenden Gleichung

$$105)\ D_{(\mathfrak{y})}^{(\eta)} = -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\overline{\omega}^2} = -\frac{1 + K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}{K} \cdot \frac{\omega^2}{1+\omega^2}$$

oder

$$106)\ D_{(\mathfrak{y})}^{(\eta)} = -\frac{\sin i^2}{\overline{\omega}^2} = -\frac{1 + K\mathfrak{D}_{\mathfrak{y}}}{K} \sin i^2.$$

Den auf diese Weise gefundenen Werth von $\eta$ führe man für $y$ in die nach dem Vorhergehenden entwickelte Gleichung des directen Zweigs ein, und bestimme dann aus derselben die Grösse $x$, deren auf diese Weise gefundener Werth der gesuchte Werth von

$\xi$ sein wird, welchen man nun in die obige Gleichung des reflectirten Zweigs einführen, und dadurch auch diese Gleichung in völlig entwickelter Gestalt darstellen kann. Jenachdem die Bestimmung von $\xi$ und $\eta$ nach der vorhergehenden Anweisung bloss in reellen Grössen möglich oder unmöglich ist, wird es einen reflectirten Zweig wirklich geben oder nicht.

§. 15.

Wenn jetzt $(uv)$ der Ort des Auges des Beobachters ist, und dasselbe von der Trajectoria getroffen, der Punkt $(xy)$ also von dem Auge gesehen werden soll, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem das Auge von dem directen Zweige oder von dem reflectirten Zweige, insofern es einen solchen giebt, getroffen werden soll, wobei man nicht unbeachtet zu lassen hat, dass nur im letzten Falle das Auge die Erscheinung, welche man Luftspiegelung zu nennen pflegt, wirklich sieht, wie aus dem Vorhergehenden von selbst erhellet.

Soll aber das Auge $(uv)$ von dem directen Zweige getroffen werden, so muss der Punkt $(uv)$ in diesem Zweige liegen, welches nach 99) durch die Gleichung

$$107)\quad u = x \mp \int_y^v \frac{\partial v}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D^{(v)}_{(y)}}}$$

bedingt wird; aus dieser Gleichung muss man die Grösse

$$108)\quad \omega = \varphi'(x) = tang\, i$$

bestimmen, und den gefundenen Werth dann in die Gleichung

$$109)\quad \mathfrak{x} = x \mp \int_y^\mathfrak{y} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D^{(\mathfrak{y})}_{(y)}}}$$

einführen, oder mit andern Worten: es muss aus den beiden Gleichungen

$$110)\quad \begin{cases} u = x \mp \int_y^v \dfrac{\partial v}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D^{(v)}_{(y)}}}, \\ \mathfrak{x} = x \mp \int_y^\mathfrak{y} \dfrac{\partial \mathfrak{y}}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D^{(\mathfrak{y})}_{(y)}}} \end{cases}$$

die Grösse $\omega$ eliminirt werden, wodurch man die Gleichung des

durch das Auge $(uv)$ gehenden directen Zweigs zwischen $x$ und $y$ erhält; weil aber den Werth von $\omega$ selbst zu kennen, immer wichtig und interessant ist, so wird das erste Verfahren meistens vorzuziehen sein.

Soll ferner das Auge von dem reflectirten Zweige, insofern es, was jederzeit vorher gehörig festgestellt sein muss, einen solchen wirklich giebt, getroffen werden, so muss der Punkt $(uv)$ in diesem Zweige liegen, was nach 100) durch die Gleichung

$$111)\quad u = 2\xi - \mathfrak{x} \pm \int_{\mathfrak{y}}^{v} \frac{\partial v}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(v)}}}$$

bedingt wird; aus dieser Gleichung muss man die Grösse

$$108^*)\quad \omega = \varphi'(\mathfrak{x}) = tang\, i$$

bestimmen, und den gefundenen Werth dann in die Gleichung

$$112)\quad x = 2\xi - \mathfrak{x} \pm \int_{\mathfrak{y}}^{y} \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}}$$

einführen, oder mit anderen Worten: es muss aus den beiden Gleichungen

$$113)\quad \begin{cases} u = 2\xi - \mathfrak{x} \pm \displaystyle\int_{\mathfrak{y}}^{v} \frac{\partial v}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(v)}}}, \\ x = 2\xi - \mathfrak{x} \pm \displaystyle\int_{\mathfrak{y}}^{y} \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(y)}}}. \end{cases}$$

die Grösse $\omega$ eliminirt werden, wodurch man die Gleichung des durch das Auge $(uv)$ gehenden reflectirten Zweigs zwischen $x$ und $y$ erhält; jedoch wird aus dem oben angegebenen Grunde auch in diesem Falle das erste Verfahren meistens vorzuziehen sein.

Die Gleichung der durch das Auge $(uv)$ gehenden Berührenden der Trajectoria, durch welche die Richtung bestimmt wird, nach der das Auge den Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ sieht, ist bekanntlich

$$y - v = \frac{\partial v}{\partial u}(x - u).$$

Liegt nun $(uv)$ im directen Zweige, so ist bekanntlich nach 64)

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\varpi^2 D_{(\mathfrak{y})}^{(v)}},$$

die Quadratwurzel positiv genommen, also die Gleichung der Berührenden im Punkte $(uv)$:

$$114)\quad y-v=\mp\sqrt{\omega^2+(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D^{(v)}_{(\eta)}}\,.\,(x-u),$$

wo natürlich für $\omega$ sein nach dem Vorhergehenden bestimmter Werth gesetzt werden muss. Liegt dagegen $(uv)$ im reflectirten Zweige, so ist nach 64)

$$\frac{\partial v}{\partial u}=\pm\sqrt{\omega^2+(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D^{(v)}_{(\eta)}},$$

die Quadratwurzel positiv genommen, also die Gleichung der Berührenden

$$115)\quad y-v=\pm\sqrt{\omega^2+(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D^{(v)}_{(\eta)}}\,.\,(x-u),$$

wo wieder für $\omega$ sein nach dem Vorhergehenden bestimmter Werth gesetzt werden muss.

## §. 16.

Wenn die Gleichung des Strahls jetzt ganz im Allgemeinen durch

$$116)\quad y=F(\omega,x)$$

dargestellt wird, so wollen wir nun die Gleichung aller orthogonalen Trajectorien der Strahlen für den veränderlichen Parameter $\omega$ suchen.

Der Punkt $(xy)$ sei ein dem Strahle für den Parameter $\omega$ und der orthogonalen Trajectoria gemeinschaftlicher Punkt, so sind, wenn wir die Gleichung der orthogonalen Trajectoria, welche natürlich von $\omega$ unabhängig ist, durch

$$117)\quad y=\mathfrak{S}(x)$$

bezeichnen, die Gleichungen der Berührenden des Strahls und der orthogonalen Trajectoria in dem Punkte $(xy)$ respective

$$118)\quad Y-y=\frac{\partial_x F(\omega,x)}{\partial x}\,(X-x),$$

und

$$119)\quad Y-y=\mathfrak{S}'(x).(X-x),$$

wo die veränderlichen oder laufenden Coordinaten jetzt durch $X, Y$ bezeichnet worden sind, und weil nun diese Berührenden auf einander senkrecht stehen müssen, so hat man nach den Principien der analytischen Geometrie die Gleichung

$$120)\quad 1 + \frac{\partial_x F(\omega, x)}{\partial x} \cdot \mathfrak{S}'(x) = 0.$$

Verbindet man mit dieser Gleichung die aus 116) und 117), weil der Punkt $(xy)$ beiden Curven angehören soll, sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$121)\quad \mathfrak{S}(x) = F(\omega, x),$$

und eliminirt dann aus den beiden Gleichungen

$$122)\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{S}(x) = F(\omega, x), \\ 1 + \dfrac{\partial_x F(\omega, x)}{\partial x} \cdot \mathfrak{S}'(x) = 0 \end{array}\right.$$

den veränderlichen Parameter $\omega$, so erhält man eine Gleichung zwischen $x$, $\mathfrak{S}(x)$, $\mathfrak{S}'(x)$ oder zwischen $x$, $y$, $\frac{\partial y}{\partial x}$, welche die allgemeine Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien der Strahlen für den veränderlichen Parameter $\omega$ ist, die man nun integriren muss, um zu der allgemeinen Gleichung dieser orthogonalen Trajectorien selbst zu gelangen.

Man denke sich nun durch den Punkt $(uv)$ des dem Parameter $\omega$ entsprechenden Strahls eine orthogonale Trajectoria gelegt, und lasse $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ einen andern beliebigen Punkt dieser orthogonalen Trajectoria sein, so sind nach den Principien der analytischen Geometrie

$$Y - v = -\frac{1}{\mathfrak{S}'(u)}(X - u)$$

und

$$Y - (v + \Delta v) = -\frac{1}{\mathfrak{S}'(u + \Delta u)}\{X - (u + \Delta u)\}$$

die Gleichungen der Normalen der orthogonalen Trajectoria in den beiden genannten Punkten. Bestimmt man aber aus diesen beiden Gleichungen $X$ und $Y$ als unbekannte Grössen nach den Regeln der

gewöhnlichen algebraischen Elimination, so erhält man die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden in Rede stehenden Normalen. Durch Subtraction der zweiten Gleichung von der ersten ergiebt sich zuvörderst

$$\Delta v = -\left\{\frac{1}{\mathfrak{S}'(u)} - \frac{1}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u)}\right\} X + \frac{u}{\mathfrak{S}'(u)} - \frac{u+\Delta u}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u)},$$

also

$$X = -\frac{\Delta v - \dfrac{u}{\mathfrak{S}'(u)} + \dfrac{u+\Delta u}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u)}}{\dfrac{1}{\mathfrak{S}'(u)} - \dfrac{1}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u)}},$$

und folglich

$$X - u = -\frac{\Delta v + \dfrac{\Delta u}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u)}}{\dfrac{1}{\mathfrak{S}'(u)} - \dfrac{1}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u)}},$$

oder

$$123)\quad \begin{cases} X - u = -\mathfrak{S}'(u) \cdot \dfrac{\Delta u + \mathfrak{S}'(u+\Delta u) \cdot \Delta v}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u) - \mathfrak{S}'(u)}, \\ Y - v = \dfrac{\Delta u + \mathfrak{S}'(u+\Delta u) \cdot \Delta v}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u) - \mathfrak{S}'(u)}. \end{cases}$$

Nun ist aber nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\mathfrak{S}'(u+\Delta u) = \mathfrak{S}'(u) + \mathfrak{S}''(u) \cdot \Delta u + {}^1/_2 \mathfrak{S}'''(u+\Theta \Delta u) \cdot \Delta u^2,$$

wo $\Theta$ bekanntlich eine positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet; also

$$124)\quad \begin{cases} X - u = -\mathfrak{S}'(u) \cdot \dfrac{\Delta u + \mathfrak{S}'(u) \cdot \Delta v + \mathfrak{S}''(u) \cdot \Delta u \Delta v + {}^1/_2 \mathfrak{S}'''(u+\Theta \Delta u) \cdot \Delta u^2 \Delta v}{\mathfrak{S}''(u) \cdot \Delta u + {}^1/_2 \mathfrak{S}'''(u+\Theta \Delta u) \cdot \Delta u^2}, \\ Y - v = \dfrac{\Delta u + \mathfrak{S}'(u) \cdot \Delta v + \mathfrak{S}''(u) \cdot \Delta u \Delta v + {}^1/_2 \mathfrak{S}'''(u+\Theta \Delta u) \cdot \Delta u^2 \Delta v}{\mathfrak{S}''(u) \cdot \Delta u + {}^1/_2 \mathfrak{S}'''(u+\Theta \Delta u) \cdot \Delta u^2}; \end{cases}$$

oder

$$
125)\begin{cases}
X-u=-\mathfrak{S}'(u).\dfrac{1+\mathfrak{S}'(u).\dfrac{\Delta v}{\Delta u}+\mathfrak{S}''(u).\Delta v+{}^1/_2\mathfrak{S}'''(u+\Theta\Delta u).\Delta u\Delta v}{\mathfrak{S}''(u)+{}^1/_2\mathfrak{S}'''(u+\Theta\Delta u).\Delta u}, \\
Y-v=\dfrac{1+\mathfrak{S}'(u).\dfrac{\Delta v}{\Delta u}+\mathfrak{S}''(u).\Delta v+{}^1/_2\mathfrak{S}'''(u+\Theta\Delta u).\Delta u\Delta v}{\mathfrak{S}''(u)+{}^1/_2\mathfrak{S}'''(u+\Theta\Delta u).\Delta u}.
\end{cases}
$$

Denken wir uns jetzt die Oberfläche des in dem Punkte ($uv$) befindlichen Auges des Beobachters als einen unendlich kleinen Theil der in Rede stehenden Trajectoria, so wird dasselbe von den einander unendlich nahe liegenden Normalen dieser Trajectoria, welche natürlich Berührende der von dem Punkte ($\mathfrak{x}\mathfrak{y}$) ausgegangenen, dem veränderlichen Parameter $\omega$ entsprechenden Strahlen sind, unter rechten Winkeln getroffen, und da nun das Auge hiernach den Punkt ($\mathfrak{x}\mathfrak{y}$) offenbar in den Punkt zu versetzen geneigt sein wird, in welchem diese einander unendlich nahe liegenden Normalen sich schneiden, — eine Ansicht, in welcher wir an Gergonne in seiner Abhandlung: Essai analytique sur le phénomène du mirage in den Annales de Mathématiques. T. XX. p. 16. uns anschliessen, — so wird das Auge offenbar den Punkt ($\mathfrak{x}\mathfrak{y}$) in den Punkt versetzen oder in dem Punkte zu erblicken glauben, dessen Coordinaten die Gränzen sind, denen $X$, $Y$ sich nähern, wenn man $\Delta u$ sich der Null nähern lässt. Die Coordinaten dieses Punktes, den wir das Bild des Punktes ($\mathfrak{x}\mathfrak{y}$) nennen werden, wollen wir durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ bezeichnen, und nun zu bestimmen suchen.

Weil zuvörderst die Gränze, welcher $\frac{\Delta v}{\Delta u}$ sich nähert, wenn $\Delta u$ sich der Null nähert, nach den Principien der Differentialrechnung

$$\frac{\partial v}{\partial u}=\frac{\partial\,\mathfrak{S}(u)}{\partial u}=\mathfrak{S}'(u)$$

ist; so ist nach 125) offenbar

$$
126)\begin{cases}
\mathfrak{X}-u=-\mathfrak{S}'(u).\dfrac{1+(\mathfrak{S}'(u))^2}{\mathfrak{S}''(u)}, \\
\mathfrak{Y}-v=\dfrac{1+(\mathfrak{S}'(u))^2}{\mathfrak{S}''(u)}.
\end{cases}
$$

Nun müssen aber $\mathfrak{S}'(u)$ und $\mathfrak{S}''(u)$ gesucht und in diese Gleichungen eingeführt werden, wobei wir uns an die aus 122) sich unmittelbar ergebenden Gleichungen

$$\mathfrak{S}(u) = F(\omega, u),$$

$$1 + \frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u} \cdot \mathfrak{S}'(u) = 0$$

anschliessen müssen.

Aus der zweiten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich unmittelbar

$$\mathfrak{S}'(u) = -\frac{1}{\frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u}}.$$

Aus der Gleichung

$$\mathfrak{S}(u) = F(\omega, u),$$

in der man $\omega$ als Function von $u$ zu betrachten hat, folgt nach bekannten Regeln der Differentialrechnung*):

$$\mathfrak{S}'(u) = \frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u} + \frac{\partial_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u},$$

und hieraus ferner

$$\mathfrak{S}''(u)$$

$$= \frac{\partial^2{}_u F(\omega, u)}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial_\omega . \partial_u F(\omega, u)}{\partial \omega \, \partial u} \frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial^2{}_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega^2} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{S}'(u) = -\frac{1}{\frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u}}$$

und

$$\mathfrak{S}'(u) = \frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u} + \frac{\partial_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u}$$

erhält man, wenn die beiden Werthe von $\mathfrak{S}'(u)$ einander gleich gesetzt werden, mittelst leichter Rechnung

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = -\frac{1 + \left(\frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u}\right)^2}{\frac{\partial_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u}}.$$

Nun ist

---

*) A. a. O. S. 182.

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = \frac{\partial_u \frac{\partial \omega}{\partial u}}{\partial u} + \frac{\partial_\omega \frac{\partial \omega}{\partial u}}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u}.$$

Nach dem vorhergehenden Ausdrucke von $\frac{\partial \omega}{\partial u}$ ist von

$$\frac{\partial_u \frac{\partial \omega}{\partial u}}{\partial u}$$

der Zähler:

$$-2\,\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega} \cdot \left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2 \cdot \frac{\partial_u^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$+\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial^2_u F(\omega,u)}{\partial u^2} + \frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial_\omega \partial_u F(\omega,u)}{\partial \omega \partial u}\right\}$$

$$= -\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega} \cdot \left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2 \cdot \frac{\partial_u^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$+\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial_u^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$+\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial_\omega \partial_u F(\omega,u)}{\partial \omega \partial u}$$

$$+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^3 \cdot \frac{\partial_\omega \partial_u F(\omega,u)}{\partial \omega \partial u},$$

und der Nenner ist

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2.$$

Von

$$\frac{\partial_\omega \frac{\partial \omega}{\partial u}}{\partial u}$$

ist der Zähler:

$$-2\,\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega} \cdot \left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2 \cdot \frac{\partial_\omega \partial_u F(\omega,u)}{\partial \omega \partial u}$$

$$+\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial_\omega^2 F(\omega,u)}{\partial \omega^2} + \frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial_\omega \partial_u F(\omega,u)}{\partial \omega \partial u}\right\}$$

$$= -\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega} \cdot \left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2 \cdot \frac{\partial_\omega \partial_u F(\omega,u)}{\partial \omega \partial u}$$

$$+\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial_\omega{}^2 F(\omega,u)}{\partial\omega^2}$$

$$+\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\partial u}$$

$$+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^3\cdot\frac{\partial_\omega{}^2 F(\omega,u)}{\partial\omega^2},$$

und der Nenner ist wieder

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2.$$

Die Zähler von

$$\frac{\partial_u\frac{\partial\omega}{\partial u}}{\partial u}\text{ und }\frac{\partial_\omega\frac{\partial\omega}{\partial u}}{\partial\omega}$$

sind auch respective

$$\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\left\{1-\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$+\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\partial u}$$

und

$$\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\left\{1-\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\partial u}\right.$$

$$+\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega{}^2 F(\omega,u)}{\partial\omega^2},$$

und der gemeinschaftliche Nenner ist

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2$$

Also ist nach dem Obigen, wie leicht erhellen wird, der Zähler von $\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}$:

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1-\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\cdot\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\partial u}$$

$$-\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\left\{1-\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\partial u}$$

$$-\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}^2\cdot\frac{\partial_\omega{}^2 F(\omega,u)}{\partial\omega^2},$$

und der Nenner ist

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^3\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^3.$$

Folglich ist nach dem Obigen von $S''(u)$ der Zähler:

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^3\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^3\cdot\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$-2\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\cdot\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\cdot\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\partial u}$$

$$+\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}^2\cdot\frac{\partial_\omega{}^2 F(\omega,u)}{\partial\omega^2}$$

$$+\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^3\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1-\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$+\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\cdot\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\partial u}$$

$$-\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\left\{1-\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\partial u}$$

$$-\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}^2\cdot\frac{\partial_\omega{}^2 F(\omega,u)}{\partial\omega^2},$$

d. i., wie man sogleich übersieht:

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^3\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$-\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\cdot\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\cdot\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\partial u};$$

und der Nenner ist

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^3\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\Bigg)^3;$$

also

$$S''(u)$$

$$=\frac{\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}-\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\cdot\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega\ u)}{\partial\omega\partial u}}{\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^3}.$$

Führt man nun die gefundenen Ausdrücke von $\mathfrak{S}'(u)$ und $\mathfrak{S}''(u)$ in die Ausdrücke 126) von $\mathfrak{X} - u$, $\mathfrak{Y} - v$ ein, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$127) \begin{cases} \mathfrak{X} - u = \dfrac{\dfrac{\partial_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega}\left\{1 + \left(\dfrac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u}\right)^2\right\}}{\dfrac{\partial_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega} \cdot \dfrac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial_u^2 F(\omega, u)}{\partial u^2} - \left\{1 + \left(\dfrac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u}\right)^2\right\}\dfrac{\partial_\omega \partial_u F(\omega, u)}{\partial \omega \partial u}}, \\[2ex] \mathfrak{Y} - v = \dfrac{\dfrac{\partial_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega} \cdot \dfrac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u}\left\{1 + \left(\dfrac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u}\right)^2\right\}}{\dfrac{\partial_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega} \cdot \dfrac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial_u^2 F(\omega, u)}{\partial u^2} - \left\{1 + \left(\dfrac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u}\right)^2\right\}\dfrac{\partial_\omega \partial_u F(\omega, u)}{\partial \omega \partial u}}; \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ des Bildes bestimmt werden können.

Handelt es sich um das Bild nicht eines blossen Punktes, sondern eines ausgedehnten Objects, etwa einer Linie, um nur diesen einfachsten Fall in's Auge zu fassen, so hat man zwischen den beiden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ eine Gleichung, z. B. im Falle einer geraden Linie eine Gleichung von der Form $\mathfrak{y} = m\mathfrak{x} + n$, wo $m$ und $n$ bekannte Grössen sind. Aus dieser Gleichung, aus der zur Bestimmung von $\omega$ dienenden Gleichung (m. s. 30)), und aus den zur Bestimmung von $\mathfrak{X} - u$, $\mathfrak{Y} - v$ dienenden Gleichungen (m. s. 127)) kann man nun, da dies vier Gleichungen zwischen den drei Grössen $\omega$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ sind, diese drei Grössen ganz eliminiren, und die resultirende Gleichung zwischen $\mathfrak{X} - u$, $\mathfrak{Y} - v$ oder $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ ist die Gleichung des Bildes der gegebenen Linie, welche man suchte. Die erforderlichen näheren Bestimmungen werden sich in besonderen Fällen leicht ergeben; die betreffenden Rechnungen werden aber meistens ziemlich complicirt ausfallen.

§. 17.

Nach diesen allgemeinen Entwickelungen wollen wir nun den Fall, wenn

$$D_{(\mathfrak{y})}^{(y)} = c(y - \mathfrak{y})$$

ist, wo $c$ eine constante Grösse bezeichnet, einer ausführlichen Betrachtung unterwerfen.

Dabei kommt es, wie sich aus dem Obigen ergiebt, zuerst auf die allgemeine Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y})}}$$

an. Zu dem Ende setze man

$$Y = \sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y})},$$

also

$$Y^2 = \omega^2\overline{\omega}^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y}),$$

so ist

$$2Y\partial Y = c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2\partial y,$$

und folglich

$$\partial y = \frac{2Y\partial Y}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2},$$

also

$$\frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y})}} = \frac{2\partial Y}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}$$

woraus sogleich

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2(y-\mathfrak{y})}} = \frac{2Y}{c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2},$$

d. i.

$$128)\ \int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2(y-\mathfrak{y})}} = \frac{2\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2(y-\mathfrak{y})}}{c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2}$$

folgt. Nimmt man nun dieses Integral von $\mathfrak{y}$ bis $y$, so wird

$$129)\ \int_{\mathfrak{y}}^{y} \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2(y-\mathfrak{y})}}$$

$$= \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2(y-\mathfrak{y})} - \sqrt{\omega^2}\right\},$$

wo ganz absichtlich $\sqrt{\omega^2}$ nicht weiter entwickelt, d. h. etwa durch $\omega$ dargestellt worden ist, weil $\sqrt{\omega^2}$ nothwendig positiv genommen werden muss, wie man aus dem Obigen weiss, die Grösse $\omega = \varphi'(\mathfrak{x}) = tang\, i$ aber keineswegs immer positiv ist, sondern auch negativ sein kann, wenn nämlich $i$ negativ ist.

Führt man den Werth $tang\, i$ für $\omega$ in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$\int_{\mathfrak{y}}^{y} \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2(y-\mathfrak{y})}}$$

$$= \frac{2}{c\overline{\varpi}^2 sec\, i^2}\left\{\sqrt{tang\, i^2 + c\overline{\varpi}^2 sec\, i^2(y-\mathfrak{y})} - \sqrt{tang\, i^2}\right\},$$

d. i., weil $cos\, i$ stets positiv ist, da $i$ nicht grösser als $90^0$ rücksichtlich seines absoluten Werths ist:

$$130)\ \int_{\mathfrak{y}}^{y} \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2(y-\mathfrak{y})}}$$

$$= \frac{2\, cos\, i}{c\overline{\varpi}^2}\left\{\sqrt{sin\, i^2 + c\overline{\varpi}^2(y-\mathfrak{y})} - \sqrt{sin\, i^2}\right\}.$$

## §. 18.

Die Gleichung des directen Zweigs ist folglich nach 99)

$$131)\ x = \mathfrak{x} \mp \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2(y-\mathfrak{y})} - \sqrt{\omega^2}\right\}$$

oder

$$132)\ x = \mathfrak{x} \mp \frac{2\cos i}{c\,\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\sin i^2 + c\,\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y})} - \sqrt{\sin i^2}\right\}.$$

Um ferner die Gleichung des reflectirten Zweigs zu erhalten, muss man zuerst $\eta$ aus der Gleichung

$$D_{(\mathfrak{y})}^{(\eta)} = c(\eta - \mathfrak{y}) = -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}$$

bestimmen, woraus sich

$$133)\ \eta - \mathfrak{y} = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}$$

ergiebt. Führt man dies in den Ausdruck 131) von $x$ für $y-\mathfrak{y}$ ein, so erhält man

$$134)\ \xi = \mathfrak{x} \pm \frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2},$$

und für den reflectirten Zweig ergiebt sich daher nach 100) die Gleichung

$$x = \mathfrak{x} \pm \frac{4\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2} \pm \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y})} - \sqrt{\omega^2}\right\},$$

d. i.

$$135)\ x = \mathfrak{x} \pm \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y})} + \sqrt{\omega^2}\right\}$$

oder

$$136)\ x = \mathfrak{x} \pm \frac{2\cos i}{c\,\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\sin i^2 + c\,\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y})} + \sqrt{\sin i^2}\right\}.$$

Für beide Zweige zusammen hat man nach 104) die Gleichung

$$137)\ \left\{x - \mathfrak{x} \mp \frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\right\}^2 = \frac{4\left\{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y})\right\}}{c^2(1+\omega^2)^2\overline{\omega}^4}.$$

Nimmt man den Punkt $(\xi\eta)$ als Anfang eines dem primitiven Systeme der $xy$ parallelen Systems der $x_1 y_1$ an, so ist

$$x = \xi + x_1,\quad y = \eta + y_1 \text{ oder } x_1 = x - \xi,\quad y_1 = y - \eta;$$

also ist für den directen Zweig nach dem Obigen

$$138)\ x_1 = \mp \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\sqrt{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 y_1},$$

und für den reflectirten Zweig ist

$$139)\quad x_1 = \pm \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\sqrt{c(1+\omega^2)\varpi^2 y_1}.$$

Für beide Zweige zusammen ist folglich

$$140)\quad x_1{}^2 = \frac{4}{c(1+\omega^2)\varpi^2}y_1 = \frac{4\cos i^2}{c\varpi^2}y_1,$$

woraus sich ergiebt, dass die Trajectoria eine Parabel ist. Die primitiven Coordinaten des Scheitels dieser Parabel sind:

$$141)\quad \begin{cases} \xi = \mathfrak{x} \pm \dfrac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\varpi^2}, \\[2ex] \eta = \mathfrak{y} - \dfrac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}. \end{cases}$$

Wenn $c$ positiv ist, so ist der Parameter

$$\frac{4}{c(1+\omega^2)\varpi^2} = \frac{4\cos i^2}{c\varpi^2};$$

wenn dagegen $c$ negativ ist, so ist der Parameter

$$-\frac{4}{c(1+\omega^2)\varpi^2} = -\frac{4\cos i^2}{c\varpi^2}.$$

Wenn $c$ positiv ist, so ist $x_1$ nur für positive $y_1$ reell; also kehrt in diesem Falle die Parabel ihre concave Seite nach oben. Wenn dagegen $c$ negativ ist, so ist $x_1$ nur für negative $y_1$ reell; also kehrt in diesem Falle die Parabel ihre concave Seite nach unten.

Weil nach dem Obigen

$$\eta - \mathfrak{y} = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2},$$

und folglich $\eta - \mathfrak{y}$ negativ oder positiv ist, jenachdem $c$ positiv oder negativ ist, so liegt der Scheitel der Parabel auf der negativen oder positiven Seite einer durch den Ausgangspunkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ des Strahls gezogenen horizontalen Linie, jenachdem $c$ positiv oder negativ ist.

Für $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = 0$ ist die Gleichung des directen Zweigs:

$$142)\quad x = \mp \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 y} - \sqrt{\omega^2}\right\},$$

und die Gleichung des reflectirten Zweigs ist unter derselben Voraussetzung:

$$143)\quad x = \pm\frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 y} + \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Für beide Zweige ist, wie man hieraus leicht findet:

$$144)\quad x^2 = \frac{4}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\,(y \pm x\sqrt{\omega^2}).$$

Von nun an wollen wir der Kürze und Einfachheit wegen immer $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = 0$ setzen, d. h. wir wollen den Ausgangspunkt des Strahls als Anfang der Coordinaten annehmen.

§. 19.

Nach 141) sind unter der am Ende des vorhergehenden Paragraphen gemachten Voraussetzung die Coordinaten des Scheitels der Parabel:

$$\xi = \pm\frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\varpi^2},\quad \eta = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}.$$

Um aus diesen beiden Gleichungen $\omega$ zu eliminiren, hat man zuerst

$$\frac{\eta}{\xi} = \mp\tfrac{1}{2}\sqrt{\omega^2},$$

also

$$\tfrac{1}{4}\omega^2 = \frac{\eta^2}{\xi^2},\quad \omega^2 = \frac{4\eta^2}{\xi^2},\quad 1+\omega^2 = \frac{\xi^2+4\eta^2}{\xi^2}.$$

Folglich ist

$$\eta = -\frac{4}{c\varpi^2}\cdot\frac{\eta^2}{\xi^2}\cdot\frac{\xi^2}{\xi^2+4\eta^2},$$

d. i.

$$\frac{4}{c\varpi^2}\cdot\frac{\eta}{\xi^2+4\eta^2} = -1,$$

oder

$$c\varpi^2(\xi^2+4\eta^2) = -4\eta.$$

Also ist

$$c\varpi^2\xi^2 + 4c\varpi^2\left(\eta^2 + \frac{1}{c\varpi^2}\eta\right) = 0,$$

und folglich

$$c\varpi^2\xi^2 + 4c\varpi^2\left(\eta^2 + \frac{1}{c\varpi^2}\eta + \frac{1}{4c^2\varpi^4}\right) = \frac{1}{c\varpi^2},$$

d. i.

$$c\varpi^2\xi^2 + 4c\varpi^2\left(\eta + \frac{1}{2c\varpi^2}\right)^2 = \frac{1}{c\varpi^2},$$

oder

$$c^2\varpi^4\xi^2 + 4c^2\varpi^4\left(\eta + \frac{1}{2c\varpi^2}\right)^2 = 1,$$

oder

$$145)\quad \left(\frac{\xi}{\frac{1}{c\varpi^2}}\right)^2 + \left(\frac{\eta + \frac{1}{2c\varpi^2}}{\frac{1}{2c\varpi^2}}\right)^2 = 1,$$

oder, wenn wir

$$146)\quad \xi = \xi_1,\ \eta + \frac{1}{2c\varpi^2} = \eta_1$$

und

$$147)\quad a = \frac{1}{c\varpi^2}$$

setzen:

$$148)\quad \left(\frac{\xi_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{{}^1\!/_2 a}\right)^2 = 1,$$

welches die Gleichung einer Ellipse ist, deren beide Halbaxen die absoluten Werthe von

$$a = \frac{1}{c\varpi^2} \text{ und } {}^1\!/_2\, a = \frac{1}{2c\varpi^2}$$

sind. Weil

$$\xi = \xi_1,\quad \eta = -\frac{1}{2c\varpi^2} + \eta_1$$

ist, so sind $0,\ -\frac{1}{2c\varpi^2}$ die primitiven Coordinaten des Mittelpunkts dieser Ellipse; ihre Hauptaxe ist horizontal, ihre Nebenaxe ist vertikal, und weil nach 145) gleichzeitig $\xi = 0,\ \eta = 0$ ist, so geht sie immer durch den Anfang der Coordinaten, d. h. durch den Ausgangspunkt des Strahls.

Die so eben näher bestimmte Ellipse ist der geometrische Ort der Scheitel aller derjenigen Parabeln, welche, denselben Ausgangs-

punkt habend, erhalten werden, wenn man sich $\omega = tang\, i$ oder $i$ stetig verändern lässt, indem

$$\varpi^2 = \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_0}$$

ungeändert bleibt. Diese Ellipse soll im Folgenden die Scheitel-ellipse genannt werden.

Durch Elimination von $\varpi^2$ haben wir oben die Gleichung

$$\frac{\eta}{\xi} = \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\omega^2} \text{ oder } \eta = \mp \tfrac{1}{2}\,\xi\sqrt{\omega^2}$$

erhalten, in welcher man, wie immer, das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem der Strahl aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt; weil aber $\omega = tang\, i$ bekanntlich negativ oder positiv ist, jenachdem der Strahl aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt, so kann man offenbar kürzer und in völliger Allgemeinheit setzen:

$$149)\quad \eta = \tfrac{1}{2}\,\xi\omega = \tfrac{1}{2}\,\xi\, tang\, i,$$

welches die Gleichung einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten oder den Ausgangspunkt des Strahls gehenden geraden Linie ist. Diese gerade Linie ist der geometrische Ort der Scheitel aller derjenigen Parabeln, welche, denselben Ausgangspunkt habend, erhalten werden, wenn man sich

$$\varpi^2 = \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_0},$$

d. i. die Dichtigkeit $\mathfrak{D}_0$ der Luft im Ausgangspunkte des Strahls, stetig verändern lässt, indem $i$ ungeändert bleibt.

## §. 20.

Die allgemeine Gleichung der Parabel war nach 144)

$$x^2 = \frac{4}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\,(y \pm x\sqrt{\omega^2}),$$

und in dieser Gleichung hat man das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem der Strahl aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt; weil aber $\omega = tang\, i$ bekanntlich negativ oder positiv ist, jenachdem der Strahl aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt, so kann man offenbar in völliger Allgemeinheit und kürzer

$$150)\quad x^2 = \frac{4}{c(1+\omega^2)\varpi^2}(y - \omega x)$$

oder

$$151)\quad x^2 = \frac{4\cos i^2}{c\varpi^2}(y - x \tang i)$$

setzen.

Soll nun der Strahl durch das Auge $(uv)$ gehen oder dasselbe von dem Strahle getroffen werden, so hat man die Bedingungsgleichung

$$u^2 = \frac{4}{c(1+\omega^2)\varpi^2}(v - \omega u),$$

oder

$$(1+\omega^2)u^2 = \frac{4}{c\varpi^2}(v - \omega u),$$

oder

$$\omega^2 + \frac{4}{c\varpi^2 u}\omega = \frac{4v}{c\varpi^2 u^2} - 1,$$

oder

$$\left(\omega + \frac{2}{c\varpi^2 u}\right)^2 = \frac{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}{c^2\varpi^4 u^2},$$

woraus

$$152)\quad \omega = \tang i = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass die doppelten Zeichen in dieser Formel in keiner Beziehung zu den in den obigen Formeln vorkommenden doppelten Zeichen stehen.

Die Bedingung für die Möglichkeit, dass das Auge $(uv)$ überhaupt von dem Strahle getroffen werde, ist also

$$153)\quad 4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v) \geqq 0;$$

wenn dagegen

$$154)\quad 4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v) < 0$$

ist, so kann das Auge nicht von dem Strahle getroffen werden.

## §. 21.

Wir wollen nun zunächst die Curve untersuchen, deren Gleichung zwischen den Coordinaten $u$ und $v$

$$155)\quad 4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) = 0$$

ist.

Diese Gleichung bringt man leicht auf die Form

$$156)\quad u^2 = \frac{4}{c\overline{\omega}^2}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right).$$

Legen wir nun durch einen Punkt, dessen primitive Coordinaten $0, -\frac{1}{c\overline{\omega}^2}$ sind, ein dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem der $u_1$, $v_1$; so ist

$$u = u_1,\ v = -\frac{1}{c\overline{\omega}^2} + v_1;\ \text{also}\ u_1 = u,\ v_1 = \frac{1}{c\overline{\omega}^2} + v;$$

und die Gleichung 156) wird also

$$157)\quad u_1{}^2 = \frac{4}{c\overline{\omega}^2}\, v_1.$$

Unsere Curve ist folglich eine Parabel, deren Scheitel durch die primitiven Coordinaten $0, -\frac{1}{c\overline{\omega}^2}$ bestimmt wird; die Axe dieser Parabel ist offenbar vertikal, und ihr Parameter ist der absolute Werth von $\frac{4}{c\overline{\omega}^2}$, d. h. $\pm\frac{4}{c\overline{\omega}^2}$, indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $c$ positiv oder negativ ist.

Grösserer Deutlichkeit wegen wollen wir nun die beiden Fälle, wenn $c$ positiv oder negativ ist, von einander unterscheiden.

**Erstens.** $c$ sei positiv.

Wenn der Punkt $(uv)$ oder $(u_1\ v_1)$ innerhalb der Parabel liegt, so ist

$$v_1 > 0,\ u_1{}^2 < \frac{4}{c\overline{\omega}^2}\, v_1;$$

also

$$v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2} > 0,\ u^2 < \frac{4}{c\overline{\omega}^2}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right);$$

also

$$v > -\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ c^2\overline{\omega}^4 u^2 < 4c\overline{\omega}^2\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right);$$

oder

$$v > -\frac{1}{c\varpi^2},\ c^2\varpi^4u^2 < 4(c\varpi^2 v + 1);$$

oder

$$v > -\frac{1}{c\varpi^2},\ 4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v) > 0.$$

Wenn der Punkt $(uv)$ oder $(u_1 v_1)$ in der Parabel liegt, so ist

$$v_1 \geqq 0,\quad u_1^2 = \frac{4}{c\varpi^2}v_1;$$

also

$$v + \frac{1}{c\varpi^2} \geqq 0,\ u^2 = \frac{4}{c\varpi^2}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right);$$

also

$$v \geqq -\frac{1}{c\varpi^2},\ c^2\varpi^4u^2 = 4c\varpi^2\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right);$$

oder

$$v \geqq -\frac{1}{c\varpi^2},\ c^2\varpi^4u^2 = 4(c\varpi^2 v + 1);$$

oder

$$v \geqq -\frac{1}{c\varpi^2},\ 4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v) = 0.$$

Wenn der Punkt $(uv)$ oder $(u_1 v_1)$ ausserhalb der Parabel liegt, so ist entweder

$$v_1 < 0$$

oder

$$v_1 \geqq 0,\ u_1^2 > \frac{4}{c\varpi^2}v_1.$$

Für $v_1 < 0$ ist offenbar immer

$$u_1^2 > \frac{4}{c\varpi^2}v_1,$$

wie im zweiten Falle, so dass also in beiden Fällen

$$u_1^2 > \frac{4}{c\varpi^2}v_1,$$

d. i.

$$u^2 > \frac{4}{c\varpi^2}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right),$$

folglich

$$c^2\overline{\omega}^4u^2 > 4c\overline{\omega}^2\left(v+\frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right),$$

oder

$$c^2\overline{\omega}^4u^2 > 4(c\overline{\omega}^2v+1),$$

oder

$$4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)<0$$

ist.

Hieraus schliesst man nun auch sogleich umgekehrt Folgendes:

Wenn $4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)>0$ ist, so liegt der Punkt $(uv)$ innerhalb der Parabel; wenn $4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)=0$ ist, so liegt der Punkt $(uv)$ in der Parabel; wenn endlich $4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)<0$ ist, so liegt der Punkt $(uv)$ ausserhalb der Parabel.

**Zweitens.** $c$ sei negativ.

Wenn der Punkt $(uv)$ oder $(u_1v_1)$ innerhalb der Parabel liegt, so ist

$$v_1<0,\ u_1^2<\frac{4}{c\overline{\omega}^2}v_1;$$

also

$$v+\frac{1}{c\overline{\omega}^2}<0,\ u^2<\frac{4}{c\overline{\omega}^2}\left(v+\frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right);$$

also

$$v<-\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ c^2\overline{\omega}^4u^2<4c\overline{\omega}^2\left(v+\frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right);$$

oder

$$v<-\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ c^2\overline{\omega}^4u^2<4(c\overline{\omega}^2v+1);$$

oder

$$v<-\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ 4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)>0.$$

Wenn der Punkt $(uv)$ oder $(u_1v_1)$ in der Parabel liegt, so ist

$$v_1 \overline{\overline{<}} 0,\ u_1^2=\frac{4}{c\overline{\omega}^2}v_1;$$

also

$$v+\frac{1}{c\overline{\omega}^2}\overline{\overline{<}}0,\ u^2=\frac{4}{c\overline{\omega}^2}\left(v+\frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right);$$

also

$$v \leqq -\frac{1}{c\varpi^2},\ c^2\varpi^4u^2 = 4c\varpi^2\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right);$$

oder

$$v \leqq -\frac{1}{c\varpi^2},\ c^2\varpi^4u^2 = 4(c\varpi^2v + 1);$$

oder

$$v \leqq -\frac{1}{c\varpi^2},\ 4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v) = 0.$$

Wenn der Punkt $(uv)$ oder $(u_1 v_1)$ ausserhalb der Parabel liegt, so ist entweder

$$v_1 > 0$$

oder

$$v_1 \leqq 0,\ u_1^2 > \frac{4}{c\varpi^2}v_1.$$

Für $v_1 > 0$ ist offenbar immer

$$u_1^2 > \frac{4}{c\varpi^2}v_1,$$

wie im zweiten Falle, so dass also in beiden Fällen

$$u_1^2 > \frac{4}{c\varpi^2}v_1,$$

d. i.

$$u^2 > \frac{4}{c\varpi^2}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right),$$

folglich

$$c^2\varpi^4u^2 > 4c\varpi^2\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right),$$

oder

$$c^2\varpi^4u^2 > 4(c\varpi^2v + 1),$$

oder

$$4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v) < 0$$

ist.

Hieraus schliesst man wieder sogleich umgekehrt Folgendes:

Wenn $4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v) > 0$ ist, so liegt der Punkt $(uv)$ innerhalb der Parabel; wenn $4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v) = 0$ ist, so liegt der Punkt $(uv)$ in der Parabel; wenn endlich $4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v) < 0$ ist, so liegt der Punkt $(uv)$ ausserhalb der Parabel.

Da dieses Resultat mit dem obigen ganz übereinstimmt, so ist

es allgemein, und gilt also, die Grösse $c$ mag positiv oder negativ sein.

Nennen wir nun die durch die Gleichung

$$u^2 = \frac{4}{c\varpi^2}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right)$$

oder

$$u_1{}^2 = \frac{4}{c\varpi^2} v_1$$

characterisirte Parabel die **Gränzparabel**, und halten das Vorhergehende mit den Gleichungen 152), 153), 154) zusammen, so ergiebt sich folgender Satz:

Wenn das Auge **innerhalb** der Gränzparabel liegt, so wird es im Allgemeinen von **zwei** von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahlen getroffen; wenn das Auge **in** der Gränzparabel liegt, so wird es im Allgemeinen von **nur einem** von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahle getroffen; wenn das Auge **ausserhalb** der Gränzparabel liegt, so wird es von **keinem** von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahle getroffen.

## §. 22.

Wir wollen nun annehmen, dass das Auge innerhalb der Gränzparabel liege, und dass also nach dem Vorhergehenden

$$4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v) > 0$$

sei.

In diesem Falle hat $\omega = tang\, i$ zwei reelle durch die Formel

$$\omega = tang\, i = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}$$

bestimmte Werthe.

Das Product dieser beiden Werthe ist, wie man leicht findet:

$$1 - \frac{4v}{c\varpi^2u^2}.$$

Wenn nun

$$\frac{4v}{c\varpi^2u^2} < 1$$

ist, so ist das Product der beiden Werthe von $\omega = tang\, i$ grösser

als Null, und diese beiden Werthe haben also gleiche Vorzeichen.

Ist $cu$ positiv, so liefert das untere Zeichen in dem Ausdrucke von $\omega = tang\, i$ offenbar einen negativen Werth, und es sind also beide Werthe von $\omega = tang\, i$, folglich auch die beiden entsprechenden Werthe von $i$, negativ, d. h. nach dem Obigen die von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahlen, von denen das Auge getroffen wird, treten beide aus den oberen in die unteren Schichten. — Für

$$\omega = tang\, i = \frac{-2 + \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}$$

ist, wie man leicht findet:

$$\omega^2 + c(1 + \omega^2)\overline{\omega}^2 v$$

$$= \left\{\frac{2(1 + c\overline{\omega}^2 v) - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}\right\}^2,$$

oder

$$\omega^2 + c(1 + \omega^2)\overline{\omega}^2 v$$

$$= \left\{\frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} + 2\frac{v}{u}\right\}^2.$$

Wenn nun $\frac{v}{u}$ positiv ist, oder wenn $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} < \frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine positive Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1 + \omega^2)\overline{\omega}^2 v}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} + 2\frac{v}{u},$$

und folglich

$$\sqrt{\omega^2 + c(1 + \omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega = 2\frac{v}{u},$$

also

$$u = \frac{2v}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega$$

multiplicirt:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega\right\},$$

oder, weil $\omega$ negativ ist:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den oberen in die unteren Schichten treten, so erhellet aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, und daher eine Luftspiegelung Statt findet. Wenn aber $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} > \frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine negative Grösse, und folglich

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v}$$

$$= -\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} - 2\frac{v}{u},$$

also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega = -2\frac{v}{u},$$

folglich

$$u = -\frac{2v}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \omega$$

multiplicirt:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega\right\},$$

oder, weil $\omega$ negativ ist:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den oberen in die unteren Schichten treten, so erhellet aus 142), dass in diesem Falle das Auge von dem directen Zweige getroffen wird, eine eigentliche Luftspiegelung also nicht Statt findet. Wenn endlich $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} = \frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} + 2\frac{v}{u} = 0,$$

also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} = 0$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v = 0,$$

d. i.

$$v = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2},$$

welches, in die aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$-\omega + 2\frac{v}{u} = 0 \text{ oder } u = \frac{2v}{\omega}$$

gesetzt,

$$u = -\frac{2\omega}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}$$

giebt. Weil nun $\omega$ negativ ist, so ist

$$u = \frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}, \quad v = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2};$$

woraus sich nach 141) ergiebt, dass in diesem Falle das Auge im

Scheitel des Strahls, und also eigentlich im directen und reflectirten Zweige zugleich liegt. — Für

$$\omega = tang\, i = \frac{-2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, wie man leicht findet:

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v$$

$$= \left\{\frac{2(1+c\varpi^2 v) + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}\right\}^2,$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v$$

$$= \left\{\frac{2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}\right\}^2.$$

Wenn nun $\frac{v}{u}$ positiv ist, oder wenn $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} < \frac{2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine positive Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u},$$

und folglich

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \omega = 2\frac{v}{u},$$

also

$$u = \frac{2v}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega$$

multiplicirt:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \omega\right\},$$

oder, weil $\omega$ negativ ist:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den obern in die untern Schichten treten, so erhellet aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, und daher eine Luftspiegelung Statt findet. Wenn aber $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} > \frac{2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u} + 2\frac{v}{u}$$

eine negative Grösse, und folglich

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v}$$

$$= -\frac{2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u} - 2\frac{v}{u},$$

also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \omega = -2\frac{v}{u},$$

folglich

$$u = -\frac{2v}{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega$$

multiplicirt:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega\right\},$$

oder, weil $\omega$ negativ ist:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den obern in die untern Schichten treten, so erhellet aus 142), dass in diesem Falle das Auge von dem directen Zweige getroffen wird, eine eigentliche Luftspiegelung also nicht Statt findet. Wenn endlich $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u}=\frac{2+\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2+\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}+2\frac{v}{u}=0,$$

also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}=0$$

oder

$$\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v=0,$$

d. i.

$$v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2},$$

welches, in die aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$-\omega+2\frac{v}{u}=0 \text{ oder } u=\frac{2v}{\omega}$$

gesetzt,

$$u=-\frac{2\omega}{c(1+\omega^2)\varpi^2}$$

giebt. Weil nun $\omega$ negativ ist, so ist

$$u=\frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\varpi^2},\quad v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2};$$

woraus sich nach 141) ergiebt, dass in diesem Falle das Auge im Scheitel des Strahls, und also eigentlich im directen und reflectirten Zweige zugleich liegt.

Wenn $cu$ negativ ist, so liefert das untere Zeichen in dem Ausdrucke von $\omega = tang\, i$ offenbar einen positiven Werth, und es sind also beide Werthe von $\omega = tang\, i$, folglich auch die beiden entsprechenden Werthe von $i$ positiv, d. h. nach dem Obigen, die von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahlen, von

denen das Auge getroffen wird, treten beide aus den unteren in die oberen Schichten. — Für

$$\omega = tang\, i = \frac{-2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, wie man leicht findet:

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v$$
$$= \left\{\frac{2(1 + c\varpi^2 v) - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}\right\}^2$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v$$
$$= \left\{\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}\right\}^2.$$

Wenn nun $\frac{v}{u}$ negativ ist, oder wenn $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} < -\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine negative Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v}$$
$$= -\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} - 2\frac{v}{u},$$

folglich

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega = -2\frac{v}{u},$$

also

$$u = -\frac{2v}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \omega$$

multiplicirt:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}+\omega\right\},$$

oder, weil $\omega$ positiv ist:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}+\sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den unteren in die oberen Schichten treten, so erhellet aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, und daher eine Luftspiegelung Statt findet. Wenn aber $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} > -\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2 u}+2\frac{v}{u}$$

eine positive Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}$$

$$=\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2 u}+2\frac{v}{u},$$

also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}+\omega = 2\frac{v}{u},$$

folglich

$$u = \frac{2v}{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}+\omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}-\omega$$

multiplicirt:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}-\omega\right\},$$

oder, weil $\omega$ positiv ist:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}-\sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den untern in die obern Schichten treten, so erhellet ans 142), dass in diesem Falle das Auge von dem directen Zweige getroffen wird, eine eigentliche Luftspiegelung also nicht Statt findet. Wenn endlich $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} = -\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}+2\frac{v}{u}=0,$$

also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}=0$$

oder

$$\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v=0,$$

d. i.

$$v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2},$$

welches, in die aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$-\omega+2\frac{v}{u}=0 \text{ oder } u=\frac{2v}{\omega}$$

gesetzt,

$$u=-\frac{2\omega}{c(1+\omega^2)\varpi^2}$$

giebt. Weil nun $\omega$ positiv ist, so ist

$$u=-\frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\varpi^2},\quad v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2};$$

woraus sich nach 141) ergiebt, dass in diesem Falle das Auge im Scheitel des Strahls, und also eigentlich im directen und reflectirten Zweige zugleich liegt. — Für

$$\omega=tang\,i=\frac{-2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}$$

ist, wie man leicht findet:

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2 v$$

$$= \left\{\frac{2(1+c\overline{\varpi}^2 v) + \sqrt{4-c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2 u}\right\}^2,$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2 v$$

$$= \left\{\frac{2+\sqrt{4-c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2 u} + 2\frac{v}{u}\right\}^2.$$

Wenn nun $\frac{v}{u}$ negativ ist, oder wenn $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} < -\frac{2+\sqrt{4-c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2+\sqrt{4-c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine negative Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2 v}$$

$$= -\frac{2+\sqrt{4-c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2 u} - 2\frac{v}{u},$$

und folglich

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2 v} - \omega = -2\frac{v}{u},$$

also

$$u = -\frac{2v}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2 v} - \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2 v} + \omega$$

multiplicirt:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2 v} + \omega\right\},$$

oder, weil $\omega$ positiv ist:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\varpi}^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den unteren in die oberen Schichten treten, so erhellet aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, und daher eine Luftspiegelung Statt findet. Wenn aber $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} > -\frac{2+\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2+\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}+2\frac{v}{u}$$

eine positive Grösse, und folglich

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}$$
$$=\frac{2+\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}+2\frac{v}{u},$$

also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}+\omega=2\frac{v}{u},$$

folglich

$$u=\frac{2v}{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}+\omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}-\omega$$

multiplicirt:

$$u=\frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}-\omega\right\},$$

oder, weil $\omega$ positiv ist:

$$u=\frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}-\sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den unteren in die oberen Schichten treten, so erhellet aus 142), dass in diesem Falle das Auge von dem directen Zweige getroffen wird, eine eigentliche Luftspiegelung also nicht Statt findet. Wenn endlich $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} = -\frac{2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}+2\frac{v}{u}=0,$$

also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}=0$$

oder

$$\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v=0,$$

d. i.

$$v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2},$$

welches, in die aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$-\omega+2\frac{v}{u}=\text{oder } u=\frac{2v}{\omega}$$

gesetzt,

$$u=-\frac{2\omega}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}$$

giebt. Weil nun $\omega$ positiv ist, so ist

$$u=-\frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2},\quad v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2};$$

woraus sich nach 141) ergiebt, dass in diesem Falle das Auge im Scheitel des Strahls, und also eigentlich im directen und reflectirten Zweige zugleich liegt.

Wenn ferner

$$\frac{4v}{c\overline{\omega}^2u^2}>1$$

ist, so ist das Product der beiden Werthe von $\omega = tang\, i$ kleiner als Null, und diese beiden Werthe haben also ungleiche Vorzeichen.

Ist $cu$ positiv, so liefert das untere Zeichen in dem Ausdrucke von $\omega = tang\, i$ offenbar einen negativen, folglich das obere Zeichen einen positiven Werth von $\omega = tang\, i$, also auch von $i$, d. i. nach dem Obigen, die von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahlen, von denen das Auge getroffen wird, treten aus den unteren in die oberen, oder aus den oberen in die unteren

Schichten, jenachdem man in dem Ausdrucke von $\omega = tang\, i$ das obere oder das untere Zeichen nimmt. — Für

$$\omega = tang\, i = \frac{-2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}$$

ist, wie man leicht findet,

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v$$

$$=\left\{\frac{2(1+c\overline{\omega}^2v)-\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}\right\}^2$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v$$

$$=\left\{\frac{2-\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}+2\frac{v}{u}\right\}^2.$$

Wenn nun $\frac{v}{u}$ negativ ist, oder wenn $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} < \frac{-2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2-\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}+2\frac{v}{u}$$

eine negative Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}$$

$$=-\frac{2-\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}-2\frac{v}{u},$$

und folglich

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}-\omega=-2\frac{v}{u},$$

also

$$u=-\frac{2v}{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}-\omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}+\omega$$

multiplicirt:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\,\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}+\omega\right\},$$

oder, weil $\omega$ positiv ist:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\,\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}+\sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den unteren in die oberen Schichten treten, so erhellet aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, und daher eine Luftspiegelung Statt findet. Wenn aber $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\,\frac{v}{u} > \frac{-2+\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2 u}+2\,\frac{v}{u}$$

eine positive Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}$$

$$=\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2 u}+2\,\frac{v}{u},$$

und folglich

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}+\omega = 2\,\frac{v}{u},$$

also

$$u = \frac{2v}{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}+\omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}-\omega$$

multiplicirt:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}-\omega\right\},$$

oder, weil $\omega$ positiv ist:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}-\sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den unteren in die oberen Schichten treten, so erhellet aus 142), dass in diesem Falle das Auge von dem directen Zweige getroffen wird, eine eigentliche Luftspiegelung also nicht Statt findet. Wenn endlich $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u}=\frac{-2+\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}+2\frac{v}{u}=0,$$

also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}=0$$

oder

$$\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v=0,$$

d. i.

$$v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2},$$

welches, in die aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$-\omega+2\frac{v}{u}=0 \text{ oder } u=\frac{2v}{\omega}$$

gesetzt:

$$u=-\frac{2\omega}{c(1+\omega^2)\varpi^2}$$

giebt. Weil nun $\omega$ positiv ist, so ist

$$u=-\frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\varpi^2},\quad v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2};$$

woraus sich nach 141) ergiebt, dass in diesem Falle das Auge in dem Scheitel des Strahls, und also eigentlich in dem directen und reflectirten Zweige zugleich liegt. — Für

$$\omega=\tang i=\frac{-2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u},$$

wo $\omega$ bekanntlich negativ ist, gelangt man ganz zu denselben Resultaten, wie in dem vorhergehenden Falle, wenn

$$\frac{4v}{c\varpi^2 u^2} < 1$$

ist, und es braucht daher die dort geführte Untersuchung hier nicht wiederholt zu werden.

Wenn $cu$ negativ ist, so liefert das untere Zeichen in dem Ausdrucke von $\omega = tang\, i$ offenbar einen positiven, folglich das obere Zeichen einen negativen Werth von $\omega = tang\, i$, also auch von $i$, d. h. nach dem Obigen, die von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahlen, von denen das Auge getroffen wird, treten aus den oberen in die unteren, oder aus den unteren in die oberen Schichten, jenachdem man in dem Ausdrucke von $\omega = tang\, i$ das obere oder das untere Zeichen nimmt. — Für

$$\omega = tang\, i = \frac{-2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, wie man leicht findet:

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v$$

$$= \left\{\frac{2(1+c\varpi^2 v) - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}\right\}^2$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v$$

$$= \left\{\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}\right\}^2.$$

Wenn nun $\frac{v}{u}$ positiv ist, oder wenn $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} < \frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine positive Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u},$$

folglich

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \omega = 2\frac{v}{u},$$

also

$$u = \frac{2v}{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega$$

multiplicirt:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega\right\},$$

oder, weil $\omega$ negativ ist:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den oberen in die unteren Schichten treten, so erhellet aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, und daher eine Luftspiegelung Statt findet. Wenn aber $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} > \frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2 u^2-4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2 u^2-4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u},$$

eine negative Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}$$

$$= -\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2 u^2-4v)}}{c\varpi^2 u} - 2\frac{v}{u},$$

folglich

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega = -2\frac{v}{u},$$

also

$$u = -\frac{2v}{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \omega$$

multiplicirt:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \omega\right\},$$

oder, weil $\omega$ negativ ist:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den oberen in die unteren Schichten treten, so erhellet aus 142), dass in diesem Falle das Auge von dem directen Zweige getroffen wird, eine eigentliche Luftspiegelung also nicht Statt findet. Wenn endlich $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} = \frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u} = 0,$$

also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} = 0$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v = 0,$$

d. i.

$$v = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2},$$

welches, in die aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$-\omega + 2\frac{v}{u} = 0 \text{ oder } u = \frac{2v}{\omega}$$

gesetzt:

$$u = -\frac{2\omega}{c(1+\omega^2)\varpi^2}$$

giebt. Weil nun $\omega$ negativ ist, so ist

$$u = \frac{2\sqrt{\omega^3}}{c(1+\omega^2)\varpi^2}, \quad v = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2};$$

woraus sich nach 141) ergiebt, dass in diesem Falle das Auge in dem Scheitel des Strahls, und also eigentlich in dem directen und reflectirten Zweige zugleich liegt. — Für

$$\omega = tang\, i = \frac{-2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2 u^2-4v)}}{c\varpi^2 u},$$

wo $\omega$ bekanntlich positiv ist, gelangt man ganz zu denselben Resultaten, wie in dem vorhergehenden Falle, wenn

$$\frac{4v}{c\varpi^2 u^2} < 1$$

ist, und es braucht daher die dort geführte Untersuchung hier nicht wiederholt zu werden.

Wenn endlich

$$\frac{4v}{c\varpi^2 u^2} = 1,$$

also $4v = c\varpi^2 u^2$ ist, so ist

$$\omega = tang\, i = \frac{-2\pm 2}{c\varpi^2 u} = -\frac{\begin{Bmatrix}0\\4\end{Bmatrix}}{c\varpi^2 u}.$$

Aus $\omega = tang\, i = 0$ folgt $i = 0$, und der Strahl ist also in diesem Falle horizontal, stellt folglich offenbar eine gerade Linie dar, so dass von einem directen und einem reflectirten Zweige im eigentlichen Sinne nicht mehr die Rede sein kann. — Aus

$$\omega = tang\, i = -\frac{4}{c\varpi^2 u}$$

folgt

$$u = -\frac{4}{c\,\omega\,\varpi^2},$$

also, weil $v = \frac{1}{4}c\varpi^2 u^2$ ist,

$$v = \frac{4}{c\,\omega^2\varpi^2}.$$

Wenn nun $cu$ positiv ist, so ist $\omega = tang\, i$, also auch $i$ negativ, und der Strahl, von welchem das Auge getroffen wird, tritt folglich aus den oberen in die unteren Schichten. Es ist aber

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v = \left(\frac{2+\omega^2}{\omega}\right)^2,$$

also, weil $\omega$ negativ ist:

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} = -\frac{2+\omega^2}{\omega},\quad \sqrt{\omega^2} = -\omega.$$

Auf der Stelle überzeugt man sich, dass

$$-\frac{4}{c\omega\varpi^2} = \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left(-\frac{2+\omega^2}{\omega} - \omega\right),$$

d. i.

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}$$

ist, und sieht also aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, folglich eine Luftspiegelung Statt findet.

Wenn ferner $cu$ negativ ist, so ist $\omega = tang\, i$, also auch $i$ positiv, und der Strahl, von welchem das Auge getroffen wird, tritt folglich aus den unteren in die oberen Schichten. Es ist aber wieder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v = \left(\frac{2+\omega^2}{\omega}\right)^2,$$

also, weil $\omega$ positiv ist:

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} = \frac{2+\omega^2}{\omega},\quad \sqrt{\omega^2} = \omega.$$

Auf der Stelle überzeugt man sich, dass

$$-\frac{4}{c\omega\varpi^2} = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left(\frac{2+\omega^2}{\omega} + \omega\right),$$

d. i.

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}$$

ist, und sieht also aus 143), dass auch in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, folglich wieder eine Luftspiegelung Statt findet.

## §. 23.

Wir wollen ferner auch den Fall betrachten, wenn das Auge in der Gränzparabel liegt, folglich nach dem Vorhergehenden

$$4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) = 0$$

ist.

In diesem Falle hat $\omega = tang\, i$ nur einen durch die Formel

$$\omega = tang\, i = -\frac{2}{c\overline{\omega}^2 u}$$

bestimmten Werth. Also ist

$$u = -\frac{2}{c\omega\overline{\omega}^2},$$

und, weil nach dem Obigen

$$v = \frac{c^2\overline{\omega}^4 u^2 - 4}{4c\overline{\omega}^2}$$

ist, wie man leicht findet:

$$v = \frac{1-\omega^2}{c\omega^2\overline{\omega}^2}.$$

Wenn nun $cu$ positiv ist, so ist $\omega = tang\, i$, also auch $i$ negativ, und der Strahl, von welchem das Auge getroffen wird, tritt folglich aus den oberen in die unteren Schichten. Es ist aber

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v = \frac{1}{\omega^2},$$

also, weil $\omega$ negativ ist:

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} = -\frac{1}{\omega}, \quad \sqrt{\omega^2} = -\omega.$$

Auf der Stelle überzeugt man sich, dass

$$-\frac{2}{c\omega\overline{\omega}^2} = \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left(-\frac{1}{\omega} - \omega\right),$$

d. i.

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}$$

ist, und sieht daher aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, also eine Luftspiegelung Statt findet.

Wenn ferner $cu$ negativ ist, so ist $\omega = tang\, i$, also auch $i$ positiv, und der Strahl, von welchem das Auge getroffen wird, tritt folglich aus den unteren in die oberen Schichten. Es ist aber wieder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v = \frac{1}{\omega^2},$$

also, weil $\omega$ positiv ist:

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} = \frac{1}{\omega}, \quad \sqrt{\omega^2}=\omega.$$

Auf der Stelle überzeugt man sich, dass

$$-\frac{2}{c\omega\varpi^2} = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left(\frac{1}{\omega}+\omega\right),$$

d. i.

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}+\sqrt{\omega^2}\right\}$$

ist, und sieht daher aus 143), dass auch in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, also eine Luftspiegelung Statt findet.

## §. 24.

Mittelst der im Vorhergehenden entwickelten Bedingungen ist man im Stande, in allen Fällen ohne Schwierigkeit zu entscheiden, ob das Auge überhaupt von einem von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahle getroffen werden kann oder nicht, und ob im ersten Falle eine Luftspiegelung wirklich Statt findet oder nicht; man kann jedoch diese Bedingungen auch leicht auf geometrische Ausdrücke bringen, worüber nun noch das Folgende in der Kürze bemerkt werden soll, indem wir diesen Gegenstand noch weiter auszuführen, füglich dem Leser überlassen können.

Durch die Gleichung

$$158)\quad \frac{4y}{c\varpi^2 x^2} = 1$$

oder

$$159)\quad x^2 = \frac{4}{c\varpi^2}y$$

wird offenbar eine der Gränzparabel gleiche und gegen dieselbe eine völlig symmetrische Lage habende, aber in dem Anfangspunkte der Coordinaten oder dem Ausgangspunkte der Strahlen ihren Scheitel habende Parabel dargestellt, welche die zweite Gränzparabel genannt werden soll, im Gegensatz zu der vorhergehenden Gränzparabel, die wir deshalb von nun an nicht mehr die Gränzparabel schlechthin, wie bisher, sondern die erste Gränzparabel nennen wollen. Jenachdem aber

$$\frac{4v}{c\varpi^2 u^2} < 1, \quad \frac{4v}{c\varpi^2 u^2} > 1, \quad \frac{4v}{c\varpi^2 u^2} = 1$$

ist, liegt das Auge $(uv)$, wie leicht aus §. 21. geschlossen wird, beziehungsweise ausserhalb, innerhalb, in der zweiten Gränzparabel.

Wenn überhaupt

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung einer Ellipse ist, so ist für jeden Punkt $(xy)$ in dieser Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Wenn dagegen der Punkt $(xy)$ ausserhalb der Ellipse liegt, so ist entweder $x^2 > a^2$, d. i. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 > 1$, und folglich um so mehr

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 > 1;$$

oder es ist $x^2 < a^2$, d. i. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 < 1$, und, wenn $y_1$ die der Abscisse $x$ entsprechende Ordinate der Ellipse bezeichnet, $y^2 > y_1^2$, also auch $\left(\frac{y}{b}\right)^2 > \left(\frac{y_1}{b}\right)^2$, folglich, weil wegen der Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

ist,

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 > 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2,$$

d. i. wieder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 > 1.$$

Wenn endlich der Punkt $(xy)$ innerhalb der Ellipse liegt, so ist $x^2 < a^2$, d. i. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 < 1$, und, wenn wieder $y_1$ die der Abscisse $x$ entsprechende Ordinate der Ellipse bezeichnet, $y^2 < y_1^2$, also auch $\left(\frac{y}{b}\right)^2 < \left(\frac{y_1}{b}\right)^2$; weil nun aber wegen der Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

ist, so ist

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2,$$

d. i.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1.$$

Hieraus ergiebt sich nun, dass die Bedingung, dass der Punkt $(xy)$

in, ausserhalb, innerhalb

der Ellipse liegt, respective

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 > 1, \; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1$$

ist.

Aus

$$160) \quad 2\,\frac{y}{x} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 x^2 - 4y)}}{c\varpi^2 x}$$

folgt

$$2c\varpi^2 y = -2 \pm \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 x^2 - 4y)},$$

$$2(1 + c\varpi^2 y) = \pm \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 x^2 - 4y)},$$

$$4 + 8c\varpi^2 y + 4c^2\varpi^4 y^2 = 4 - c^2\varpi^4 x^2 + 4c\varpi^2 y,$$

$$c^2\varpi^4 x^2 + 4c\varpi^2 y + 4c^2\varpi^4 y^2 = 0,$$

$$c\varpi^2 x^2 + 4y + 4c\varpi^2 y^2 = 0,$$

$${}^1\!/_4 x^2 + y^2 + \frac{1}{c\varpi^2}\,y = 0,$$

$${}^1\!/_4 x^2 + \left(y + \frac{1}{2c\varpi^2}\right)^2 = \frac{1}{4c^2\varpi^4},$$

$$c^2\varpi^4 x^2 + 4c^2\varpi^4\left(y + \frac{1}{2c\varpi^2}\right)^2 = 1;$$

d. i.

$$161) \quad \left(\frac{x}{\frac{1}{c\varpi^2}}\right)^2 + \left(\frac{y + \frac{1}{2c\varpi^2}}{\frac{1}{2c\varpi^2}}\right)^2 = 1,$$

welches nach 145) die Gleichung der Scheitelellipse ist.

Wenn nun der Punkt $(uv)$ in der Scheitelellipse liegt, so ist

$$\left(\frac{u}{\frac{1}{c\varpi^2}}\right)^2+\left(\frac{v+\frac{1}{2c\varpi^2}}{\frac{1}{2c\varpi^2}}\right)^2=1,$$

$$\tfrac{1}{4}u^2+\left(v+\frac{1}{2c\varpi^2}\right)^2=\frac{1}{4c^2\varpi^4},$$

$$\tfrac{1}{4}u^2+v^2+\frac{1}{c\varpi^2}v=0,$$

$$c^2\varpi^4u^2+4c\varpi^2v+4c^2\varpi^4v^2=0,$$

$$4c^2\varpi^4v^2+8c\varpi^2v+4=4-c^2\varpi^4u^2+4c\varpi^2v,$$

$$4c^2\varpi^4\left(v+\frac{1}{c\varpi^2}\right)^2=4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v),$$

$$\frac{4}{u^2}\left(v+\frac{1}{c\varpi^2}\right)^2=\frac{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}{c^2\varpi^4u^2},$$

$$\frac{2}{u}\left(v+\frac{1}{c\varpi^2}\right)=\pm\frac{\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$2\frac{v}{u}=\frac{-2\pm\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$-2\frac{v}{u}=\frac{2\mp\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}.$$

Wenn der Punkt $(uv)$ ausserhalb der Scheitelellipse liegt, so ist

$$\left(\frac{u}{\frac{1}{c\varpi^2}}\right)^2+\left(\frac{v+\frac{1}{2c\varpi^2}}{\frac{1}{2c\varpi^2}}\right)^2>1,$$

$$\tfrac{1}{4}u^2+\left(v+\frac{1}{2c\varpi^2}\right)^2>\frac{1}{4c^2\varpi^4},$$

$$\tfrac{1}{4}u^2+v^2+\frac{1}{c\varpi^2}v>0,$$

$$c^2\varpi^4u^2+4c\varpi^2v+4c^2\varpi^4v^2>0,$$

$$4c^2\varpi^4v^2 + 8c\varpi^2v + 4 > 4 - c^2\varpi^4u^2 + 4c\varpi^2v,$$

$$4c^2\varpi^4\left(v+\frac{1}{c\varpi^2}\right)^2 > 4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v),$$

$$\frac{4}{u^2}\left(v+\frac{1}{c\varpi^2}\right)^2 > \frac{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}{c^2\varpi^4u^2}.$$

Wenn nun $\frac{2}{u}\left(v+\frac{1}{c\varpi^2}\right) > 0$ ist, so ist, $cu$ mag positiv oder negativ sein,

$$\pm\frac{2}{u}\left(v+\frac{1}{c\varpi^2}\right) \gtrless \frac{\sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} \gtrless \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} \gtrless \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u}.$$

Wenn dagegen $\frac{2}{u}\left(v+\frac{1}{c\varpi^2}\right) < 0$ ist, so ist, $cu$ mag positiv oder negativ sein,

$$\pm\frac{2}{u}\left(v+\frac{1}{c\varpi^2}\right) \lessgtr \frac{\sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} \lessgtr \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} \lessgtr \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u}.$$

Wenn der Punkt $(uv)$ innerhalb der Scheitelellipse liegt, so ist

$$\left(\frac{u}{\frac{1}{c\varpi^2}}\right)^2 + \left(\frac{v+\frac{1}{2c\varpi^2}}{\frac{1}{2c\varpi^2}}\right)^2 < 1,$$

$$\tfrac{1}{4}u^2 + \left(v+\frac{1}{2c\varpi^2}\right)^2 < \frac{1}{4c^2\varpi^4},$$

$$\tfrac{1}{4}u^2 + v^2 + \frac{1}{c\varpi^2}v < 0,$$

$$c^2\overline{\varpi}^4u^2 + 4c\overline{\varpi}^2v + 4c^2\overline{\varpi}^4v^2 < 0,$$

$$4c^2\overline{\varpi}^4v^2 + 8c\overline{\varpi}^2v + 4 < 4 - c^2\overline{\varpi}^4u^2 + 4c\overline{\varpi}^2v,$$

$$4c^2\overline{\varpi}^4\left(v + \frac{1}{c\overline{\varpi}^2}\right)^2 < 4 - c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2u^2 - 4v),$$

$$\frac{4}{u^2}\left(v + \frac{1}{c\overline{\varpi}^2}\right)^2 < \frac{4 - c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2u^2 - 4v)}{c^2\overline{\varpi}^4u^2}.$$

Wenn nun $\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\overline{\varpi}^2}\right) > 0$ ist, so ist für $cu > 0$:

$$\pm\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\overline{\varpi}^2}\right) < \frac{\sqrt{4 - c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} < \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} < \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2u};$$

und für $cu < 0$:

$$\pm\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\overline{\varpi}^2}\right) > \frac{\sqrt{4 - c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} > \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2u},$$

$$\pm \frac{v}{u} > \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2u}.$$

Wenn dagegen $\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\overline{\varpi}^2}\right) < 0$ ist, so ist für $cu > 0$:

$$\pm\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\overline{\varpi}^2}\right) < \frac{\sqrt{4 - c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} < \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} < \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\overline{\varpi}^2(c\overline{\varpi}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\varpi}^2u};$$

und für $cu < 0$:

$$4c^2\varpi^4v^2 + 8c\varpi^2v + 4 > 4 - c^2\varpi^4u^2 + 4c\varpi^2v,$$

$$4c^2\varpi^4\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right)^2 > 4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v),$$

$$\frac{4}{u^2}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right)^2 > \frac{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}{c^2\varpi^4u^2}.$$

Wenn nun $\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right) > 0$ ist, so ist, $cu$ mag positiv oder negativ sein,

$$\pm\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right) \gtrless \frac{\sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} \gtrless \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} \gtrless \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u}.$$

Wenn dagegen $\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right) < 0$ ist, so ist, $cu$ mag positiv oder negativ sein,

$$\pm\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right) \lessgtr \frac{\sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} \lessgtr \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} \lessgtr \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u}.$$

Wenn der Punkt $(uv)$ innerhalb der Scheitelellipse liegt, so ist

$$\left(\frac{u}{\frac{1}{c\varpi^2}}\right)^2 + \left(\frac{v + \frac{1}{2c\varpi^2}}{\frac{1}{2c\varpi^2}}\right)^2 < 1,$$

$$\tfrac{1}{4}u^2 + \left(v + \frac{1}{2c\varpi^2}\right)^2 < \frac{1}{4c^2\varpi^4},$$

$$\tfrac{1}{4}u^2 + v^2 + \frac{1}{c\varpi^2}v < 0,$$

$$c^2\varpi^4u^2 + 4c\varpi^2v + 4c^2\varpi^4v^2 < 0,$$

$$4c^2\varpi^4v^2 + 8c\varpi^2v + 4 < 4 - c^2\varpi^4u^2 + 4c\varpi^2v,$$

$$4c^2\varpi^4\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right)^2 < 4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v),$$

$$\frac{4}{u^2}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right)^2 < \frac{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}{c^2\varpi^4u^2}.$$

Wenn nun $\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right) > 0$ ist, so ist für $cu > 0$:

$$\pm\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right) < \frac{\sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} < \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} < \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u};$$

und für $cu < 0$:

$$\pm\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right) > \frac{\sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} > \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm \frac{v}{u} > \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u}.$$

Wenn dagegen $\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right) < 0$ ist, so ist für $cu > 0$:

$$\pm\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\varpi^2}\right) < \frac{\sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} < \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} < \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2u^2 - 4v)}}{c\varpi^2u};$$

und für $cu < 0$:

$$\cdot\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}$$
$$=(1+\omega^2)uV(U^2+V^2)$$

und

$$\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}$$
$$=(1+\omega^2)uV(U+\omega V)(U^2+V^2).$$

Ferner ist

$$\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial_u^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}-\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\partial u}$$
$$=\frac{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}{2}u\left(\frac{c\overline{\omega}^2}{2}\omega u+1\right)\left\{\frac{c\overline{\omega}^2}{2}u+\omega\left(\frac{c\overline{\omega}^2}{2}\omega u+1\right)\right\}$$
$$-(1+\omega^2)(c\omega\overline{\omega}^2u+1)\left\{\frac{c^2\overline{\omega}^4}{4}u^2+\left(\frac{c\overline{\omega}^2}{2}\omega u+1\right)^2\right\}$$
$$=\frac{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}{2}uV(U+\omega V)$$
$$-(1+\omega^2)(\omega U+V)(U^2+V^2)$$
$$=(1+\omega^2)UV(U+\omega V)$$
$$-(1+\omega^2)(\omega U+V)(U^2+V^2)$$
$$=-(1+\omega^2)(\omega U^3+V^3),$$

Daher ist nach 127), wie man leicht findet:

$$163)\quad\begin{cases}\mathfrak{X}-u=-\dfrac{uV(U^2+V^2)}{\omega U^3+V^3},\\[2ex]\mathfrak{Y}-v=-\dfrac{uV(U+\omega V)(U^2+V^2)}{\omega U^3+V^3};\end{cases}$$

oder

$$164)\quad\begin{cases}\mathfrak{X}-u=-u\dfrac{V(U^2+V^2)}{\omega U^3+V^3},\\[2ex]\mathfrak{Y}-v=-u\dfrac{V\,U^2+V^2}{\omega U^3+V^3}(U+\omega V);\end{cases}$$

oder

$$165)\begin{cases}\mathfrak{X}-u=-u\dfrac{1+\left(\dfrac{U}{V}\right)^2}{1+\omega\left(\dfrac{U}{V}\right)^2},\\[2ex] \mathfrak{Y}-v=-u\dfrac{1+\left(\dfrac{U}{V}\right)^2}{1+\omega\left(\dfrac{U}{V}\right)^2}(U+\omega V).\end{cases}$$

Auch ist, wie man leicht findet:

$$166)\ \mathfrak{X}=uU^2\cdot\frac{\omega U-V}{\omega U^2+V^2}.$$

Weil nach dem Obigen

$$v=\frac{c(1+\omega^2)\varpi^2}{4}u^2+\omega u$$

ist, so ist

$$\frac{v}{u}=\frac{c(1+\omega^2)\varpi^2}{4}u+\omega$$

$$=\frac{c\varpi^2}{4}u+\omega\left(\frac{c\varpi^2}{4}\omega u+1\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{c\varpi^2}{2}u+\omega\left(\frac{c\varpi^2}{2}\omega u+1-\tfrac{1}{2}\omega\cdot\frac{c\varpi^2}{2}u\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}U+\omega(V-\tfrac{1}{2}\omega U)$$

$$=\tfrac{1}{2}(1-\omega^2)U+\omega V.$$

Nun ist aber nach 164)

$$\mathfrak{Y}-v=(U+\omega V)(\mathfrak{X}-u),$$

also

$$\mathfrak{Y}=(U+\omega V)\mathfrak{X}-u(U+\omega V)+v$$

$$=(U+\omega V)\mathfrak{X}-u(U+\omega V)+\tfrac{1}{2}(1-\omega^2)uU+\omega uV$$

$$=(U+\omega V)\mathfrak{X}-\tfrac{1}{2}(1+\omega^2)uU,$$

und folglich nach 166):

$$167)\ \mathfrak{Y}=uU\left\{\frac{U(\omega U-V)(U+\omega V)}{\omega U^2+V^2}-\tfrac{1}{2}(1+\omega^2)\right\}.$$

Die Formeln 164) oder 165) sind jedenfalls die einfachsten.

## §. 26.

Um noch ein zweites Beispiel für die Anwendung unserer im Obigen entwickelten allgemeinen Formeln zu geben, wollen wir jetzt noch den Fall in der Kürze betrachten, wenn, indem der Ausgangspunkt der Strahlen wieder als Anfang der Coordinaten angenommen wird, und $a$, $A$ constante Grössen bezeichnen, $e$ aber seine bekannte Bedeutung hat,

$$D_{(0)}^{(y)} = A(1 - e^{ay})$$

ist. Uebrigens werden wir im Folgenden nur den Fall betrachten, wenn $A$ positiv ist.

Zu dem Ende müssen wir zuerst im Allgemeinen das Integral

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + be^{\alpha x}}}$$

entwickeln.

Man setze $u = e^{\alpha x}$, so ist $\partial u = \alpha e^{\alpha x} \partial x = \alpha u \partial x$, also

$$\partial x = \frac{\partial u}{\alpha u},$$

und folglich

$$\frac{\partial x}{\sqrt{a + be^{\alpha x}}} = \frac{\partial u}{\alpha u \sqrt{a + bu}},$$

so dass es jetzt bloss auf die Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial u}{u\sqrt{a + bu}}$$

ankommt.

Setzt man $\sqrt{a + bu} = v$, also $a + bu = v^2$, und folglich

$$u = \frac{v^2 - a}{b}, \quad \partial u = \frac{2v\partial v}{b};$$

so ist

$$\frac{\partial u}{u\sqrt{a + bu}} = \frac{2v\,\partial v}{b} \cdot \frac{b}{v^2 - a} \cdot \frac{1}{v} = \frac{2\partial v}{v^2 - a}.$$

Ist nun $a$ positiv, so kann man

$$v^2 - a = (v + \sqrt{a})(v - \sqrt{a}),$$

also

$$\frac{\partial v}{v^2-a}=\frac{\partial v}{(v+\sqrt{a})(v-\sqrt{a})},$$

d. i. nach den bekannten Regeln der Zerlegung der gebrochenen Functionen:

$$\frac{\partial v}{v^2-a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{\partial v}{v+\sqrt{a}}-\frac{\partial v}{v-\sqrt{a}}\right),$$

$$\int\frac{\partial v}{v^2-a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\int\frac{\partial v}{v+\sqrt{a}}-\int\frac{\partial v}{v-\sqrt{a}}\right)$$

setzen, woraus sich

$$\int\frac{\partial v}{v^2-a}=\frac{1}{4\sqrt{a}}\left\{l.(v+\sqrt{a})^2-l.(v-\sqrt{a})^2\right\}$$

oder

$$\int\frac{\partial v}{v^2-a}=\frac{1}{4\sqrt{a}}\,l.\left(\frac{v+\sqrt{a}}{v-\sqrt{a}}\right)^2$$

ergiebt. Daher ist nach dem Obigen

$$\int\frac{\partial u}{u\sqrt{a+bu}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\,l.\left(\frac{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}\right)^2,$$

und folglich

$$168)\quad\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+be^{\alpha x}}}$$

$$=\frac{1}{2\alpha\sqrt{a}}\,l.\left(\frac{\sqrt{a+be^{\alpha x}}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^{\alpha x}}-\sqrt{a}}\right)^2$$

oder

$$169)\quad\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+be^{\alpha x}}}$$

$$=\frac{1}{2\alpha\sqrt{a}}\,l.\left\{\frac{(\sqrt{a+be^{\alpha x}}+\sqrt{a})^2}{be^{\alpha x}}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{2\alpha\sqrt{a}}\,l.\left\{\frac{be^{\alpha x}}{(\sqrt{a+be^{\alpha x}}-\sqrt{a})^2}\right\}^2,$$

oder mit Weglassung der Constanten:

$$170)\ \int\frac{\partial x}{\sqrt{a+be^{\alpha x}}}$$

$$=\frac{1}{\alpha\sqrt{a}}\left\{l.(\sqrt{a+be^{\alpha x}}+\sqrt{a})^2-\alpha x\right\}$$

$$=\frac{1}{\alpha\sqrt{a}}\left\{\alpha x-l.(\sqrt{a+be^{\alpha x}}-\sqrt{a})^2\right\}.$$

Wenn $a$ negativ ist, so ist

$$\frac{\partial v}{v^2-a}=\frac{\partial v}{(\sqrt{-a})^2+v^2},$$

also, wenn man

$$\frac{v}{\sqrt{-a}}=w,\quad \partial v=\sqrt{-a}.\partial w$$

setzt:

$$\frac{\partial v}{v^2-a}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\cdot\frac{\partial w}{1+w^2},$$

folglich

$$\int\frac{\partial v}{v^2-a}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{\partial w}{1+w^2}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\,Arc\,tang\,w,$$

d. i.

$$\int\frac{\partial v}{v^2-a}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\,Arc\,tang\,\frac{v}{\sqrt{-a}};$$

folglich

$$\int\frac{\partial u}{u\sqrt{a+bu}}=\frac{2}{\sqrt{-a}}\,Arc\,tang\,\frac{\sqrt{a+bu}}{\sqrt{-a}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{-a}}\,Arc\,tang\sqrt{-1-\frac{b}{a}u}.$$

Daher ist in diesem Falle

$$171)\ \int\frac{\partial x}{\sqrt{a+be^{\alpha x}}}=\frac{2}{\alpha\sqrt{-a}}\,Arc\,tang\,\frac{\sqrt{a+be^{\alpha x}}}{\sqrt{-a}}$$

oder

$$172)\ \int\frac{\partial x}{\sqrt{a+be^{\alpha x}}}=\frac{2}{\alpha\sqrt{-a}}\,Arc\,tang\sqrt{-1-\frac{b}{a}e^{\alpha x}}.$$

Weil nun

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\overline{\omega}^2 D_{(0)}^{(y)}}}$$

$$= \int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + A(1+\omega^2)\overline{\omega}^2(1-e^{ay})}}$$

$$= \int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + A(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 - A(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 e^{ay}}}$$

ist, so ist, wenn wir

$$173) \begin{cases} M^2 = \omega^2 + A(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2, \\ N^2 = A(1+\omega^2)\overline{\omega}^2, \\ M^2 - N^2 = \omega^2 \end{cases}$$

setzen, was verstattet ist, da $A$ positiv sein soll, und $M$, $N$ positiv nehmen:

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2+(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 D_{(0)}^{(y)}}} = \int \frac{\partial y}{\sqrt{M^2 - N^2 e^{ay}}},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2+(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 D_{(0)}^{(y)}}}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ l.(\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}+M)^2 - ay \right\}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ ay - l.(\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}-M)^2 \right\},$$

folglich

$$\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2+(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 D_{(0)}^{(y)}}}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ l.(\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}+M)^2 - l.(\sqrt{M^2-N^2}+M)^2 - ay \right\}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ ay - l.(\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}-M)^2 + l.(\sqrt{M^2-N^2}-M)^2 \right\},$$

d. i.

$$\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\varpi^2 D^{(y)}_{(0)}}}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ l.\left(\frac{\sqrt{M^2 - N^2 e^{ay}} + M}{\sqrt{M^2 - N^2} + M}\right)^2 - ay \right\}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ ay - l.\left(\frac{\sqrt{M^2 - N^2 e^{ay}} - M}{\sqrt{M^2 - N^2} - M}\right)^2 \right\},$$

oder, was im vorliegenden Falle verstattet ist, kürzer:

$$\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\varpi^2 D^{(y)}_{(0)}}}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ 2\,l\frac{\sqrt{M^2 - N^2 e^{ay}} + M}{\sqrt{M^2 - N^2} + M} - ay \right\}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ ay - 2\,l\frac{\sqrt{M^2 - N^2 e^{ay}} - M}{\sqrt{M^2 - N^2} - M} \right\},$$

Die Gleichung des directen Zweigs ist folglich nach 99):

$$174)\quad x = \mp \frac{1}{aM}\left\{ 2\,l\frac{\sqrt{M^2 - N^2 e^{ay}} + M}{\sqrt{M^2 - N^2} + M} - ay \right\}$$

$$= \mp \frac{1}{aM}\left\{ ay - 2\,l\frac{\sqrt{M^2 - N^2 e^{ay}} - M}{\sqrt{M^2 - N^2} - M} \right\},$$

wo das Zeichen auf bekannte Weise zu nehmen ist.

Man muss nun $\eta$ aus der Gleichung

$$D^{(\eta)}_{(0)} = A(1 - e^{a\eta}) = -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\varpi^2}$$

$$= -\frac{M^2 - N^2}{N^2 : A} = -A\frac{M^2 - N^2}{N^2}$$

bestimmen. Aus dieser Gleichung folgt nämlich

$$1 - e^{a\eta} = -\frac{M^2 - N^2}{N^2},\ e^{a\eta} = \frac{M^2}{N^2};$$

also

$$175)\quad a\eta = 2\,l\frac{M}{N},\quad \eta = \frac{2}{a}\,l\frac{M}{N}.$$

Dies, in die Gleichung 174) eingeführt, giebt, weil $M^2 - N^2 e^{a\eta} = M^2 - M^2 = 0$ ist:

$$176)\quad \xi = \mp\frac{1}{aM}\left\{2\,l\frac{M}{\sqrt{M^2-N^2}+M} - 2\,l\frac{M}{N}\right\}$$

$$= \mp\frac{2}{aM}\,l\frac{N}{\sqrt{M^2-N^2}+M}$$

$$= \mp\frac{1}{aM}\left\{2\,l\frac{M}{N} - 2\,l\frac{M}{M-\sqrt{M^2-N^2}}\right\}$$

$$= \mp\frac{2}{aM}\,l\frac{M-\sqrt{M^2-N^2}}{N}.$$

Also ist nach 100) für den reflectirten Zweig:

$$x = \mp\frac{4}{aM}\,l\frac{N}{\sqrt{M^2-N^2}+M}$$

$$\pm\frac{1}{aM}\left\{2\,l\frac{\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}+M}{\sqrt{M^2-N^2}+M} - ay\right\}$$

$$= \mp\frac{4}{aM}\,l\frac{M-\sqrt{M^2-N^2}}{N}$$

$$\pm\frac{1}{aM}\left\{ay - 2\,l\frac{M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M-\sqrt{M^2-N^2}}\right\},$$

d. i.

$$x = \mp\frac{1}{aM}\left\{ay + 4\,lN - 2\,l.(\sqrt{M^2-N^2}+M)(\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}+M)\right\}$$

$$= \pm\frac{1}{aM}\left\{ay + 4\,lN - 2\,l.(M-\sqrt{M^2-N^2})(M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}})\right\}$$

oder

$$x = \mp\frac{1}{aM}\left\{ay + 4\,lN - 2\,l\frac{N^2(M+\sqrt{M^2-N^2e^{ay}})}{M-\sqrt{M^2-N^2}}\right\}$$

$$= \pm\frac{1}{aM}\left\{ay + 4\,lN - 2\,l\frac{N^2(M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}})}{M+\sqrt{M^2-N^2}}\right\},$$

oder, wie sich hieraus sogleich ergiebt:

$$177)\quad x = \mp\frac{1}{aM}\left\{ay + 2\,l\,\frac{M-\sqrt{M^2-N^2}}{M+\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}\right\}$$

$$= \pm\frac{1}{aM}\left\{ay + 2\,l\,\frac{M+\sqrt{M^2-N^2}}{M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}\right\},$$

oder

$$178)\quad x = \mp\frac{1}{aM}\left\{ay - 2\,l\,\frac{M+\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M-\sqrt{M^2-N^2}}\right\}$$

$$= \pm\frac{1}{aM}\left\{ay - 2\,l\,\frac{M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M+\sqrt{M^2-N^2}}\right\}.$$

Für den directen Zweig war nach 174)

$$x = \mp\frac{1}{aM}\left\{ay - 2\,l\,\frac{M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M-\sqrt{M^2-N^2}}\right\}$$

$$= \pm\frac{1}{aM}\left\{ay - 2\,l\,\frac{M+\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M+\sqrt{M^2-N^2}}\right\}.$$

Vergleicht man dies mit dem Vorhergehenden, so erhellet leicht, dass man sagen kann, es sei für beide Zweige

$$179)\quad x = \mp\frac{1}{aM}\left\{ay - 2\,l\,\frac{M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M-\sqrt{M^2-N^2}}\right\}$$

oder

$$180)\quad x = \pm\frac{1}{aM}\left\{ay - 2\,l\,\frac{M+\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M+\sqrt{M^2-N^2}}\right\},$$

wenn man nur $\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}$ für den directen Zweig positiv, für den reflectirten Zweig negativ nimmt.

Diesen Gegenstand noch weiter auszuführen, ist jetzt nicht meine Absicht; in einigen späteren Aufsätzen hoffe ich jedoch auf die Lehre von der Luftspiegelung in so fern zurückzukommen, dass ich nach den in dieser Abhandlung gegebenen allgemeinen analytischen Entwickelungen die mehr physikalische Seite dieses interessanten Gegenstandes hervorzuheben und die vollständige Erklärung einzelner wichtiger und merkwürdiger Erscheinungen zu geben versuchen werde. Die Kenntniss der obigen allgemeinen Theorie ist

aber für Jeden unerlässlich, wer überhaupt sich eine tiefere Einsicht in die sämmtlichen hierher gehörenden, oft sehr auffallenden Naturerscheinungen verschaffen will. Von den früher von Biot in dem Werke: „Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon, par M. Biot. Paris. 1810. 4. *)," so wie von Gergonne in der schon oben angeführten Abhandlung: „Essai analytique sur le phénomène du mirage (Annales de Mathématiques. Tome XX. 1829 et 1830. p. 1.) **)" und Anderen gegebenen Entwickelungen der Theorie der Luftspiegelung unterscheidet sich die obige Theorie, wenn auch natürlich die Resultate übereinstimmen, in mehreren wesentlichen Punkten, und ich glaube dieselbe überhaupt dem grössten Theile nach als mein Eigenthum in Anspruch nehmen zu dürfen. Wie ich schon bemerkt habe, wird das eigentlich Physikalische den Gegenstand einiger späteren Aufsätze ausmachen, in denen ich auch angestellte Beobachtungen einer besonderen Untersuchung zu unterwerfen hoffe, in einer ähnlichen Weise, wie dies z. B. in einer früheren Abhandlung (Nr. V.) in diesem Theile der Beiträge mit den Lambert'schen Dämmerungsbeobachtungen geschehen ist.

---

*) Einen ausführlichen Auszug von Brandes s. m. in Gilbert's Annalen der Physik. Thl. XLVII. S. 237. u. S. 366.

**) Ein früheres Memoire von Gergonne vom Jahre 1808, welches derselbe in den Annalen a. a. O. p. 3. erwähnt, habe ich mir bis jetzt nicht verschaffen können.

---

Anmerkung. Zum Schluss bemerke ich noch, um jedem Missverständnisse vorzubeugen, dass in der vorhergehenden Abhandlung, sowie in allen die terrestrische oder astronomische Strahlenbrechung ganz oder theilweise betreffenden Abhandlungen, wenn auf Ansichten über die Natur des Lichts zurückgegangen werden muss, die ältere Theorie des Lichts festgehalten worden ist, was auch schon bei der Theorie des Regenbogens, wie ich in der denselben betreffenden Abhandlung am gehörigen Orte bemerkt habe, ganz absichtlich geschehen ist. Auf welcher Seite der beiden gangbaren Theorieen des Lichts die Wahrheit eigentlich liegt, scheint mir, nach sehr sorgfältiger Beschäftigung mit diesem Gegenstande, immer noch nicht ganz ausgemacht zu sein, und ich wünsche daher sehr, bald Zeit zu gewinnen, in diesen Beiträgen meine Ansichten hierüber darlegen und zur vergleichenden Kritik beider Theorieen Einiges beitragen zu können.

*G.*

---

# Die Lichterscheinungen der Atmosphäre

dargestellt und erläutert

von

R. Clausius.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Leipzig, 1850.
Verlag von E. B. Schwickert.

# Beiträge

zur

# meteorologischen Optik

und

# zu verwandten Wissenschaften.

---

In zwanglosen Heften

herausgegeben

von

*Johann August Grunert,*

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Erfurt, der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg und der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig, auswärtigem Mitgliede der Königlich Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, correspondirendem Mitgliede der Königlich Baierischen Akademie der Wissenschaften zu München, der Königlich Schwedischen Societät der Wissenschaften zu Upsala und der Kaiserlich Oesterreichischen Akademie der Wissenschaften zu Wien, ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Danzig, Halle, Marburg und Leipzig.

Erster Theil. Viertes Heft.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

---

Leipzig, 1850.

Verlag von E. B. Schwickert.



# VIII.

# Uebersichtliche Darstellung der in das Gebiet der meteorologischen Optik gehörenden Erscheinungen.

Von

***Herrn Doctor R. Clausius,***

zu Berlin.

(Zu diesem Aufsatze gehören Taf. VII. bis Taf. XI.)

Die verschiedenen Vorgänge in unserer Atmosphäre, welche durch ihren gebieterischen Einfluss auf das gesammte organische Leben von jeher die Aufmerksamkeit der Menschen besonders auf sich ziehen mussten, sind dessenungeachtet noch wenig ergründet, und es ist eine merkwürdige Thatsache in der Geschichte der menschlichen Erkenntniss, dass, während der Forscher in die innersten Geheimnisse der Natur eindringt und ganz neue Erscheinungen und Kräfte entdeckt, von deren Vorhandensein früher kein Mensch eine Ahnung hatte, während er diese in ihren Wirkungen zu verfolgen und ihre Gesetze zu entwickeln vermag, dennoch so gewöhnliche und so grossartige Ausbrüche von Naturkräften, wie das Gewitter und der Hagel, ihm noch voller Dunkelheiten oder ganz unerklärlich geblieben sind; fast als hätte die Vorsehung sie absichtlich seinen forschenden Blicken verschlossen, um ihn vor Hochmuth über das schon errungene Wissen zu bewahren und zu immer neuen Bemühungen anzuspornen.

Dasselbe gilt auch von den vielen Lichterscheinungen, welche die Natur uns darbietet. An einigen hat die Wissenschaft allerdings schon glänzende Triumphe gefeiert, bei den meisten aber ist die Theorie theils noch nicht vollständig genug ausgeführt, theils noch in ihren Grundlagen unsicher und theils sogar noch ganz in den ersten rohen Anfängen begriffen.

Unter solchen Umständen bietet natürlich jede dieser Erscheinungen für sich ein weites Feld zu Betrachtungen dar, und es wer-

den bei jeder noch bedeutende Untersuchungen zu den schon vorhandenen hinzukommen müssen, um sie allmälig der vollkommenen Aufklärung entgegen zu führen. Je zahlreicher und ausgedehnter aber diese Arbeiten werden und je unabhängiger von einander sie dastehen, indem jede uns nur in das Innere einer einzelnen Erscheinung einführt und uns mit den Mängeln und Schwierigkeiten ihrer Theorie beschäftigt, desto mehr fühlt man das Bedürfniss, sich auch einen klaren Ueberblick über das ganze Gebiet zu erhalten, um jene einzelnen Arbeiten ihrer Stellung und Wichtigkeit nach besser beurtheilen und die Fortschritte unserer Erkenntniss nach allen Richtungen hin gemeinsam verfolgen zu können.

Ich glaube daher, dass ein Aufsatz, der es zum Zwecke hat, alle der meteorologischen Optik angehörigen Erscheinungen in ihren Grundzügen darzustellen und ihre Erklärungen so weit zu entwickeln, als es ohne höhere mathematische Betrachtungen angeht, in dieser Zeitschrift, die der Förderung jener Wissenschaft gewidmet ist, eine geeignete Stelle finden wird.

---

## Gestalt des Himmels.

Wenn man bei klarem Wetter auf freiem Felde steht, so findet der aufwärts gerichtete Blick nirgends eine Grenze, sondern dringt durch die Atmosphäre hindurch frei in den unendlichen Weltenraum. Die beschränkte Vorstellung kann jedoch diese Unendlichkeit nicht fassen, sondern glaubt sich unter einem blauen Gewölbe zu befinden. Welche Gestalt schreibt sie nun aber diesem subjectiven Gebilde zu? Man nimmt häufig im Voraus an, es sei eine Halbkugel, in deren Mittelpunkte sich der Beobachter befinde, bei näherer Betrachtung überzeugt man sich jedoch bald, dass es viel flacher zu sein scheint. Diese Bemerkung, welche schon früher zuweilen gemacht war, wurde im vorigen Jahrhunderte von Smith durch ein sehr einfaches Verfahren bestätigt und auf bestimmte Maassverhältnisse gebracht. Er dachte sich nämlich einen vom Zenith nach dem Horizonte herabgehenden Bogen, halbirte diesen nach dem Augenmaasse und untersuchte dann, welchen Winkel die von seinem Auge nach dem Halbirungspunkte gezogene Gerade mit der Horizontalebene bildete. Wäre der Himmel eine Halbkugel, also jener Bogen ein Viertelkreis gewesen, so hätte der Winkel gleich 45° sein müssen. In der That aber ergab er sich nur zu etwa 23°. Um nun aus dieser Zahl bestimmte Schlüsse zu ziehen, muss man vorher noch eine allgemeine

Annahme über die Gestalt des Himmels machen. Nach der Voraussetzung von Smith soll er ein Kugelsegment bilden. In diesem Falle würde er aber an den äussersten Grenzen, wo er den Horizont berührt, schräge auf der Erdoberfläche zu stehen scheinen, während ich glaube, dass unsere Vorstellung ihm daselbst eine senkrechte Richtung zuschreibt. Demnach liegt es wohl näher, das Gewölbe, wie es auch Kaemtz*) thut, als die Hälfte eines abgeplatteten Sphäroids zu betrachten, und wenn man von dieser Ansicht ausgeht, so lässt sich mittelst der obigen Zahl der Grad der Abplattung bestimmen. Er ergiebt sich dabei als sehr bedeutend, nämlich so, dass uns ein Punkt des Horizontes über $3^1/_2$ mal soweit von unserem Standpunkte entfernt zu sein scheint, als das Zenith.

Ehe wir zur Erklärung dieser merkwürdigen Thatsache übergehen, müssen wir noch eine hierher gehörige bekannte optische Täuschung erwähnen, dass uns nämlich die Sonne und der Mond bei ihrem Auf- und Untergange viel grösser vorkommen, als wenn sie hoch am Himmel stehen. Es liegt nämlich in unserer Vorstellung, beide als Scheiben zu betrachten, welche sich an der Fläche des Himmelsgewölbes bewegen. Hätte nun eine solche Scheibe eine unveränderliche Grösse, so würde sie am Horizonte, wo sie am weitesten vom Beobachter entfernt ist, unter einem kleineren Sehwinkel, als bei höheren Stellungen, erscheinen. Da aber in der Wirklichkeit der Sehwinkel immer derselbe ist, so ziehen wir daraus unwillkürlich den Schluss, die Scheibe sei zur Zeit, wo sie im Horizonte steht, grösser als sonst.

Die Erklärung der scheinbaren Gestalt des Himmels sucht Kaemtz**) haupsächlich in seiner Färbung. Indem er nämlich in der Nähe des Horizontes nicht das klare Blau wie im Zenith, sondern ein mehr weissliches Ansehen zeige, so halte man ihn dort für weiter entfernt. Es möchte indessen noch fraglich sein, ob die grössere Helle beim Horizonte wirklich die Vorstellung einer grössern Entfernung erwecken müsse, und ausserdem ist auch die Voraussetzung selbst nicht mehr erfüllt, sobald der Himmel trübe ist, wodurch sich doch seine scheinbare Gestalt nicht ändert.

Die ältere Ansicht von Smith, welche in Bezug auf die Vergrösserung der Sonne und des Mondes im Horizonte sogar schon von Ptolemaeus aufgestellt wurde, stützt sich dagegen auf die Ne-

*) Lehrbuch der Meteorologie III. S. 45.
**) Met. III. S. 48.

benumstände, welche das Urtheil bei der Schätzung von Entfernungen leiten. Wenn wir einen Punkt des Himmels, — etwa einen Stern, — in der Nähe des Horizontes betrachten, so kommt uns der Weg dahin sehr lang vor, weil er an so vielen auf der Erdoberfläche befindlichen Gegenständen vorbeigeht. Blicken wir dagegen nach einem beim Zenith stehenden Sterne, so finden wir auf dieser Linie nichts, wonach wir ihre Länge beurtheilen, oder das Bewusstsein einer grossen Entfernung gewinnen könnten, und der Stern scheint uns daher näher zu sein. Ich glaube, zu diesen Gründen, von denen wenigstens der letztere nur negativ ist, noch folgenden positiven hinzufügen zu dürfen. Wir sehen niemals, dass bestimmte irdische Gegenstände, deren Grösse uns bekannt ist und die uns also durch ihre scheinbare Verkleinerung einen Maassstab für ihre Entfernung bieten, sich sehr hoch über die Erdoberfläche erheben, während wir in horizontaler Richtung bei jeder freien Aussicht solche Gegenstände bis in so weite Fernen erblicken, als unser Auge sie nur zu erkennen vermag. Demgemäss werden wir nun auch fremde Gegenstände, über deren Entfernung wir kein unmittelbares Urtheil, sondern nur das Bewusstsein haben, dass sie sehr weit sind, und die wir daher an die Grenze der sonst vorkommenden Entfernungen setzen, in horizontaler Richtung für weiter halten, als in vertikaler. — Dass durch ein solches Urtheil über den Abstand einzelner Gestirne auch die scheinbare Gestalt des ganzen Himmelsgewölbes bedingt wird, braucht nicht weiter erwähnt zu werden.

Ausser den vorigen Betrachtungsweisen scheint mir auch noch eine andere sehr nahe zu liegen, welche ebenfalls zu einer Erklärung derselben Erscheinung führt. Wenn wir am Himmel nur die Gestirne erblickten, so würde in uns die Vorstellung eines halbkugelförmigen Gewölbes entstehen, denn die Sonne, der Mond und die Abstände der Fixsterne von einander zeigen sich bei ihrer Bewegung immer unter denselben Sehwinkeln, und müssen daher, so lange das Urtheil noch unbefangen ist, den Schluss veranlassen, dass sie immer gleich weit von uns entfernt seien. Bei den Wolken dagegen bemerken wir unverkennbar, sowohl aus der Zunahme des Sehwinkels, als auch aus der grössern Deutlichkeit des Erkennens, dass sie, wenn sie vom Horizonte her nach dem Zenith zu kommen, auch unserem Standpunkte näher rücken, und sie allein würden daher die Vorstellung eines sehr flachen Gewölbes erwecken. Da wir nun aber das Bestreben haben, Alles, was wir am Himmel sehen, auf eine und dieselbe Fläche zu versetzen, so combiniren wir aus jenen beiden Vorstellungen die eines mittleren Ge-

wölbes, welches für die Sterne zu flach und für die Wolken zu erhaben ist.

Obwohl die vorstehenden Erklärungen wesentlich von einander verschieden sind, so ist es doch durchaus nicht nöthig, sich für eine derselben als die allein richtige zu entscheiden, sondern wahrscheinlich wirken alle in ihnen angeführten Umstände zusammen, um gemeinsam unser Urtheil über die Gestalt des Himmels festzustellen. Bei der Unbestimmtheit und Veränderlichkeit dieser Umstände sollte man vielleicht auch glauben, das Urtheil sei bei verschiedenen Personen und zu verschiedenen Zeiten sehr ungleich. Das scheint aber nicht der Fall zu sein, denn indem auch Kaemtz an verschiedenen Orten denselben Versuch wie Smith anstellte, fand er Winkel, die zwischen 19° 20′ und 24° 15′, also dem oben angeführten von 23° ziemlich nahe lagen. Auf der andern Seite ist es jedoch eine Erfahrung, dass man zuweilen den auf- oder untergehenden Mond noch grösser findet, als gewöhnlich, und dann mag der Grund wohl in einer eigenthümlichen Wolkenbildung oder einer dunkleren Färbung des Mondes liegen, welche ihn als besonders weit entfernt erscheinen lassen.

Die scheinbare Gestalt des Himmels ist oft für die richtige Beurtheilung der an ihm stattfindenden Vorgänge von Wichtigkeit und kann zu bedeutenden Täuschungen Veranlassung geben. Wenn man nämlich an der Vorstellung der Halbkugel festhält, so würde es z. B. ziemlich nahe liegen, von einer Erscheinung, welche man an einem Punkte gesehen hat, der dem Augenmaasse nach in der Mitte zwischen Zenith und Horizont lag, nachher zu sagen, sie habe etwa in einer Höhe von 45° stattgefunden, was dem Obigen nach ganz unrichtig wäre. Jene Gestalt verdient daher mehr Beachtung, als ihr gewöhnlich zu Theil wird, und es wäre zu wünschen, dass alle Beobachter des Himmels sich derselben stets klar bewusst wären, zumal da man für die Bezeichnung der Orte am Himmel doch dabei bleiben muss, diesen, wie es in der Astronomie gebräuchlich ist, als Halbkugel zu betrachten, und man dadurch leicht verleitet wird, dieselbe Betrachtungsweise auch auf die Anschauung zu übertragen.

---

## Erscheinungen, welche durch die Absorption und Reflexion des Lichtes in der Atmosphäre bedingt werden.

**Schwächung des Lichtes in der Atmosphäre.** Unsere Atmosphäre ist bei heiterem Wetter im hohen Grade durchsich-

tig, doch ist diese Durchsichtigkeit natürlich nicht vollkommen. Vielmehr kann die Schwächung des Lichtes bei seinem Durchgange durch die Luft, so unmerklich sie für geringe Strecken ist, bei grossen Entfernungen doch sehr bedeutend werden. Sie ist freilich den directen Messungen schwer zugänglich, weil es uns überhaupt an Mitteln gebricht, Lichtintensitäten mit einiger Genauigkeit zu bestimmen, indessen sind doch einige recht sinnreiche Versuche zu diesem Zwecke gemacht.

Saussure*) verfertigte dazu eine eigene Vorrichtung, die er Diaphanometer nannte. Sie bestand aus zwei ungleichen Tafeln, deren jede in der Mitte einen schwarzen Kreis enthielt, der eine von 2 Fuss, der andere von 2 Zoll Durchmesser. Diese Kreise waren umgeben von ebenso breiten weissen Ringen und der übrige Raum war mit Grün ausgefüllt, welche Anordnung Saussure durch Versuche als die zweckmässigste erkannt hatte. Stellte er diese Tafeln so neben einander auf, dass sie genau gleichmässig erleuchtet wurden, und entfernte sich dann allmälig, so konnte er ziemlich bestimmt die Entfernungen angeben, wo zuerst der kleinere und dann der grössere schwarze Kreis aufhörten, seinem Gesichte erkennbar zu sein. Wäre zwischen den Tafeln und seinem Auge keine Luft gewesen, so hätten diese beiden Entfernungen sich wie die Durchmesser der Kreise, also wie 1 : 12 verhalten müssen. Beim Versuche fand sich aber die letztere etwas zu klein. Die gemessenen Abstände waren nämlich 314 F. und 3588 F., und verhielten sich also wie 1:11,427. Indem Saussure dieses zu frühe Verschwinden des grössern Kreises der geringeren Lichtintensität zuschrieb, so folgte daraus, dass das Licht auf dem Wege von 3588—314 = 3274 F. im Verhältnisse von 12 : 11,427 oder 1 : 0,9522 geschwächt sein musste. Hieraus kann man die Schwächung für jede andere Entfernung berechnen.

Ein anderer Versuch wurde schon in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts von Bouguer mit dem Monde angestellt. Das Licht der Gestirne erleidet nämlich eine besonders starke Schwächung, weil es die ganze Atmosphäre zu durchdringen hat; diese Schwächung ist aber nicht immer gleich, sondern hängt davon ab, ob die Gestirne hoch oder niedrig am Himmel stehen, weil der Weg, den die Strahlen in der Atmosphäre zurückzulegen haben, um so grösser ist, je schräger er durch sie hindurchgeht. Diesen Unterschied nun

*) Mem. de Turin IV p. 425.

wollte Bouguer*) messen und wählte dazu, da ihm das Licht der Sonne zu stark und das eines Sternes zu schwach war, den Vollmond. In einer hellen Nacht, als der Mond gerade 19° 16′ hoch am Himmel stand, liess er ein Stück Papier von ihm beleuchten und hatte zugleich die Vorkehrung getroffen, dass ein eben solches daneben befindliches Papier nur von Kerzenlicht beleuchtet wurde. Indem er nun beide Flächen mit einander verglich, konnte er es durch Annähern und Entfernen der Kerzen dahin bringen, dass die letztere ebenso hell erschien, als die erstere, und die dazu nöthige Entfernung der Kerzen gab ihm dann das Maass für die Lichtstärke. Ebenso verfuhr er die folgende Nacht bei einer Höhe des Mondes von 66° 11′. Die Zahlen, die er dabei fand, zeigten, dass für diese beiden Höhen die Helligkeiten schon im Verhältnisse von 2 : 3 verschieden waren. Viel grösser aber wurde noch der Unterschied, wenn der Mond sich dem Horizonte näherte. Bouguer betrachtete ihn mehrmals gerade in dem Momente, wo er mit dem Rande den Meereshorizont berührte und maass dann seine Helle, wobei er fand, dass diese nur noch etwa $\frac{1}{2000}$ so stark war, als in der Höhe von 66° 11′. Wenn diese Zahl auch nicht als sehr zuverlässig anzusehen ist, so zeigt sie doch, wie gross der Einfluss der Atmosphäre werden kann.

Diese wenigen Versuche über die Lichtschwächung sind allerdings zur Feststellung einer so wichtigen Wirkung noch sehr unzureichend. Unsere Kenntniss von derselben wird indessen noch von einer andern Seite her bereichert. Die Atmosphäre schwächt nämlich auch die von der Sonne kommenden Wärmestrahlen, und die hier entstehenden Unterschiede sind unseren Messungen viel zugänglicher, weil wir dabei durch den Besitz des Thermometers unterstützt werden, so dass auch mehrere Physiker sich damit beschäftigt haben. Nehmen wir nun an, dass die Schwächung der Licht- und Wärmestrahlen gleich stark sei, — was freilich mit Sicherheit nicht erwiesen ist, — so können wir die letzteren Messungen auch unmittelbar auf das Licht anwenden.

Um nun die Resultate dieser verschiedenen Methoden unter einander vergleichen zu können, muss man sie alle auf einen bestimmten Fall anwenden. Dazu ist besonders der sehr geeignet, wenn ein Gestirn im Zenith steht, und also seine Strahlen gerade senkrecht durch die Atmosphäre gehen. Setzt man die Helle des Gestirns, wie sie einem Beobachter ausserhalb der Atmosphäre er-

*) Optice de diversis luminis gradibus dimetiendis, in lat. conv. a Richtenburg. Viennae 1762.

scheinen würde, $=1$ und berechnet nun nach allen jenen Angaben einzeln die Helle, welche ein Beobachter an der Erdoberfläche noch sieht, so erhält man lauter Werthe, die zwischen 0,59 und 0,81 liegen, und man kann als Mittelwerth etwa $0,75 = \frac{3}{4}$ annehmen. Demnach würde also das Licht auf einem so weiten Wege, wie er dem senkrechten Durchgange durch die Atmosphäre entspricht, ungefähr ein Viertel von seiner ursprünglichen Intensität verlieren.

Natürlich darf man diese Angabe nur als einen Durchschnittswerth betrachten, von dem die wahren Werthe unter verschiedenen Umständen sehr abweichen können, da die Durchsichtigkeit der Luft nicht immer gleich, sondern im hohen Grade von der Witterung abhängig ist. Welchen Einfluss die letztere übt, ist bis jetzt noch wenig ermittelt, doch scheint im Allgemeinen die Luft um so klarer zu sein, je trockener sie ist. Dafür spricht die häufige Bemerkung, dass man in den heissen Zonen die Sterne viel deutlicher erblickt als bei uns, und noch mehr die überraschende Klarheit, welche die Reisenden im Innern grosser Continente wahrgenommen haben. So sagt Olivier*) über die Trockenheit der Luft in Persien: „diese Trockenheit ist so gross, dass... im Sommer kein Thau auf den Pflanzen, kein nur einigermaassen merklicher Dunst in der Atmosphäre, kein Nebel auf den erhabensten Bergen und keine Wolke in der Luft bemerkt wird;“ und dann fährt er in Bezug auf die Klarheit fort: „der Himmel ist so rein, und die Sterne geben des Nachts soviel Licht, dass man eine grobe Schrift lesen und einen bekannten Menschen auf zehn Schritte deutlich erkennen kann.“ Dieselbe Durchsichtigkeit wird aus Africa berichtet und auch in Sibirien hat Hansteen sie beobachtet, woraus zugleich folgt, dass sie nicht bloss durch die grössere Wärme verursacht wird.

Neben dieser allgemeinen Regel hat die Erfahrung noch eine andere ihr beinahe entgegengesetzte aufgestellt, dass nämlich bei uns oft kurz vor oder nach einem Regen die Luft besonders durchsichtig erscheint, und ferne Gegenstände aus ihrer sonstigen Undeutlichkeit klar hervortreten. Diese Thatsche scheint ziemlich bekannt zu sein; beim Volke dient sie sogar zuweilen als Vorzeichen von Regen, und auch wissenschaftliche Beobachter haben sie bestätigt, z. B. Kaemtz**) auf seiner Alpenreise. Ihre Gründe aber, und besonders die Rolle, welche der dann gewiss reichlich vorhandene Wasserdunst dabei spielt, sind meines Erachtens noch nicht hinlänglich erklärt.

---

*) Reise durch Persien und Kleinasien I. Cap. 7.

**) Met. III. S. 28.

**Allgemeine Tageshelle.** Nachdem im Vorigen gezeigt ist, dass nicht alles Licht, welches die Sonne und die übrigen Gestirne der Erde zusenden, direct an der Erdoberfläche ankommt, sondern ein bedeutender Theil auf dem Wege durch die Atmosphäre verloren geht, so entsteht nun die Frage, was aus diesem verlorenen Lichte wird. Ein Theil desselben kann von der Luft absorbirt werden, so dass er, wenigstens in der Gestalt von Licht, nicht mehr vorhanden ist, doch ist über eine solche Absorption noch nichts mit Sicherheit bekannt. Dagegen steht es fest, dass ein grosser Theil reflectirt wird, und diese Fähigkeit der Atmosphäre, Licht zu reflectiren, muss als eine ihrer wichtigsten Eigenschaften angesehen werden. Ohne sie würde der Himmel vollkommen schwarz erscheinen, und auf diesem dunkelen Hintergrunde der Glanz der Sonne um so blendender hervortreten. Die von der Sonne direct beleuchteten Gegenstände würden sehr hell, dagegen alle im Schatten befindlichen fast ganz dunkel und unerkennbar sein. Durch diese scharfen Contraste von Licht und Schatten würde die Beleuchtung im Freien für unser Auge, wenigstens bei seiner jetzigen Einrichtung, unerträglich werden, während andererseits die gegen die Witterung geschützten Räume, wie das Innere unserer Häuser, der Wohlthat des Tageslichtes ganz entbehren würden.

Statt dessen sendet uns jetzt die Atmosphäre von allen Seiten reflectirte Strahlen, so dass das Himmelsgewölbe, welches uns rings umgiebt, in seiner ganzen Ausdehnung selbstleuchtend zu sein scheint, und aus diesem fast überall wahrnehmbaren Lichte entsteht die wohlthuende allgemeine Tageshelle.

Wir müssen nun aber diese Reflexion in der Atmosphäre etwas näher betrachten, und zwar zunächst ihre Ursache. Da die Luft nicht überall gleich dicht ist, sondern in den höheren Regionen dünner wird, so könnte man darin vielleicht den Grund der Reflexion sehen, indem das Licht bei jedem Uebergange aus einem dünneren Mittel in ein dichteres und umgekehrt, theilweise reflectirt wird. Diese Erklärung widerlegt sich aber ausser manchen anderen Widersprüchen schon dadurch, dass die Flächen gleicher Dichtigkeit in der Atmosphäre ziemlich nahe unter sich und mit der Erdoberfläche parallel sind, und daher die Reflexionen nur in bestimmten Richtungen geschehen könnten, während sich das atmosphärische Licht gerade durch die Eigenthümlichkeit auszeichnet, dass es nach allen Richtungen zerstreut ist, so dass man an jedem Puncte der Erdoberfläche von jedem Puncte des Himmels Strahlen empfängt.

Der letztere Umstand macht es nothwendig, anzunehmen, dass

überall durch die Atmosphäre unzählige Körperchen verbreitet seien, deren Oberflächen alle möglichen Lagen haben, und dass an diesen die Reflexion vor sich gehe. Die Natur dieser Körper und ihre besonderen Eigenschaften sind damit freilich noch nicht bestimmt. Man könnte noch zweifelhaft sein, ob sie der Atmosphäre ursprünglich fremd und nur durch äussere Ursachen hinein gekommen seien, oder ob sie vielleicht die Bestandtheile der Atmosphäre selbst bildeten, indem man sich z. B. vorstellte, die Luft bestehe aus getrennten Theilen, die zwar sehr klein, aber doch gross genug seien, um eine regelmässige Reflexion zu bewirken. Es giebt indessen gewisse Gründe, aus welchen sich bestimmte Folgerungen ziehen lassen, und ich habe in einem hierauf bezüglichen Aufsatze*) nachgewiesen, dass man sich unter jenen Körpern, wenn man nicht auf Widersprüche gerathen will, nur Wasserbläschen denken könne.

Wenn nämlich ein Lichtstrahl einen durchsichtigen Körper durchdringt, so wird er dabei im Allgemeinen gebrochen, so dass er in anderer Richtung weiter geht, als in der er angekommen ist. Dieses lässt sich auch auf die Körperchen in der Atmosphäre anwenden, sofern man dieselben nicht etwa als undurchsichtig betrachtet, was gegen alle Wahrscheinlichkeit sein würde. Das Sonnenlicht, welches auf seinem Wege ein solches Körperchen trifft, wird zwar zum Theil an seiner Oberfläche reflectirt, der übrige Theil aber dringt hindurch, und dieser unterliegt den gewöhnlichen Brechungsgesetzen. Danach sollte man also erwarten, dass der Theil des Sonnenlichtes, welcher zur Erde gelangt, dort nicht in seiner ursprünglichen, sondern in verschiedenen von jener nach allen Seiten hin abweichenden Richtungen ankommen würde, so dass man statt der scharf begrenzten Sonnenscheibe einen unbestimmten über den Himmel verbreiteten Glanz sehen müsste. Da dieses sich nun aber nicht bestätigt, sondern die Strahlen in unveränderter Richtung zu uns kommen, so findet hier ein Ausnahmefall statt, der nur durch die eigenthümliche Gestalt jener Körper veranlasst sein kann, und es erhebt sich daher die Frage, welche Gestalt dieselben haben müssen, um zwar eine Reflexion, aber keine Brechung zu verursachen. Dazu ist die Gestalt von Platten mit parallelen Grenzflächen nothwendig, denn nur diese haben die besondere Eigenschaft, dass die beiden Brechungen, die beim Ein- und Austritt des Strahles an den parallelen Flächen geschehen, sich gegenseitig aufheben, während die zugleich stattfindenden Reflexionen sich addiren. Solche

*) Pogg. Ann. B. 76, S. 161.

Platten in der Atmosphäre vorauszusetzen scheint nun zwar auf den ersten Blick etwas unnatürlich, und doch kommen dergleichen schon nach der gewöhnlichen Annahme in ihr vor. Es sind nämlich die Dampfbläschen. Ein Bläschen bietet dem hindurchgehenden Strahle nicht eine zusammenhängende Masse dar, sondern da es hohl ist, muss der Strahl, um in den innern Raum zu gelangen, ein Wasserhäutchen durchdringen, und ebenso um wieder daraus hervorzugehen, und dieses Häutchen kann man an jeder der beiden Stellen als eine Platte mit parallelen Grenzflächen betrachten, zumal wenn es recht dünn ist. Hienach würde man also annehmen müssen, dass selbst bei dem klarsten Wetter noch einige feine Dampfbläschen in der Luft vorhanden seien, welche die Lichtreflexion bewirkten. Die dazu erforderliche Anzahl ist auch verhältnissmässig nur sehr gering, denn jedes Bläschen bewirkt eine bedeutende Reflexion, da der hindurchgehende Strahl auf vier Flächen trifft, an denen er theilweise reflectirt wird.

Was nun die Stärke des atmosphärischen Lichtes betrifft, so würde es bei seiner Wichtigkeit für das gemeine Leben gewiss von grossem Interesse sein, einige genauere Messungen darüber zu erhalten. Dahin gehört z. B. die Ermittelung der Lichtmenge, welche wir bei verschiedenen Stellungen der Sonne und unter verschiedenen Witterungsverhältnissen aus der ganzen Atmosphäre, also scheinbar vom ganzen Himmelsgewölbe erhalten, verglichen mit der, welche von der Sonne direct zu uns gelangt; ferner die Helle, welche der Himmel an seinen verschiedenen Puncten zeigt, im Verhältniss zur Helle der Sonnenscheibe oder des Mondes. Es sind in dieser Beziehung jedoch noch wenige Versuche angestellt. Bouguer führt zwar einige Beobachtungen an, mittelst deren er die Helle verschiedener Puncte des Himmels unter einander zu vergleichen suchte*), doch theilt auch er nur einige allgemeine Resultate meistens ohne die dazugehörigen Zahlen mit. Die Hauptschwierigkeit, welche alle genaueren Messungen der Art verhindert, liegt, wie schon oben erwähnt, in der Unvollkommenheit unserer Mittel, die Lichtstärke zu bestimmen.

Wir sind demnach bis jetzt darauf beschränkt, uns wenigstens theoretisch einigermaassen klar zu machen, wie die Atmosphäre auf das Licht wirkt. Dabei handelt es sich natürlich nicht um eine einfache Reflexion, sondern ebenso, wie das directe Sonnenlicht auf

*) Optice p. 34.

seinem Wege durch die Atmosphäre allmälig mehr und mehr an Intensität verliert, so hat auch das reflectirte Licht keinen freien Durchgang, sondern wird selbst wieder theilweise reflectirt, dieses doppelt reflectirte dann zum dritten Male, und so bis in's Unendliche. Auch das wirklich auf der Erdoberfläche angelangte Licht ist dadurch noch nicht zur Ruhe gekommen, sondern davon wird wieder ein Theil zurückgestrahlt, und erleidet dann abermals die unendlichen Reflexionen in der Atmosphäre. Erst unter Berücksichtigung dieser verschiedenen Vorgänge kann man berechnen, wieviel von dem reflectirten Lichte in den Weltenraum ausgestrahlt wird, und dadurch für die Erde verloren geht, und wieviel ihr dagegen nach allen wiederholten Reflexionen endlich doch zu gute kommt, und in welcher Weise dieses den Himmel erscheinen lässt. Es würde hier zu weit führen, auf diese Untersuchungen näher einzugehen, und ich will daher nur noch einige Zahlen anführen, zu denen ich in einer nach dem Vorgange Lambert's angestellten Berechnung dieses Gegenstandes*) gelangt bin. Diese Zahlen sind indessen dort nur beispielsweise, mit Hülfe besonderer Annahmen, aus den allgemeinen Formeln abgeleitet, und können daher nicht eine ebenso allgemeine Gültigkeit, als die Formeln selbst, beanspruchen, was bei der Veränderlichkeit des Zustandes der Atmosphäre zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten, auch überhaupt nicht möglich ist.

Die Lichtmenge, welche irgend ein horizontales Flächenstück der Erde, etwa eine Quadratruthe, von der Sonne empfängt, hängt in doppelter Weise von deren Höhe ab. Erstens ist die Projection der Fläche auf eine senkrecht gegen die ankommenden Strahlen gerichtete Ebene, um so kleiner, und zweitens der Weg durch die Atmosphäre um so länger, je schräger die Strahlen kommen. In der nachstehenden Tabelle sind die dadurch bedingten Lichtmengen für einige Höhen der Sonne angegeben, und daneben befinden sich die Lichtmengen, welche dasselbe Flächenstück zu gleicher Zeit vom ganzen Himmel empfängt. Als Einheit ist dabei die Lichtmenge genommen, die das Flächenstück von der Sonne erhalten würde, wenn diese im Zenith stände, und keine Atmosphäre vorhanden wäre.

*) Crelle's Journ. B. 34 und 36 und im Auszuge Pogg. Ann. B. 72.

| Zenithabstand der Sonne. | Menge des directen Sonnenlichtes, wenn es nicht durch die Atmosphäre geschwächt würde. | Menge des directen Sonnenlichtes nach geschehener Schwächung durch die Atmosphäre. | Menge des vom ganzen Himmelsgewölbe kommenden Lichtes. |
|---|---|---|---|
| 0° | 1 | 0,75 | 0,186 |
| 30° | 0,866 | 0,621 | 0,177 |
| 60° | 0,5 | 0,281 | 0,138 |
| 80° | 0,174 | 0,033 | 0,067 |

Man sieht hieraus, einen wie bedeutenden Theil das vom Himmelsgewölbe kommende Licht zur allgemeinen Tageshelle beiträgt. Wenn die Sonne noch 10° vom Horizonte steht, ist es schon doppelt so stark als das direct von der Sonne kommende, und bei tieferem Stande wird dieses Verhältniss noch immer grösser.

In Bezug auf die Helle des Himmels wollen wir uns hier auf zwei allgemeine Sätze beschränken, die die Grundlage für die Vertheilung des Lichtes am Himmel bilden, nämlich dass die Helle in der Umgegend der Sonne immer am grössten ist, und von da aus mit wachsender Entfernung abnimmt, und dass sie in der Nähe des Horizontes grösser ist, als in höheren Regionen. Ausserdem möge noch durch eine Zahl das Verhältniss der Helle des Himmels zu der der Sonne angedeutet werden. Wenn wir die Helle der Sonne ausserhalb der Atmosphäre gleich 1000000 setzen, welcher Werth z. B. für den Fall, dass die Sonne 30° hoch steht, durch die in der Atmosphäre stattfindende Schwächung auf 562500 reducirt wird, so erreicht die Helle des Himmels an keiner Stelle den Werth 12, und an den meisten Puncten ist sie noch bedeutend geringer.

**Die Dämmerung.** Der wichtige Einfluss, den die Atmosphäre auf das Sonnenlicht übt, tritt besonders deutlich hervor, wenn

die Sonne unter den Horizont hinab gesunken ist. Schon die Erscheinung des Sonnenunterganges, — und dasselbe gilt natürlich vom Aufgange, — würde ohne die Atmosphäre eine ganz andere sein, als jetzt. Die ganze Lichtmenge, welche ein Theil der Erdoberfläche von der Sonne empfängt, würde zwar auch dann während des Herabsinkens derselben allmälig immer geringer werden, aber dadurch würde nicht eine gleichmässige Abnahme der allgemeinen Helle bewirkt werden, sondern während die schwarzen Schatten der hervorragenden Gegenstände wüchsen und bald den ganzen Boden bedeckten, würden die wenigen erhabenen und der Sonne zugekehrten Stellen aber, welche ihren Strahlen ausgesetzt blieben, immer noch dieselbe Helle zeigen, wie am hohen Mittage. Licht und Schatten würden also nicht an Intensität abnehmen, und dadurch in einander übergehen, sondern nur an Ausdehnung würden sie sich ändern, bis endlich mit dem Verschwinden der letzten hellen Puncte vollkommene Nacht einträte. Durch die Wirkung der Atmosphäre dagegen wird der blendende Glanz der Sonne immer mehr gemildert, je tiefer sie sinkt, und dadurch gewinnt die Helle des Himmelsgewölbes immer mehr an Bedeutung, denn obwohl diese nicht, wie es den Anschein haben könnte, wächst, so nimmt sie doch viel langsamer ab, als das directe Sonnenlicht. Daher kommt es, dass man den Moment des Unterganges der Sonne an Orten, wo man diese nicht gerade vor Augen hat, gar nicht bemerkt, und nach dem Untergange das atmosphärische Licht allein die Nacht, die eigentlich gleich mit jenem Momente ihre volle Herrschaft beginnen sollte, noch lange zurückhält, und uns die wohlthuende Uebergangsperiode der Dämmerung bereitet, die uns ebenso auch gegen Morgen schon wieder erfreut, lange ehe noch die Sonne den Horizont erreichen kann.

Um nun auf die Betrachtung der Dämmerung näher einzugehen, ist es zunächst nöthig, ihre äusseren Eigenschaften und besonders ihre Dauer festzustellen. Aber wie soll man diese letztere bestimmen, da die Dämmerung in der Natur nicht durch eine plötzliche Veränderung begrenzt wird, sondern ganz allmälig in die Nacht übergeht? Eine unbedingt maassgebende Entscheidung ist da überhaupt nicht möglich, aber man kann sich wenigstens, um Uebereinstimmung in die Angaben zu bringen, über gewisse Merkmale einigen, nach welchen man sein Urtheil in dieser Beziehung richten will. Im gemeinen Leben pflegt man die Dämmerung nur so lange anzuerkennen, als ihr Licht noch für die gröberen häuslichen Geschäfte ausreicht, oder bis die ersten Sterne am Himmel erscheinen,

und diese Zeit bezeichnet man mit dem Namen der **bürgerlichen** Dämmerung. In der Wissenschaft dagegen verfolgt man die Erscheinung noch weiter und setzt erst das Sichtbarwerden der kleinsten Sterne, die dem blossen Auge selbst mitten in der Nacht überhaupt noch wahrnehmbar sind, als ihre Grenze, denn da das atmosphärische Licht die Ursache ist, weshalb wir bei Tage die Sterne nicht sehen können, so bildet das Erscheinen der letzten unter ihnen einen Beweis für das Aufhören desselben. Diesen Zeitpunkt nennt man das Ende der **astronomischen** Dämmerung.

Da die Dämmerung nur so lange wahrnehmbar sein kann, als die Sonne noch nicht zu tief unter den Horizont gesunken ist, so entstand die Frage, welche Tiefe als die Grenze zu betrachten und da hat man durch mehrere ziemlich übereinstimmende Beobachtungen gefunden, dass für unsere Gegenden die bürgerliche Dämmerung aufhört, wenn die Sonne 6°, und die astronomische, wenn die Sonne 18° unter dem Horizonte steht. Nimmt man diese Angaben als sicher an, so kann man aus ihnen auf mathematischem Wege bestimmen, wie lange an irgend einem Orte der Erde und einem bestimmten Tage des Jahres die Dämmerung dauern muss, indem man untersucht, wie lange Zeit die Sonne bedarf, um eine unter dem Horizonte liegende Zone von 6° oder 18° zu durchlaufen. Man übersieht leicht, dass es dabei besonders darauf ankommt, ob die Sonnenbahn jene Zone senkrecht oder schräge durchschneidet, und dass daher die Dämmerung im Allgemeinen in der gemässigten und kalten Zone länger als in der warmen, und dass sie an jedem Orte mit den Jahreszeiten veränderlich sein muss. Einige bestimmtere Resultate der mathematischen Betrachtungen sind für die **astronomische** Dämmerung folgende.

Am Aequator sind die Dämmerungen wenig von einander verschieden. Die kürzesten, welche zu den Zeiten der Aequinoctien stattfinden, betragen $1^h\ 12^m$, und die längsten, welche mit den Solstitien zusammenfallen, $1^h\ 19^m$. In höheren Breiten fallen die kürzesten Dämmerungen zwar auch in den Frühling und Herbst, aber nicht gerade auf die Aequinoctien, die längsten dagegen entsprechen auch hier den beiden Solstitien. Die letzteren sind indessen nicht unter einander gleich, sondern die in den Winter fallende ist kürzer als die in den Sommer fallende, und bei dieser findet noch ein besonderer Umstand statt. Wenn nämlich die Breite des Beobachtungsortes grösser ist, als $48^1/_2{}^0$, so sind die Nächte zur Zeit des Sommersolstitiums so kurz, dass sich die Morgendämmerung unmittelbar an die Abenddämmerung anschliesst, und also die Dämmerung gar nicht aufhört. Die Anzahl der Nächte, in denen dieses stattfindet,

— der hellen Nächte, — ist um so grösser, je weiter der Ort vom Aequator entfernt liegt. Nehmen wir z. B. einen Ort auf dem 50. Breitengrade an, so fallen hier die kürzesten Dämmerungen auf den 3. März und 11. October und dauern $1^h$ $50^m$, die längste Winterdämmerung beträgt $2^h$. $4^m$, und im Sommer gehen die hellen Nächte vom 1. Juni bis zum 12. Juli, während welcher Zeit also die Abend- und Morgendämmerung, jede über $3\frac{1}{2}^h$ dauern muss. Geht man noch weiter nach den Polen zu, so gewinnen die Dämmerungen immer mehr an Ausdehnung, besonders in den kalten Zonen, wo während längerer Zeit die Sonne gar nicht über dem Horizont erscheint. An den Polen selbst dauert die Abend- und Morgendämmerung, wenn man die Dämmerungen, welche die halbjährige Nacht einleiten und beendigen, so nennen will, jede etwas über 51 Tage.

Bei der bürgerlichen Dämmerung finden ganz ähnliche Verhältnisse, nur im beschränkteren Maassstabe statt. Für den 50. Grad hat man z. B. folgende Werthe. Die kürzesten, welche am 15. März und 29. September eintreten, dauern etwa $35^m$, während die längste im Winter $41^m$ und im Sommer $47^m$ beträgt.

Diese Untersuchungen über die Dauer der Dämmerung und die damit zusammenhängenden Aufgaben, z. B. die Tage der kürzesten Dämmerung zu finden, deren Lösung bedeutende Schwierigkeiten macht, haben sich einer grossen Aufmerksamkeit der Mathematiker zu erfreuen gehabt, und haben namentlich durch die Brüder Joh. und Jac. Bernoulli, deren ersterer über fünf Jahre mit ihnen beschäftigt gewesen ist, eine gewisse Berühmtheit in der Wissenschaft erlangt. Man kann indessen nicht sagen, dass unsere Kenntniss von der Erscheinung selbst dadurch sehr gefördert sei, weil man bei der grossen mathematischen Genauigkeit zu wenig an die Veränderlichkeit der mitwirkenden physikalischen Umstände gedacht hat.

Da nämlich die Dämmerung durch Reflexion des Lichtes in der Atmosphäre bewirkt wird, die letztere aber unter verschiedenen Witterungsverhältnissen sehr ungleiche Durchsichtigkeit und daher auch ungleiche Reflexionskraft besitzt, so wird die Tiefe der Sonne unter dem Horizonte, von welcher aus sie uns noch Licht in merkbarer Menge heraufsenden kann, nicht immer gleich sein, und die obigen Werthe 6° und 18°, auf welchen alle anderen angeführten Zahlen beruhen, können nur als ungefähre Mittelwerthe für unsere Gegenden betrachtet werden. Es scheint, als müsse man sie in den nördlicheren Gegenden grösser und in den südlicheren, besonders in denen, die sich durch Trockenheit auszeichnen, kleiner annehmen, indem man in den Polargegenden zuweilen beobachtet hat,

dass die Dämmerungen unverhältnissmässig lang seien, während man sie in den heissen Ländern wieder viel zu kurz findet. In letzterer Beziehung erzählt z. B. Germar aus Dalmatien*): „Die bekannte Erscheinung, dass nach dem Aequator zu die Dauer der Abenddämmerung allmälig abnimmt, findet sich hier schon recht auffallend. Eine halbe Stunde nach Sonnenuntergang ist es vollkommen Nacht;" und in Cumana schreibt A. v. Humboldt**): „Pendant le crépuscule, qui ne dure que quelques minutes...." Wenn man hierbei vielleicht auch nicht an die vollständige astronomische Dämmerung zu denken hat, so kann man daraus allein doch nicht die bedeutenden Abweichungen von den obigen mathematischen Resultaten erklären, und man muss den Grund unzweifelhaft in der mit der grössern Klarheit verbundenen geringeren Reflexionsfähigkeit der Luft suchen.

Alle hiernach bei der Dämmerung mitwirkenden Umstände in den allgemeinen Rechnungen vollständig zu berücksichtigen, würde natürlich unmöglich sein, doch sollte man wenigstens jenen Mittelwerth, den wir zu 18° angenommen haben, in jedem Lande durch besondere Beobachtungen bestimmen, und die erhaltene Zahl den Rechnungen, welche für dieses Land gelten sollen, zu Grunde legen. Dieses ist auch schon von Bravais bei Berechnung einer für Frankreich gültigen Tabelle der Dämmerungen geschehen***), indem er sich durch zahlreiche, von ihm angestellte, aber noch nicht bekannt gemachte Beobachtungen bewogen gefunden hat, 16° an die Stelle von 18° zu setzen.

Wir haben unter den Eigenschaften der Dämmerung bisher nur von ihrer Dauer gesprochen, wir müssen nun aber auch den Verlauf der Erscheinung selbst betrachten. Sobald die Sonne im Westen unter den Horizont gesunken ist, kann man im Osten ein ziemlich deutlich begrenztes, dunkles Segment am Himmel entstehen sehen. Dieses wächst zuerst ganz langsam, mit der Zeit aber erhebt es sich schneller, erreicht das Zenith, breitet sich über dasselbe hinfort nach Westen aus und hat bald beinahe den ganzen Himmel überzogen, so dass nur noch ein kleines Segment im Westen hell geblieben ist. Das letztere sinkt dann wieder langsamer, und je kleiner es geworden ist, desto allmäliger geschieht seine weitere Abnahme. Endlich aber verschwindet auch der letzte helle Schein, und

*) Reise nach Dalmatien und Ragusa. S. 115.
**) Voyage aux regions equinoxiales etc. XI. 17.
***) Annuaire météorologique de la France pour 1849. p. 34.

dieser Moment bezeichnet viel genauer, als der Grad der Dunkelheit, das Ende der Dämmerung.

Dieser Vorgang, der das eigentliche Wesen der Dämmerung bildet, ist zwar schon längst bekannt und von Vielen wahrgenommen, aber von sehr Wenigen mit genauen Messungen verfolgt. Die vollständigste Beobachtung der Art, die wir besitzen, ist noch immer die, welche Lambert im November 1759 auf einer Sternwarte zu Augsburg angestellt hat. Die Beschreibung, welche er davon giebt, ist in einem frühern Aufsatze dieses Bandes*) schon einmal wörtlich enthalten, und ich will daher hier nur soviel anführen, als nothwendig ist, um den Gang der Erscheinung zu übersehen und die nachfolgenden Betrachtungen daran zu knüpfen.

| Zeit der Beobachtung. Stunde. | Minuten. | Tiefe der Sonne unter dem Horizonte. | |
|---|---|---|---|
| IV | 26 | 0 | Sonnenuntergang. |
| — | 29 | 33′ | scheinbarer Sonnenuntergang**). |
| — | 36 | 1° 34′ | der östliche Himmel verdunkelt sich in der Nähe des Horizontes. |
| . . . | . . . | . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| V | 5 | 5° 56′ | der östliche Himmel ist bis zum Zenith beschattet. |
| . . . | . . . | . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| — | 19 | 8° 3′ | der helle Schein am westlichen Himmel hat noch eine Höhe von 8° 30′. |
| — | 25 | 8° 59′ | —— 7° 15′. |
| . . . | . . . | . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| — | 43 | 11° 48 | —— 5° 45′. |
| . . . | . . . | . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| VI | 4 | 15° 5′ | —— 3° 15′. |

hier wurde die Beobachtung wegen des störenden Einflusses des Zodiakallichtes und der eintretenden grösseren Kälte abgebrochen.

Lambert ist es auch, welcher bei der ihm eigenthümlichen Gründlichkeit die Erklärung der Dämmerung zuerst mit der gehörigen

---

*) S. 242—243.

**) Etwas später als der wahre Sonnenuntergang wegen der weiter unten zu erwähnenden Strahlenbrechung.

wissenschaftlichen Klarheit und Ausführlichkeit gegeben hat. Diese Erklärung wird noch bis jetzt ziemlich allgemein als die genügendste anerkannt, ohne dass man jedoch glauben darf, dass in ihr die Sache erledigt sei. Vielmehr bleibt zu einer vollständigen und überall mit den nöthigen quantitativen Bestimmungen ausgerüsteten Auseinandersetzung des ganzen Phänomens noch sehr viel zu thun übrig. — Wir wollen uns nun zur Erklärung selbst wenden und sie wenigstens in ihren Hauptzügen kurz entwickeln.

Sei in Fig. 1. der innere Kreis ein Querschnitt der Erdkugel, und der Ring, welcher zwischen ihm und dem äusseren Kreise enthalten ist, ein Querschnitt der Atmosphäre, welche der deutlicheren Zeichnung wegen im Verhältniss zur Erdkugel viel zu gross dargestellt ist. Sei ferner $O$ der Ort der Erde, wo wir uns befinden, so ist $AZB$ der für uns sichtbare Theil der Atmosphäre, auf dessen Beleuchtung es bei der Dämmerung ankommt. Wenn nun die Sonne in der Richtung der Tangente $OS_0$ steht, so geht sie für uns in $O$ gerade unter, und in diesem Momente beleuchtet sie noch uns und unsere ganze Atmosphäre. Wenn sie aber etwas tiefer gesunken ist, so dass sie etwa in der Richtung $CS$ steht, so kann nach $O$ kein Strahl mehr gelangen, und auch von unserer Atmosphäre ist der Theil $AMC$ verdunkelt (siehe Fig. $1_a$.). Dagegen ist der ganze Theil $CMB$ noch erleuchtet, und dieser sendet nach $O$ reflectirtes Licht. Der dunkle Theil $AMC$, dessen Höhe durch den Bogen $AC$ bestimmt wird, ist es, der sich in der Natur als das dunkle Segment darstellt, welches wir am östlichen Himmel erblicken, oder mit andern Worten, dieses Segment ist der Schatten, den die Erde auf ihre eigene Atmosphäre wirft. Ist die Sonne weiter bis zu der durch $S_1$ angedeuteten Stellung herabgesunken, so ist schon der grössere Theil unserer Atmosphäre $ANC_1$ (siehe Fig. $1_b$) verdunkelt, und nur noch der Theil $C_1NB$ empfängt directes Sonnenlicht, wovon er etwas nach $O$ reflectiren kann. Wenn endlich die Sonne die Stellung $S_2$ erreicht hat, welche gerade so bestimmt ist, dass die Tangente $S_2P$ bei ihrer Verlängerung den Punkt $B$ trifft, so hört die directe Beleuchtung des uns sichtbaren Theils der Atmosphäre ganz auf. Damit ist zwar noch nicht die Dämmerung überhaupt beendet, sondern nur der Theil, den man mit dem Namen der ersten Dämmerung bezeichnet; wir wollen indessen bei diesem vorläufig stehen bleiben, um einige nothwendige Bemerkungen daran zu knüpfen.

Es ist vorher gesagt, die nach Sonnenuntergang im Osten entstehende Verdunkelung des Himmels sei der Erdschatten. Daraus könnte man vielleicht schliessen, die Gestalt dieses Schattens, als

ein von einem Bogen begrenztes Segment, sei eine Folge der Kugelgestalt der Erde. Das würde aber unrichtig sein. Der Theil der Erdoberfläche, der hier in Betracht kommt, ist so klein, dass wir ihn beinahe als eben betrachten können, und dasselbe gilt von der oberen Grenzfläche der Atmosphäre. Somit muss jener Schatten, soweit wir ihn sehen können, von einer fast geraden Linie begrenzt sein. Da wir nun aber Alles, was wir am Himmel sehen, auf die Fläche eines hohlen Gewölbes versetzen, so nimmt dadurch die Gerade die scheinbare Gestalt eines Bogens an.

Bei der Beschreibung jenes Segmentes wurde angeführt, dass seine Bewegung sehr ungleich sei, indem es zu Anfang und zu Ende der Erscheinung sehr langsam, in der Zwischenzeit aber eine Weile mit bedeutender Geschwindigkeit fortschreite. Der Grund davon lässt sich aus der Figur leicht erkennen. Denken wir uns, der Punkt $C$ (Fig. 1) bewege sich von $A$ durch $Z$ nach $B$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit, was ziemlich nahe richtig ist, indem der Schatten in demselben Verhältnisse fortschreitet, wie die Sonne sinkt, und betrachten wir dabei das Verhalten der Linie $OC$, der Gesichtslinie von unserem Auge nach dem obersten Punkte des Schattens. Wenn $C$ sich bewegt, so muss $OC$ sich um $O$ drehen, und es fragt sich nun, ob ihre Winkelgeschwindigkeit ebenso, wie die Bewegung von $C$, gleichförmig sei, oder nach welchem Gesetze sie sich ändere. Da das Gewölbe $AZB$ sehr flach ist, — viel flacher als es in der Figur dargestellt ist, — so überzeugt man sich durch unmittelbare Anschauung, dass, so lange sich $C$ in der Nähe von $A$ befindet, die Winkelbewegung der Linie $OC$ nur sehr langsam sein kann, dass sie aber allmälich an Schnelligkeit zunehmen muss, um so mehr, je näher $C$ dem Punkte $Z$ rückt, und dass sie endlich nach Durchschreitung dieses Punktes ebenso wieder abnehmen und in den ersten Gang zurückkehren muss. Dieses Resultat entspricht ganz der Beobachtung, und eine genauere Rechnung zeigt sogar, dass die Unterschiede der Geschwindigkeit so bedeutend sind, wie man es aus jener wohl kaum erwartet hätte. Setzen wir nämlich voraus, die Höhe der Atmosphäre, soweit sie noch merklich Licht reflectirt, betrage 4 Meilen, wobei wir noch zu viel zugeben, indem, wie wir weiter unten sehen werden, diese Höhe jedenfalls geringer ist, so braucht der Schatten in der Nähe des Horizontes eben so viel Zeit zu einer Bewegung von $^1/_6{}^0$, als beim Zenith zu einer solchen von $30^0$. Daher kommt es, dass, wenn er sich in der ersten halben Stunde nach Sonnenuntergange nur vom Horizonte bis auf $10^0$ erhoben hat, er in den nächsten 5 Minuten bis $20^0$ steigt und in den

dann folgenden 5 Minuten bis zum Zenith und noch 30° darüber hinaus eilt. Diese ungleichmässige Bewegung des Segmentes äussert in der Natur noch eine besondere Wirkung. Da nämlich die Lichtmenge, welche wir vom Himmel empfangen können, davon abhängt, ein wie grosser Theil des Himmels selbst erleuchtet ist, so folgt aus dem Vorigen, dass die Helle nach Sonnenuntergange zuerst langsam, dann eine Zeit hindurch viel schneller, und darauf wieder langsam abnehmen muss. Obgleich dieser Unterschied in der Wirklichkeit durch das Licht der zweiten Dämmerung, welches gleichzeitig vorhanden ist und sich nicht in derselben Weise ändert, bedeutend gemildert wird, so ist er doch noch hinreichend, um ihn in den meisten Fällen bei einiger Aufmerksamkeit deutlich erkennen zu können. Der Zeitpunkt dieses Ueberganges tritt ein, wenn die Sonne etwa 6° unter dem Horizonte steht, und fällt also gerade mit dem zusammen, den man als das Ende der bürgerlichen Dämmerung angenommen hat, und man sieht daraus, dass diese letztere Bestimmung, die auf den ersten Blick etwas willkürlich zu sein scheint, doch ihren ganz natürlichen Grund hat.

Wir wollen nun zur Betrachtung der zweiten und dritten Dämmerung übergehen. Wählen wir in Fig. 1. z. B. die Stellung $S_1$ der Sonne, so ist von dem uns sichtbaren Theile der Atmosphäre nur das Stück $C_1NB$ den directen Sonnenstrahlen zugänglich. Dagegen ist es der unter $NB$ befindliche Theil noch fast überall und von hier aus gelangt eine grosse Menge reflectirten Lichtes in unsere Atmosphäre. Dieses Licht muss, um unser Auge zu treffen, noch einmal also im Ganzen wenigstens zweimal reflectirt werden, und wir nennen es daher Licht der zweiten Dämmerung. Bei dieser Benennung müssen wir aber noch eine Grenze feststellen. Betrachten wir in Fig. 1. das Flächenstück $OPD_2B$, so können aus dem durch dasselbe angedeuteten Raume Lichtstrahlen geradesweges in unsere Atmosphäre gelangen. Gehen wir aber weiter, über die Grenze $PD_2$ hinaus, so hört jene Möglichkeit auf. Ein Lichtstrahl, der von irgend einem Punkte unterhalb $PD_2$ ausgeht, kann unsere Atmosphäre nur dadurch erreichen, dass er unterwegs noch einmal reflectirt wird. Ehe er also in unser Auge gelangt, muss er wenigstens dreimal reflectirt sein. Daher beschränken wir das Licht der zweiten Dämmerung auf dasjenige, welches uns von dem Raume $OPD_2B$ zugesandt wird, und das, was aus noch weiterer Ferne kommt, rechnen wir zur dritten Dämmerung. Wir könnten zwar auch in dieser wieder eine Abgrenzung machen und noch eine vierte Dämmerung unterscheiden, aber schon die

dritte ist so schwach, dass sie kaum der Berücksichtigung verlohnt.

Aus dem Vorstehenden ist klar, dass die zweite Dämmerung nicht etwa erst beginnt, wenn die erste aufhört, sondern schon von vorn herein mit dieser zusammenwirkt. Ja ihre Wirkung ist sogar während des Bestehens der ersten stärker als nachher, nur kann sie neben dieser nicht so deutlich hervortreten, und gewinnt erst mehr und mehr an Geltung, wie diese sich ihrem Ende nähert. Ist letzteres erreicht, so wirkt sie allein weiter und besteht dann etwa noch ebenso lange fort, als die erste Dämmerung gedauert hat, nämlich bis zu einer solchen Tiefe der Sonne, dass der ganze Raum $OPD_2B$ verdunkelt ist. In der letzten Hälfte dieser Zeit ist ihr Licht aber schon so schwach, dass wir es nicht mehr bemerken können.

Dieser allmälig wachsende Einfluss der zweiten Dämmerung, noch ehe die erste verschwunden ist, so dass man deren Ende äusserlich gar nicht wahrnehmen kann, lässt sich deutlich in der oben angeführten Beobachtung von Lambert erkennen. Leiten wir nämlich die Bewegung des dunklen Segmentes am Himmel bloss aus der ersten Dämmerung ab, so ergiebt sie sich zwar, wie wir gesehen haben, als sehr ungleichförmig, aber in sofern findet wenigstens eine Regelmässigkeit statt, dass die Geschwindigkeiten auf der ersten und zweiten Hälfte des Weges einander entsprechen, so dass der Schatten genau in der Zeit vom Zenith bis zum Westhorizonte herabsinken muss, in welcher er vom Osthorizonte bis zum Zenith gestiegen ist. Dieser Schluss widerspricht aber der von Lambert gemachten Erfahrung. Etwa zur Zeit, wo die Sonne 6$^0$ unter den Horizont gesunken war, erreichte der Schatten das Zenith, also sollte man erwarten, dass er bei einer Tiefe der Sonne von 12$^0$ den westlichen Horizont erreicht und damit den letzten hellen Schein verdrängt haben würde. Das war aber nicht der Fall. Zu dieser Zeit hatte der helle Schein noch eine Höhe von über 5$^0$ und als die Sonne 15$^0$ tief gesunken war, stand jener noch 3$^1/_4$$^0$ hoch. Weiter hat Lambert die Beobachtung nicht fortgesetzt, aber man konnte schon sehen, dass der Schein erst bei einer Tiefe der Sonne von mehr als 18$^0$ ganz verschwinden würde, was auch mit unserer früheren Angabe über das Ende der astronomischen Dämmerung übereinstimmt. Man sieht also, dass die erste Dämmerung, deren Ende wir im vorliegenden Falle ungefähr bei 12$^0$ Tiefe der Sonne annehmen müssen, zur Erklärung der Erscheinung nicht ausreicht, sondern die zweite mit hinzu gezogen werden muss. Diese macht den bei der Ausbreitung des Schattens am westlichen Himmel übrigbleibenden Licht-

schein heller und grösser, als er sonst sein würde, und nach dem Aufhören der ersten Dämmerung lässt sie allein ihn ohne merkliche Veränderung fortbestehen, und es bedarf noch langer Zeit, bis auch sie dazu zu schwach wird.

Man hat von den Dämmerungsbeobachtungen in der Naturforschung eine eigenthümliche Anwendung gemacht, nämlich zur Bestimmung der Höhe der Atmosphäre, wenigstens soweit diese noch fähig ist, Licht in wahrnehmbarer Stärke zu reflectiren. Gewöhnlich ist man dabei von der Thatsache ausgegangen, dass die astronomische Dämmerung aufhört, wenn die Sonne 18$^0$ unter dem Horizonte steht. Indem man nun meinte, dieser Zeitpunkt sei zugleich auch das Ende der ersten Dämmerung, gelangte man zu der Höhe von 9—10 Meilen, welche seitdem zuweilen auch in Lehrbüchern angeführt wird. Aus dem Vorigen wissen wir aber, dass bei einer Tiefe von 18$^0$ die erste Dämmerung längst vorbei ist, und daraus folgt, dass jene Höhe unrichtig, und zwar, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man näher auf die Rechnung eingeht, viel zu gross sein muss.

Geeigneter für diesen Zweck sind solche Beobachtungen, wie die Lambert'sche, wenn man die zu verschiedenen Zeiten gemessenen Höhen des hellen Scheins im Westen mit der jedesmaligen Tiefe der Sonne vergleicht. Aber auch hierbei ist der Einfluss der zweiten Dämmerung störend. In Lambert's Beobachtung beginnt die Reihe der genauen Messungen um 5$^h$ 19$^m$, und bei der ersten derselben meinte Lambert die zweite Dämmerung noch vernachlässigen zu können. Er wandte sie daher zur Berechnung der Höhe der Atmosphäre an, und erhielt als Resultat 3,9 Meilen, was wahrscheinlich wegen jener Vernachlässigung noch etwas zu gross ist. Wählt man die spätern Messungen, und vernachlässigt auch bei diesen die zweite Dämmerung, so wird das Resultat bei jeder folgenden immer grösser, wie es in einem der vorstehenden Aufsätze S. 240 nachgewiesen ist, wo diese Höhen wirklich berechnet sind, und sich auf S. 249 zusammengestellt finden. Wählt man dagegen die noch vor 5$^h$ 19$^m$, nämlich um 5$^h$ 5$^m$ aufgezeichnete Angabe, dass der Schatten das Zenith erreicht habe, zur Berechnung, so erhält man einen kleinern Werth, wie Lambert, und zwar 3,3 Meilen, welcher in sofern die meiste Wahrscheinlichkeit für sich hat, als bei ihm der mögliche Einfluss der zweiten Dämmerung am geringsten ist.

Aus diesen Resultaten können wir nun wohl mit ziemlicher Sicherheit schliessen, dass die Höhe der Atmosphäre zwischen 3 und 4 Meilen liege, und wahrscheinlich näher an 3 Meilen. Dabei

ist aber nicht zu vergessen, dass es sich hier nur um die Höhe der Atmosphäre, soweit sie noch merklich Licht reflectirt, handelt. Nimmt man z. B. an, wie es weiter oben geschehen ist, dass die Reflexion durch Dampfbläschen verursacht werde, so bedeutet jene Zahl nur die Höhe, bis zu welcher sich solche Bläschen in der Luft erheben, ohne über die Höhe der Luft selbst etwas zu bestimmen.

**Die blaue Farbe des Himmels und die Morgen- und Abendröthe.** Bei den bisherigen Betrachtungen über das von der Atmosphäre zurückgestrahlte Licht ist noch eine besondere Eigenschaft desselben unerwähnt geblieben, nämlich seine Farbe. Das schöne Blau des Himmels, welches uns bei jedem Blicke in die Natur entgegentritt, und das prachtvolle Schauspiel der Morgen- und Abendröthe mit seinen wunderbaren Farbenwechseln, haben von jeher einen tiefen Eindruck auf das Menschengeschlecht gemacht, und sie mussten daher auch, als man zuerst anfing, von der blossen Anschauung der Farben zu einer wissenschaftlichen Betrachtung derselben fortzuschreiten, ein Hauptgegenstand der Untersuchungen werden. Die Erklärung war aber nicht leicht, weil sich gar keine Anknüpfungspunkte an sonst bekannte Erscheinungen boten, die als sichere Grundlage hätten dienen können, und es giebt daher wenige Gegenstände in der Naturlehre, über die so viele, ganz von einander abweichende Ansichten geltend gemacht wären, als über diesen.

Ein erster Erklärungsversuch wurde zu Anfang des 16. Jahrhunderts von L e o n a r d o  d a  V i n c i gemacht, und seine Ansicht, die zwar nach ihm noch einige Vertheidiger fand, später aber in Vergessenheit gerieth, ist in neuerer Zeit von G o e t h e mit besonderer Vorliebe wieder aufgenommen, der sie sogar als Urphänomen an die Spitze seiner Farbenlehre gestellt hat.*) Dieser betrachtet nämlich die Atmosphäre bloss als ein unvollkommen durchsichtiges oder trübes Mittel, und sagt nun, alle trüben Mittel haben die Eigenschaft, weisses Licht, welches man durch sie hindurch betrachtet, röthlich, dagegen die absolute, also schwarze Finsterniss blau erscheinen zu lassen. Das letztere finde auf den dunklen Weltenraum, das erstere auf das weisse Licht der Sonne Anwendung, besonders wenn diese in der Nähe des Horizontes stehe, so dass man nach ihr durch eine sehr dicke Luftschicht hindurchsehen müsse.

So sinnreich G o e t h e diese Theorie auch zu entwickeln gewusst

*) Farbenlehre I. S. 56 u. f.

hat, so liegt doch in ihrer Aufstellung eine solche Nichtachtung alles dessen, was über die Natur und Entstehung der Farben zu jener Zeit längst mit wissenschaftlicher Sicherheit ermittelt war, dass wir leider nichts zu seiner Vertheidigung entgegnen können, wenn ein englischer Physiker sagt:*) „Noch später ward sie, — diese Lehre, — zur Schande der neueren Physik, unter den chromatischen Grillen von Goethe wieder in's Leben gerufen."

Ausser diesem Versuche hat man, sofern wir von Munke's Behauptung, welcher das Blau des Himmels für eine optische Täuschung, für eine „bloss subjective" Farbe erklärte, absehen, noch besonders drei verschiedene Ansichten aufgestellt, ohne sie jedoch immer scharf von einander zu sondern.

Die erste, von Newton angeregte, geht davon aus, dass die Lichtreflexion durch die in der Atmosphäre befindlichen Wassertheilchen bewirkt werde, und schliesst dann weiter, dass diese ihrer Kleinheit wegen die blaue Farbe durch Interferenz verursachten. Die beiden übrigen suchen den Grund der Farben in der Luft selbst, und zwar legt die eine der Luft eine schwach blaue Färbung bei, die sich aber erst in sehr dicken Schichten erkennen lasse, die andere sagt, die Luft habe die Eigenschaft, die in dem weissen Lichte enthaltenen blauen Strahlen in stärkerem Verhältnisse zu reflectiren, und dafür die rothen um so reichlicher durchzulassen.

Die letzte dieser Theorien, welche besonders von Bouguer und später mit grosser Vollständigkeit von Brandes**) behandelt worden ist, hat wohl die weiteste Verbreitung gefunden. Sie unterliegt jedoch noch einer bedeutenden Schwierigkeit. Wenn nämlich die Luft die Ursache der rothen Farbe des Morgens und Abends wäre, so müsste, da die Luftmenge, welche uns umgiebt, immer ziemlich gleich gross ist, die Sonne auch bei jedem Auf- und Untergange gleich roth erscheinen. Nun sagt zwar Brandes, die in der Luft befindlichen wässerigen Dünste, welche am Tage dem blauen Lichte viel Weiss beimischen, und dadurch ein milchiges Ansehen des Himmels verursachen, wie es in der Nähe des Horizontes fast immer stattfindet, und zuweilen auch das ganze Gewölbe überzieht, diese Dünste müssten auch ebenso bei Abend auf das Roth wirken, und es je nach ihrer Menge mehr oder weniger in's Weiss hinüberziehen. Darin liegt aber ein Irrthum. Wenn man nämlich sagt, die Dünste

*) Forbes. Transact. of the Royal Soc. of Edinb. Vol. XIV und Pogg. Annal. B. 51ª S. 51.

**) Gehler's phys. Woerterb. N. A. Art. Abendröthe.

erscheinen bei Tage, also bei weisser Beleuchtung, weiss, so heisst das, wie es auch Brandes ausdrückt, sie werfen das auf sie gefallene Licht unzerlegt zurück. Dieselben Dünste können also am Abende, wenn sie von rothem Lichte beleuchtet werden, auch nur rothes Licht reflectiren, und können der Abendröthe unmöglich Weiss beimischen. Es kommt bei dieser Theorie in Bezug auf die Farbe nur darauf an, einen wie weiten Weg die Lichtstrahlen, die zu unserem Auge gelangen, vorher durch die Luft zurückgelegt haben. Ob sie dabei unterwegs eine Reflexion an einem Dunsttheilchen erlitten haben, oder nicht, ist ganz gleichgültig. Demnach würde der Dunst, ebenso wie es die Wolken thun, wohl dahin wirken können, der Abendröthe einr grössere Ausdehnung über den Himmel zu geben, aber ihre Farbe würde sich immer gleich bleiben. Statt dessen wissen wir, das diese Farbe an verschiedenen Tagen von einem gelblichen Weiss bis zum tiefen Roth in allen Nüancen abwechselt, und wir dürfen daher ihre Ursache nicht in etwas Beständigem, wie die Luft ist, sondern nur in etwas Veränderlichem suchen.

Zu jenen drei Erklärungsarten ist in jüngster Zeit noch eine neue hinzugekommen, welche durch eine besondere Beobachtung veranlasst wurde. Forbes*) nämlich, als er sich i. J. 1838 auf der Greenwich-Eisenbahn befand, blickte zufällig durch den aus dem Sicherheitsvertile der Locomotive ausströmenden Dampfstrahl nach der Sonne hin, und bemerkte zu seinem Erstaunen, dass sie in tief orangerother Farbe erschien. Hierdurch aufmerksam gemacht, verfolgte er die Sache weiter, und wusste sich Gelegenheit zu einer genaueren Untersuchung derselben zu verschaffen, welche er dadurch ausführte, dass er bei Nacht aus einem Hochdruckdampfkessel nach Belieben Dampf ausströmen liess, und durch diesen das Licht einer Laterne betrachtete. Das Ergebniss war folgendes. Dicht über dem Ventile sah man das Licht durch den Dampfstrahl ganz unverändert. Bewegte man die Laterne aufwärts, so begann in der Höhe von einigen Zollen die orange Färbung, und wurde bis zur Höhe von etwa 20 Zoll immer tiefer, von da ab jedoch wurde sie bei noch vermehrter Höhe nur undeutlicher, indem der Dampf immer undurchsichtiger wurde, und zuletzt ganz das Ansehen von Wolken annahm. Wenn hier an einzelnen dünnen Stellen doch noch etwas Licht durchschien, so war es ganz weiss.

Hieraus zog Forbes den Schluss, das Wasser komme in der Luft in drei verschiedenen Formen vor, in der eigentlichen Gasform,

*) Transact. of the Royal Edinb. Soc Vol. XIV und Pogg. Ann. B. 47 und 51.

in der es sehr durchsichtig und vollkommen farblos sei, ferner in der Form von Bläschen, die zu Nebeln und Wolken Veranlassung geben, und endlich in einer bisher noch unbekannten Form, die den Uebergangszustand zwischen jenen beiden bilde, und in der es die Fähigkeit besitze, weisses Licht roth zu machen. In diesem Uebergangszustande nun, meint er, befinde sich oft ein grosser Theil des in der Atmosphäre enthaltenen Wassers, und verursache dann die glänzenden Abendröthen. — In Bezug auf die blaue Farbe des Himmels dagegen schliesst er sich der Bouguer'schen Theorie an.

So sehr diese Betrachtungsweise bei der Darstellung von Forbes auch für sich einnimmt, so müssen wir doch versuchen, ob sich die in Rede stehenden Naturerscheinungen und ebenso jene Beobachtung nicht auch erklären lassen, ohne dass man einen neuen bisher unbekannten Zustand des Wassers zu Hülfe nimmt. Wir haben dazu um so mehr Grund, als wir oben gesehen haben, dass bei der Lichtreflexion in der Atmosphäre gerade die Bläschenform des Wassers eine wesentliche Bedingung bildet. Dadurch sind wir in Bezug auf das reflectirte Licht gewissermaassen gebunden, auch die Erklärung seiner blauen Farbe wo möglich aus derselben Form abzuleiten, und dieses gelingt in der That so leicht, und auch die rothe Farbe des durchgelassenen Lichtes schliesst sich so natürlich daran an, dass wir gerade darin eine Bestätigung jener Annahme, dass die Reflexion an Bläschendampf geschehe, finden können.

Wir brauchen zu diesem Zwecke keine neue Erklärung zu suchen, sondern nur zu der schon von Newton aufgestellten, wonach die blaue Farbe durch Interferenz bewirkt wird, zurückzukehren, und sie etwas weiter auszuführen *). Wir haben gesehen, dass jedes Wasserbläschen in Bezug auf einen Lichtstrahl zu betrachten ist, wie zwei hinter einander befindliche dünne Wasserplatten. Nun ist es aber bekannt, dass dünne Platten von irgend einer durchsichtigen Substanz das auffallende weisse Licht in veränderter Farbe reflectiren, die je nach ihrer Dicke verschieden ausfällt. Wenn die Platte sehr dünn ist, unter einer gewissen Grenze, so reflectirt sie nur blaues Licht, nimmt die Dicke aber über jene Grenze hinaus zu, so wird das Licht weiss, dann gelblich weiss, orange, roth, violet, blau u. s. f., wie die Farben in den Newton'schen Ringen auf einander folgen. Auch das hindurchgehende Licht wird durch solche Platten geändert, aber in viel geringerem Grade, so dass es erst durch mehrere hinter einander stehende Platten von gleicher Dicke

*) S. Pogg. Ann. B. 76, S. 188.

gegangen sein muss, ehe man die Färbung merken kann. Bei sehr dünnen Platten, unter der vorher erwähnten Grenze, ist die Farbe, die dann erscheint, orange.

Dieses lässt sich nun leicht auf die Atmosphäre anwenden. Bei heiterem Wetter muss man annehmen, dass die noch vorhandenen Bläschen meistens sehr dünn seien, und diese können dann nur die erste Farbe, das Blau reflectiren, welches um so reiner und tiefer sein muss, je klarer das Wetter ist, d. h. je weniger Bläschen vorhanden, und je feiner diese sind. Bis hierher hat man die Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung auch stets anerkannt, aber für den Fall, wo die Luft feuchter wird und dadurch die Bläschen an Dicke zunehmen, hat man geglaubt eine Schwierigkeit zu finden, die man der Theorie oft entgegengehalten hat, und die doch nur auf einem Irrthume beruht. Man hat nämlich gesagt: wenn die Bläschen dicker werden, so müssen sie auch die anderen Farben der Reihe nach reflectiren, und daraus würde nach jener Erklärungsweise folgen, dass der Himmel nach Umständen jede beliebige Farbe statt des Blau annehmen könnte. So darf man die Sache aber nicht betrachten. Wenn die Luft feuchter wird, so werden allerdings die schon vorhandenen Bläschen dicker, zugleich aber bilden sich auch fortwährend neue dünne. Das Blau kann also nie aufhören zu erscheinen, sondern es treten nur durch die dicker werdenden Bläschen allmälig mehr und mehr andere Farben hinzu. Auf diese Weise erhält man zunächst eine Mischung von Blau und Weiss; darauf: Blau, Weiss, gelblich Weiss; dann: Blau, Weiss, gelblich Weiss, Orange u. s. f. Es kann somit keine der andern Farben sich allein geltend machen, sondern sie vermögen nur das erste Blau durch ihre Beimischung immer unbestimmter zu machen, und zuletzt ganz in Weiss zu verwandeln, und so ist auch wirklich der Vorgang, den wir in der Natur wahrnehmen, wenn die Atmosphäre anfängt trübe zu werden.

Ebenso wie das Blau des reflectirten Lichtes lässt sich auch das Roth des durchgelassenen aus den oben angeführten Eigenschaften dünner Platten erklären. Nach diesen ist nämlich das Orangeroth die erste Farbe, welche bei sehr feinen Bläschen entstehen muss, und dem reflectirten Blau entspricht. So lange jedoch die Sonne hoch am Himmel steht, ist ihre Färbung zu schwach, um sich kenntlich zu machen. Erst wenn sie zum Horizonte herabgesunken ist, und nun ihre Strahlen einen viel längern Weg in der Atmosphäre zurücklegen, und daher auch eine viel grössere Anzahl von Bläschen zu durchdringen haben, tritt die Farbe deutlich

hervor, und es bildet sich die Abendröthe, oder beim Aufsteigen der Sonne die Morgenröthe. Diese sind freilich nicht blos auf die Sonnenscheibe beschränkt, sondern verbreiten sich weit in der Umgegend, und zuweilen bis zur entgegengesetzten Seite des Himmels; aber das erklärt sich, wie schon erwähnt, einfach daraus, dass, wenn das Licht der Sonne einmal roth gefärbt ist, es auch Alles, was es beleuchtet, roth erscheinen lässt. — Das Ansehen der Morgen- und Abendröthe muss gerade so, wie das Blau des Himmels, vom Zustande der Atmosphäre abhängig sein, indem sich bei wachsender Feuchtigkeit ebenfalls mehr und mehr fremde Farben beimischen, welche die Reinheit des Roth stören, und es bis zu einem matten gelblichen Weiss abschwächen können. Somit ergiebt sich die in der Natur stattfindende Veränderlichkeit dieser Erscheinungen als eine unmittelbare Folge der Theorie, und zugleich ersieht man die Möglichkeit, auch umgekehrt aus der Farbe und dem Glanze jener auf den Zustand der Atmosphäre zu schliessen, und die kommende Witterung voraus zu bestimmen, wobei freilich noch mancherlei Nebenumstände berücksichtigt werden müssen, die das Urtheil erschweren und unsicher machen.

Wenden wir uns nun zu der Beobachtung von Forbes, so erklärt sich diese folgendermaassen. Dicht an der Oeffnung besteht der Dampfstrahl noch fast ganz aus gasförmigem Dampfe, welcher auf das Licht keine Wirkung übt. Weiter oben entstehen einige dünne Bläschen und verursachen die orange Färbung, welche bis zu einer gewissen Höhe bei Vermehrung der Bläschen immer tiefer wird. Noch weiter aufwärts aber fangen die Bläschen an, theilweise zu dick zu werden, um noch Orange zu geben, und es entstehen daher auch andere Farben, die durch ihre Beimischung jene erstere immer undeutlicher und weisslicher machen, bis der Dampf endlich wegen der starken Vermehrung der Bläschen ganz undurchsichtig geworden ist. — Diese Erklärungsart ist übrigens von der, welche Forbes gegeben hat, gar nicht so sehr verschieden, denn der Zustand, in dem nur ganz dünne Bläschen vorkommen, ist in der That ein Uebergangszustand zwischen der Gasform ohne Bläschen und der Nebelform mit allen Abstufungen von dünnen und dicken Bläschen durcheinander, nur dass dieser Uebergangszustand nicht etwas wesentlich Neues ist, sondern schon den Anfang der letztern Form bildet.

Ehe wir diesen Gegenstand verlassen, wollen wir noch eines Instrumentes erwähnen, welches Saussure *) ersonnen hat, um die Tiefe

*) Mem. de Turin IV p. 409.

des Blau, welches der Himmel unter verschiedenen Umständen und an seinen verschiedenen Punkten zeigt, nicht bloss nach dem unbestimmten Eindrucke zu beurtheilen, sondern auf ein sicheres Maass zu bringen. Er verfertigte dazu eine Skale von 51 Schattirungen in Blau, welche vom Weiss bis zum vollkommenen Schwarz stufenweise an Dunkelheit zunahmen. Wollte er nun die Farbe an irgend einem Punkte des Himmels kennen lernen, so verglich er sie der Reihe nach mit jenen Schattirungen, bis er diejenige fand, die ihr am nächsten kam, was mit ziemlicher Sicherheit geschehen konnte.

Saussure selbst hat dieses Instrument, welches er Kyanometer — von κύανος, blau — nannte, häufig in den Alpen angewandt, und auch Humboldt hat ein solches auf seinen Reisen benutzt. Dadurch sind z. B. die Thatsachen, dass der Himmel auf hohen Bergen viel dunkler erscheint, als in der Ebene, und dass das Blau in südlicheren Ländern tiefer ist als bei uns, bestätigt, und der Grad der Verschiedenheit für mehrere Fälle gemessen. Ferner hat Humboldt bemerkt, dass der Himmel über dem Meere im Allgemeinen blasser ist, als im Innern von Festlanden, und an der Meeresküste konnte er sogar unterscheiden, dass der Himmel nach der Seeseite zu blasser erschien, als nach der Landseite*). Hieraus ersieht man, dass das Instrument die Unterschiede in der Feuchtigkeit der Luft ziemlich zuverlässig angiebt, und es könnte daher vielleicht zur Beurtheilung der Witterung, bei der die Feuchtigkeit von so grossem Einflusse ist, wenn es in Verbindung mit den übrigen meteorologischen Instrumenten sorgfältig angewandt würde, einen erheblichen Vortheil gewähren.

**Polarisation des Himmelslichtes.** Bald nach Entdeckung der Polarisation des Lichtes im Anfange dieses Jahrhunderts bemerkten mehrere Physiker, dass auch das vom Himmelsgewölbe kommende Licht polarisirt sei. Diese Wahrnehmung war besonders in sofern wichtig, als in ihr der Beweis lag, dass die Atmosphäre das Licht, welches sie zurückstrahlt, nicht in der Weise zerstreut, wie die Oberfläche eines beleuchteten rauhen Körpers, sondern dass eine regelmässige Reflexion in ihr vorgeht. Die Sache erweckte bald allgemeineres Interesse, und bei der Aufmerksamkeit, die ihr mehrere der geschicktesten Beobachter bis in die neueste Zeit gewidmet haben, ist noch manche unerwartete Eigenschaft zum Vorschein gekommen.

Beziehen wir zunächst die Polarisation auf dasjenige Licht,

*) Voyage aux etc. II. p. 123.

welches schon nach Einmaliger Reflexion in unser Auge gelangt, so lassen sich aus den gewöhnlichen Polarisationsgesetzen auf die Stärke der Polarisation an den verschiedenen Punkten des Himmels und die Lage der Ebenen, in welchen sie stattfindet, einfache Schlüsse ziehen. Nämlich, dass die Polarisation in den Theilen des Himmels, welche beinahe um einen Quadranten von der Sonne entfernt sind, am stärksten sein muss, dagegen in denen, welche die Sonne unmittelbar umgeben, und ebenso in denen, welche ihr gerade entgegengesetzt sind, und die sich also nur bei ganz niedrigem Stande der Sonne beobachten lassen, am schwächsten; und dass ferner die Ebene, in der das von irgend einem Punkte des Himmels kommende Licht polarisirt ist, mit derjenigen Ebene zusammenfallen muss, die durch diesen Punkt, die Sonne und das Auge des Beobachters geht.

Beides wird von der Erfahrung im Allgemeinen bestätigt. In letzterer Beziehung ist sogar kürzlich von Wheatstone ein auf jenem Gesetze beruhender Apparat angegeben, um an solchen Orten, wo man die Sonne nicht sehen kann, sondern den nördlichen Theil des Himmels vor sich hat, aus der Polarisationsebene des Himmelslichtes auf den Stand der Sonne und somit auf die Tageszeit zu schliessen: also gewissermaassen eine im Schatten anwendbare Sonnenuhr, von der man freilich keine grosse Genauigkeit erwarten darf, die aber doch nicht ohne Interesse ist, zumal, da durch sie eine bisher nur von den Physikern beachtete Naturerscheinung zum Gegenstande allgemeinerer Beobachtung werden kann.

Die Uebereinstimmung der Erfahrung mit jener einfachen Regel ist jedoch nicht ganz streng. Eine erste Abweichung entdeckte Arago.

Denken wir uns durch die Sonne einen Vertikalkreis am Himmel gelegt, so müsste in allen Punkten desselben das Licht in der Ebene des Kreises selbst, also senkrecht polarisirt sein. Statt dessen fand Arago, dass, wenn die Sonne eine niedrige Stellung hat, und man sich dann auf dem Vertikalkreise von Zenith aus ihrem Gegenpunkte nähert, die Polarisation zuerst in einem stärkeren Verhältnisse abnimmt, als man erwarten sollte und in einem gewissen Abstande vom Gegenpunkte ganz aufhört. Bei noch weiterer Annäherung tritt zwar wieder Polarisation ein, aber nicht mehr die senkrechte, sondern eine fast horizontale. Den Uebergangspunkt, der je nach dem Stande der Sonne 12° bis 25° vom Gegenpunkte entfernt liegen kann, nannte Arago einen neutralen Punkt.

Im Jahre 1840 fand Babinet, dass auch in dem nahe bei der Sonne und zwar etwas über ihr liegenden Theile des Vertikalkreises

eine horizontale Polarisation stattfindet, und erst in weiterer Entfernung die senkrechte beginnt. Wo die erstere aufhört, liegt auch hier ein neutraler Punkt. Endlich hat jetzt Brewster, durch die Theorie geleitet, nach vielen vergeblichen Versuchen, auch unter der Sonne dieselbe Abweichung von der Regel und einen dritten neutralen Punkt entdeckt.

Die Erklärung dieser Abweichungen ist nicht schwer. Indem wir nach irgend einer Stelle des Himmels blicken, erhalten wir von allen in dieser Richtung liegenden Theilen der Atmosphäre reflectirtes Licht, und es fragt sich nun, wo diese Theile selbst das Licht, welches sie reflectiren, herbekommen. Die Hauptquelle ist die Sonne, aber nicht wie bei der Aufstellung der obigen Regel über die Polarisationsebene angenommen wurde, die einzige, sondern ausserdem werden die Theile auch von der ganzen übrigen Atmosphäre und von der hellen Erdoberfläche beleuchtet. Dieses Licht kommt, da die Atmosphäre eine sehr flache horizontale Schicht bildet, von allen Seiten in beinahe horizontaler Richtung zu ihnen, und daraus folgt, dass es nach der Reflexion eine beinahe horizontale Polarisation haben muss. An solchen Stellen des Himmels nun, wo das directe Sonnenlicht nach seiner Reflexion ebenfalls nahe horizontal polarisirt ist, bewirkt jenes hinzukommende Licht keine Veränderung. In dem oben betrachteten Vertikalkreise aber, wo das erstere senkrecht polarisirt ist, wirkt die Polarisation des letzteren aufhebend, und wenn auch auf der grössern Strecke des Kreises die senkrechte Polarisation überwiegt, so gewinnt doch in der Nähe der Sonne und ihres Gegenpunktes, wo jene schon ohnehin sehr schwach ist, die horizontale das Uebergewicht.

Die Stärke der Polarisation ist nach übereinstimmenden Beobachtungen in der Mitte zwischen der Sonne und ihrem Gegenpunkte am grössten. Früher glaubte man sogar, sie sei dort total, was jedoch wegen der Mitwirkung jenes Nebenlichtes unwahrscheinlich war, und sich auch durch neuere Messungen von Brewster als unrichtig ergeben hat.

Die Polarisation an den verschiedenen Punkten des Himmels ist übrigens eine sehr wandelbare Erscheinung. Ausserdem, dass sie in bestimmter Beziehung zur Stellung der Sonne steht und sich daher mit dieser fortwährend ändert, müssen die in ihr vorkommenden Unregelmässigkeiten, und besonders die Lage der neutralen Punkte auch noch von dem Witterungszustande der Atmosphäre und von der Beschaffenheit der Erdoberfläche in einem gewissen Umkreise abhängig sein, denn von diesem hängt die Menge und Vertheilung

jenes zu den directen Sonnenstrahlen hinzukommenden Lichtes ab. Durch die Beobachtung hat man auch wirklich zuweilen erhebliche Verschiedenheiten in der Lage der neutralen Punkte bemerkt, die durch solche Umstände veranlasst waren.

---

## Strahlenbrechung in der Atmosphäre.

**Astronomische und terrestrische Strahlenbrechung beim gewöhnlichen Zustande der Atmosphäre.** Da die Lichtstrahlen, so oft sie aus irgend einem durchsichtigen Mittel in ein anderes von verschiedener Dichte übergehen, gebrochen werden, so müssen auch die Strahlen, welche aus dem Weltenraume in die Atmosphäre eintreten, dabei ihre ursprüngliche Richtung verlassen, und selbst im Innern der Atmosphäre können sie nicht eine bestimmte Richtung beibehalten, weil die Luft nicht überall gleich dicht ist. Man nennt diese Ablenkung der Lichtstrahlen von ihrer geradlinigen Bahn, jenachdem sie sich an dem Lichte der Gestirne, oder an demjenigen, welches von fernen irdischen Gegenständen ausgegangen ist, äussert, astronomische oder terrestrische Strahlenbrechung. Sie sind beide nicht bloss von der allgemeinen Abnahme der Dichte in den höheren Regionen der Atmosphäre, sondern auch von mancherlei unregelmässigen, mehr örtlichen Verschiedenheiten, welche z. B. durch ungleiche Erwärmung verursacht werden, abhängig. Von den letzteren wollen wir indessen vorläufig absehen, und annehmen, die Atmosphäre befinde sich in ihrem normalen Zustande.

Sei *NOP* (Fig. 2.) ein Theil der Erdoberfläche und *AZB* die Grenze der Atmosphäre. In der Richtung nach *S* zu befinde sich ein Stern, und *SC* sei ein von ihm kommender Strahl. Dieser wird in der Atmosphäre etwas gebrochen, und zwar so, dass er mehr senkrecht geht, weil die Strahlen sich immer im dichteren Mittel der Normale nähern. Da nun aber die Atmosphäre bei *C*, wo der Strahl eintritt, nicht gleich ihre volle Dichtigkeit hat, sondern diese erst nach unten zu ganz allmälig erlangt, so kann auch nicht gleich bei *C* die ganze Brechung geschehen; vielmehr wird der Strahl sich bei seinem Fortschreiten mehr und mehr neigen und sein Weg eine stetig gekrümmte Curve bilden. Wenn sich nun in *O*, wo er die Erdoberfläche trifft, ein Beobachter befindet, so ist diesem die ursprüngliche Richtung des Strahles unbekannt; er hat nur ein Bewusstsein von derjenigen Richtung, in welcher derselbe in sein Auge dringt, und nach dieser beurtheilt er die Stellung des Sternes, d. h.

er glaubt ihn an dem Orte zu sehen, nach welchem die im Punkte $O$ an jenen Bogen gelegte Tangente $OS'$ weis't. Dadurch erscheint ihm jeder Stern etwas zu hoch.

Obwohl diese Abweichung meistens sehr unbedeutend ist, so forderte sie doch in der Astronomie, wo es auf die genauste Bestimmung des wahren Ortes der Sterne ankommt, eine sorgfältige Berücksichtigung, und es haben sich daher viele der bedeutendsten Mathematiker damit beschäftigt, ihre Grösse unter verschiedenen Umständen mit möglichster Sicherheit zu berechnen.

Am stärksten ist sie, wenn sich der betrachtete Stern im Horizonte befindet, in welchem Falle man die Brechung Horizontalrefraction zu nennen pflegt. Sie beträgt dann durchschnittlich 33'. Diese Grösse stimmt beinahe mit den Durchmessern der Sonnen- und Mondscheibe überein, und daraus folgt, dass, wenn sich diese ihrer wahren Stellung nach dicht unter dem Horizonte befinden, so dass sie ihn mit ihrem oberen Rande eben berühren, sie durch die Refraction vollständig über demselben sichtbar sind. Dadurch geschieht es, dass die Sonne uns jedesmal etwas zu früh auf- und zu spät untergeht, und somit die Länge der Tage vermehrt wird. Dieser Unterschied ist zwar in unseren Gegenden sehr gering, indem er sich nur auf 7 bis 9 Minuten beläuft; in höheren Breiten aber, wo die Sonne schräger und somit langsamer steigt und sinkt, wird er bedeutender. Zugleich verlängert er den in den Polargegenden stattfindenden langen Sommertag und verkürzt die lange Winternacht beide um mehrere Tage. Parry giebt z. B. an, dass ihm die letztere bei seiner Ueberwinterung auf Melville-Island, wo sie etwas über drei Monate dauern sollte, um 12 Tage abgekürzt sei.

Am augenfälligsten zeigt sich die Wirkung der Strahlenbrechung in einer Erscheinung, die man zuweilen bei Mondfinsternissen wahrgenommen hat. Man sah nämlich die Sonne und den beschatteten Mond beide zugleich über dem Horizonte, so dass es schien, als ob die Sonnenstrahlen ganz freien Zugang zum Monde hätten. Es lässt sich denken, was für ein Erstaunen diese Erscheinung erwecken musste, so lange man dabei an eine Abweichung von der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes nicht dachte, und Plinius, welcher eine solche Beobachtung anführt*), erklärt sie auch geradezu als etwas Widernatürliches.

Vom Horizonte aufwärts nimmt die Stärke der Refraction schnell ab, und zwar in dem Grade, dass, wenn die Sonne eben mit ihrem

*) Hist. nat. Lib. II, cap. 13.

unteren Rande scheinbar im Horizonte steht, dann dieser untere Rand um 33′ und dagegen der obere nur um 28′ über seinen wahren Ort erhoben ist. Dadurch wird die Entfernung des untersten und obersten Punktes von einander um 5′, über $1/7$ ihres ganzen Werthes, verringert, während der horizontale Durchmesser ungeändert bleibt. Die Scheibe muss also statt der sonstigen kreisförmigen, eine etwas zusammengedrückte Gestalt zeigen, und dieses kann man auch oft an der Sonne und dem Vollmonde, wenn sie an einem freien Horizonte auf- oder untergehen, beobachten; doch bewährt es sich nicht jedesmal, weil überhaupt in den untern Theilen der Atmosphäre, wie wir noch sehen werden, die Strahlenbrechung mancherlei Aenderungen erleidet.

Mit der bisher betrachteten astronomischen Strahlenbrechung stimmt auch die terrestrische ganz überein. Ebenso wie wir einen Stern in der Nähe des Horizontes höher erblicken, als er wirklich steht, muss uns auch der Gipfel eines fernen Berges zu hoch erscheinen, wie man es bei Höhenmessungen auch gefunden hat, die dadurch bedeutend erschwert werden. Eine andere Wirkung der Refraction ist, dass die Entfernung, in welcher uns ein Berg wegen der Krümmung der Erdoberfläche verschwindet, grösser ist, als sie bei geradliniger Fortpflanzung der Strahlen sein würde, und dieselbe Wirkung macht sich auch umgekehrt geltend, wenn wir selbst uns auf einer Anhöhe befinden und eine weite ununterbrochene Fläche vor uns haben. Berechnen wir dann nach der Höhe unseres Standpunktes, wie weit wir möglicher Weise die kugelförmige Fläche übersehen könnten, wenn sich die Strahlen geradlinig fortpflanzten, so liegt der so bestimmte Horizont etwa um $1/12$ näher als der, den unser Auge wirklich erreicht.

**Ungewöhnliche Senkung und Hebung des Horizontes.** Im Vorigen wurde der normale Zustand der Atmosphäre vorausgesetzt, d. h. dass überall von der Erdoberfläche nach oben zu die Dichte gleichmässig abnehme, wie es durch den verminderten Druck bedingt wird. Wir müssen nun auch die Abweichungen von diesem Zustande betrachten, sofern sie auf die Wege der Lichtstrahlen Einfluss haben. Früher legte man in dieser Beziehung zuweilen auf die ungleiche Vertheilung der Feuchtigkeit ein besonderes Gewicht, indem man meinte, dass diese das Brechungsvermögen der Luft bedeutend ändern könne. Das scheint aber nicht der Fall zu sein, und die Feuchtigkeit hierbei wenig Berücksichtigung zu verdienen. Jedenfalls sind die durch die Wärme verursachten Abweichungen am wichtigsten.

Wenn sich z. B. bei hellem Sonnenscheine der Erdboden stärker erwärmt als die Atmosphäre, so theilt er auch der untersten Luftschicht seine Wärme mit. Diese steigt dann zwar, nachdem sie sich ausgedehnt hat, und dadurch leichter geworden ist, allmälig in die Höhe, und lässt kältere Luft herabsinken; wenn aber das Wetter ruhig und die Erwärmung des Bodens ziemlich gleichförmig ist, so geschieht diese Ausgleichung nur langsam, und die der Erde zunächst liegende Luftschicht kann fortwährend bedeutend wärmer sein, als die obere Atmosphäre. Eben so muss im entgegengesetzten Falle, wenn die Erdoberfläche aus irgend einem Grunde kälter ist, als die Atmosphäre, die untere Luft sich mit abkühlen, was um so vollständiger geschehen kann, als sie nach der Abkühlung kein Bestreben hat, aufwärts zu steigen.

Nehmen wir nun zuerst an, die Luft sei unten am wärmsten, so wird die Dichtigkeit in der Richtung von oben nach unten nahe bei der Erdoberfläche entweder weniger zunehmen, als sonst, oder sogar abnehmen, und dadurch werden sich auch die Bahnen der Lichtstrahlen in entsprechender Weise ändern. Bei starken Wärmeunterschieden entstehen daraus sehr auffallende Erscheinungen, die wir weiter unten betrachten werden; gegenwärtig aber wollen wir uns auf die nächste Folge beschränken, die auch schon bei geringer Erwärmung eintritt. Diese besteht darin, dass die sonstige Erweiterung unseres Gesichtskreises geringer wird, und selbst in eine bedeutende Verengung übergehen kann. Ferne Gegenstände, die sonst deutlich zu sehen waren, verschwinden dann, als ob sie durch die Krümmung der Erde verdeckt würden, und andere, vorher weit innerhalb des Gesichtsfeldes gelegene, scheinen an die Grenze desselben gerückt zu sein. Man pflegt diese Veränderung als eine Senkung oder Depression des Horizontes zu bezeichnen, weil die geraden Linien vom Auge nach den Punkten, welche den Horizont abschliessen, dann etwas tiefer von der wahren Horizontalrichtung abweichen, als sonst. Sie ist besonders auf der See sehr merklich, weil da der Horizont viel schärfer begrenzt ist, als auf dem Lande, und ist für den Schiffer der seine optischen Instrumente nach dem scheinbaren Horizonte richten muss, ein erheblicher Uebelstand. Ausser den Fällen, wo sie durch die Witterung auf kürzere Zeit hervorgebracht wird, findet sie z. B. über den Theilen des Golfstromes, deren Wärme die mittlere Temperatur der umgebenden Luft übersteigt, ziemlich regelmässig statt, was als Zeugniss für den Einfluss der Wärme bei dieser Erscheinung dienen kann.

Ist dagegen die untere Luft am kältesten, so sind alle Wirkun-

gen umgekehrt. Die Zunahme der Dichtigkeit nach unten hin wird verstärkt, und dadurch tritt eine Vermehrung der gewöhnlichen Erweiterung des Horizontes oder eine Hebung desselben ein. Dieses findet zuweilen in überraschendem Maasse statt. Man sieht dann z. B. am Meeresgestade gegenüberliegende ferne Küsten, welche sonst gar nicht, oder nur in ihren höchsten Theilen sichtbar sind, ganz über den Horizont hervortreten, so dass man sie bis zum Fusse herab erkennen und vielleicht noch andere entferntere Gegenstände sehen kann. Ich will hier einen besonders merkwürdigen Fall der Art anführen, welchen Latham an der englischen Küste des Canals beobachtet hat*).

„Ich sass am 26. Juli 1797 in meinem Speisesaale zu Hastings, welcher nahe an der Küste und beinahe nach Süden zu liegt, als das Zuströmen der Menschen nach dem Ufer meine Aufmerksamkeit rege machte. Als ich nach der Ursache fragte, hörte ich, dass sich die französische Küste dem blossen Auge zeige. In der That überzeugte ich mich davon am Ufer gleich selbst. Sogar mit nacktem Auge, ohne Teleskop, konnte ich die Klippen an der französischen Küste wahrnehmen, die, wo sie am nächsten liegt, 9 — 11 deutsche Meilen entfernt ist, und sonst auch mit Hülfe der besten Fernröhre von jenem niedrigen Standpunkte aus nicht zu sehen ist. Sie schienen kaum eine deutsche Meile abzuliegen, und sich einige Seemeilen längs der Küste hinzuziehen....... Nachdem ich diesen Anblick fast eine Stunde lang genossen hatte, während der die Klippen zu einer Zeit deutlicher und näher, zu einer anderen schwächer und ferner zu sein schienen, doch nie aufhörten, sichtbar zu sein, erstieg ich die östlichen, ziemlich hohen Hügel, und hier zeigte sich mir ein herrlicher Anblick. Dover's Klippen und die ganze französische Küste von Calais an bis St. Valery, — ja wie einige Fischer behaupteten sogar bis nach Dieppe hin, — lag mir vor Augen, und mit dem Teleskop entdeckte man sehr deutlich die französischen Fischerböte, wie sie vor Anker lagen, und auf den Höhen die Häuser und die Farbe des Bodens etc.“

Das hier erwähnte scheinbare Näherrücken der Gegenstände, welches weiterhin noch bestimmter als eine Vergrösserung bezeichnet wird, findet sich zwar auch von einigen anderen Beobachtern bei ähnlichen Erscheinungen bestätigt, beruht aber wahrscheinlich überall auf einer Täuschung des Urtheils. Die Hebung über

*) Philos. Transact. for. 1798 p. 357, und Gilb. Ann. B. 4, S. 142.

den Horizont, woraus wir sonst auf die Nähe schliessen, und eine besondere Klarheit der Luft, die vielleicht dabei stattgefunden und die Deutlichkeit vermehrt hat, konnten leicht die Vorstellung einer grössern Nähe hervorrufen. Eine wirkliche Vergrösserung kann nur für eine Dimension, nämlich für die Höhe zugegeben werden, in welcher sie allerdings möglich war. Eine Vergrösserung in der Breitenrichtung würde aber unerklärlich sein.

Zu einer so auffälligen Wirkung, wie die vorstehende, sind natürlich ganz besonders günstige Umstände nöthig; in geringerem Maassstabe aber zeigt sich dergleichen häufig, und man kann sogar sagen, dass fast immer eine kleine Hebung oder Senkung stattfinden muss, da der vollkommen normale Zustand der Atmosphäre nur ein äusserst seltener Fall sein kann. Man hat für das ungewöhnliche Sichtbarwerden ferner Gegenstände auch im Volke eigene Ausdrücke. Bei den englischen Schiffern heisst es *looming*, und bei uns Kimmung, welche Namen freilich auch oft für andere verwandte Erscheinungen gebraucht werden.

**Luftspiegelungen.** Man findet bei vielen Völkern von den ältesten Zeiten her Erzählungen oder Andeutungen über wunderbare und täuschende Gesichte in der Luft, wodurch ferne Gegenstände verdoppelt wurden, oder auch neue in der Wirklichkeit gar nicht vorhandene erschienen. Die Nachrichten darüber sind freilich meistentheils so unvollständig, oder so sehr durch Aberglauben entstellt, und in's Mährchenhafte gezogen, dass man wenig darauf geben kann; doch sind manche von ihnen, wenigstens ihrem Hauptinhalte nach, durch spätere ähnliche Beobachtungen hinlänglich bestätigt, und haben mit diesen zugleich auch ihre Erklärung gefunden. Bei anderen dagegen sind wir noch immer sowohl über die Erscheinung selbst, als auch über ihre Gründe ziemlich im Unklaren.

Zu dieser letzteren Klasse müssen wir besonders die Scheingestalten rechnen, welche sich zuweilen in Reggio über der Meerenge und auch an anderen Punkten der italischen und sicilischen Küste zeigen, und unter dem Namen *Fata Morgana*-Schlösser der Fee Morgana,—bekannt sind, indem sie durch ihre Seltsamkeit einen gewissen Ruf erlangt haben. Wir besitzen über sie keinen Bericht, der einigermaassen das Gepräge einer rein objectiven, vorurtheilsfreien Beobachtung an sich trüge. Selbst der Pater Minasi, der diese Erscheinung im J. 1773 zum Gegenstande einer wissenschaftlichen Arbeit machte, hat seiner Beschreibung, die aus mehrfacher

eigener Anschauung geschöpft sein soll, offenbar Manches aus seiner Phantasie beigemischt. Nach ihm *) „zeigen sich plötzlich in dem Wasser, wie auf einen katoptrischen Theater, — nach Anderen schweben die Gegenstände in der Luft, was auch Minasi später als eine zweite Art der Erscheinung anführt, — mannichfach vervielfältigte Gegenstände, z. B. zahllose Reihen von Pfeilern und Bogen, bestimmt gezeichnete Schlösser, regelmässige Säulen, hohe Thürme, Palläste mit Fenstern und Balkons, lange Alleen von Bäumen und Ebenen mit Heerden bedeckt, ganze Schaaren von Fussvolk und Reitern und eine Menge anderer seltsamer Bilder in natürlicher Farbe und Haltung, welche sich während der kurzen Zeit ihrer Sichtbarkeit schnell nach einander über die Oberfläche der See hinbewegen."

Der Hauptcharakter der Erscheinung, wie er sich aus dieser und anderen Beschreibungen ergiebt, scheint darin zu liegen, dass man meistens Gebäude, also Gegenstände von regelmässiger geradliniger Construction zu sehen glaubt, und auch, wenn andere Objecte erscheinen, dieses immer mit einer gewissen Gleichförmigkeit und Regelmässigkeit geschieht, wie hier z. B. die Thiere gleich in ganzen Heerden, die Bäume in Alleen und die Menschen als Soldaten, und dass ferner die Bilder keine Beständigkeit haben, sondern ihre Gestalt fortwährend ändern, was hier als eine schnelle Bewegung, in anderen Beschreibungen aber geradezu als Verwandlung bezeichnet wird. — Von der Erklärung dieses Phänomens wollen wir für jetzt abstehen, da sich später noch ein Anknüpfungspunkt dazu finden wird, und wollen uns nun zu der anderen Klasse von Erscheinungen, den Luftspiegelungen im engeren Sinne, wenden.

Für die Entstehung derselben sind besonders solche Gegenden günstig, wo ausgedehnte Ebenen einer starken Sonnenhitze ausgesetzt sind, und sie zeigten sich daher z. B. bei dem ägyptischen Feldzuge unter Napoleon mit einer den Europäern bis dahin noch unbekannten Vollkommenheit. Der Mathematiker Monge, welcher an der Expedition Theil nahm, und diese Erscheinungen sogleich zum Gegenstande seines Nachdenkens machte, beschreibt sie folgendermaassen **).

„Ganz Unterägypten ist eine fast horizontale Ebene, auf der einige kleine natürliche und künstliche Hügel, doch nach der Wüste sparsamer als nach dem Delta zu, zerstreut liegen. Auf diesen

*) Gilb. Ann. B. 12, S. 20.

**) Memoires sur l'Egypt, und Gilb. Ann. B. 11. S. 29 Anmerk.

Hügeln hat man wegen der Ueberschwemmung die Dörfer gebaut, die, von Datteln und Feigenbäumen umringt, durch ihre dunkeln Umrisse auf dem sehr heitern Himmel von Weitem her in's Auge fallen. Abends und Morgens hat ihre Ansicht nichts Ungewöhnliches. Sobald aber der Boden nach Aufgang der Sonne bis auf einen gewissen Grad erwärmt ist, zeigt sich auf der Ebene, etwa eine franz. Meile vom Beobachter ab, bis an den Horizont rings umher eine allgemeine Ueberschwemmung, was bis zu der gegen Abend eintretenden Abkühlung der Erde fortdauert. Die über eine franz. Meile entfernten Dörfer sehen dann wie Inseln aus, die in einem grossen See zerstreut liegen, und sich darin herabwärts spiegeln. Freilich sieht man in dieser grossen Entfernung nur die Massen des Bildes ohne die kleineren Theile, und der Umriss ist unbestimmt wie in unruhigem Wasser. Sowie man sich indess einem solchen Dorfe nähert, entfernt sich das scheinbare Ufer; der Wasserspiegel diesseits des Dorfes wird immer schmaler, und verschwindet endlich ganz, während er bei den dahinter liegenden Dörfern nach wie vor bleibt: — eine in einer wasserlosen Wüste, wo man vom Durste gepeinigt wird, wahrlich marternde Täuschung."

Dass diese Trugbilder in Afrika und in den arabischen Wüsten, wo sie Serab heissen, nichts Ungewöhnliches sind, ergiebt sich aus manchen Stellen dortiger Schriften, worin von ihnen als von etwas ganz Bekanntem gesprochen wird. So heisst es im Koran*): „Der Ungläubigen Werke sind dem Serab in der Ebene gleich, der Durstende hält es für Wasser, bis er hinkommt, und findet, dass es nichts ist".

Sie sind indessen durchaus nicht auf jene heissen Gegenden beschränkt, sondern zeigen sich auch an anderen Orten je nach den Umständen mit grösserer oder geringerer Deutlichkeit. Besonders bekannt waren sie von jeher bei den Schiffern unter dem Namen Seegesicht, mirage — mit miroir zusammenhängend — etc. Denn obwohl das Meer in mancher Beziehung ihrem Entstehen wenig günstig ist, so hat es doch den grossen Vorzug, dass es eine vollkommen ebene Oberfläche darbietet. Man glaubt hier die fernen Gegenstände z. B. Schiffe oder Küsten nicht innerhalb eines zweiten Gewässers, sondern in der Luft schwebend zu sehen, und nimmt dicht unter ihnen ein umgekehrtes Spiegelbild wahr, welches zuweilen bis zum Wasserhorizonte herabreicht, zuweilen ebenfalls ganz in der Luft schwebt.

---

*) Sure 24.

Das Innere von Europa hat nur wenige Ebenen, die durch ihre gleichförmige Ausdehnung und sonstige Beschaffenheit zur Hervorbringung dieser Gesichte sehr geeignet wären; doch sind sie auch hier nicht so selten, als man vielleicht glaubt. In den meisten Fällen treten nämlich die Spiegelungen erst bei so fernen Gegenständen ein, dass man die genaueren Umrisse nur mittelst eines Fernrohres gewahr werden kann, und der unbestimmte Anblick, der sich dem blossen Auge darbietet, die Aufmerksamkeit zu wenig anregt. In einer französischen Schrift*) wird z. B. gesagt: „Die Bauern der Crau in der Provence kennen diese Erscheinung sehr wohl. Lou tems si miraillu, — das Wetter spiegelt sich, — sagen sie auf provençalisch in einem ziemlich gleichgültigen Tone, wenn die Ebene der Crau anfängt, sich in der Ferne dem Anscheine nach in einen See zu verwandeln."

Als in der letzten Hälfte des vorigen Jahrhunderts das Interesse für diesen Gegenstand unter den Physikern rege geworden war, vermehrten sich auch gleich die Fälle, in denen man die Erscheinung wahrnahm. So erwähnt Büsch schon vom J. 1779 einen Anblick, der nach seiner Beschreibung**) selbst den ägyptischen Bildern an Deutlichkeit nichts nachgegeben haben kann. Er sah nämlich von Ottersberg aus, zwei Meilen von Bremen, diese letztere Stadt so unzweifelhaft hinter einer Wasserfläche liegen und sich darin spiegeln, dass seine Freunde das Wasser für die Weser hielten, und nicht wenig erstaunten, als sie den 6 Fuss hohen Ottersberger Damm hinauffuhren, und nun plötzlich statt des Wassers eine grüne Wiese bis an die Mauern der Stadt erblickten.

Den besten Aufschluss aber über die Häufigkeit der Erscheinung, wenn man sie nur mit gehöriger Aufmerksamkeit verfolgt, geben die Beobachtungen von Woltmann, welche sich eben so sehr durch die Zweckmässigkeit ihrer Anordnung, wie durch den Fleiss und die Consequenz ihrer Durchführung auszeichnen, und viel dazu beigetragen haben, die Erscheinung bis in ihre ersten Anfänge kennen zu lernen. Er wohnte zu Cuxhaven, und sah aus seinem Fenster jenseit des Hafens und der dahinter befindlichen weiten Bucht der Elbe, in einer Entfernung von etwa $2^1/_2$ Meilen ein Haus stehen. Dieses wählte er zum Gegenstande seiner Beobachtungen, und betrachtete es über ein Jahr lang — vom September 1794 bis Ende October

---

*) Merveilles et beautés de la nature en France, siehe Gilb. Ann. 1818 St. 1, und Beiträge zur Kenntniss des Innern von Russland von Erdmann II. S. 310.

**) Tractatus duo optici argumenti, Hamb. 1783 und Gilb. Ann. B. 3, S. 294.

1795 — täglich dreimal durch das Fernrohr, ob eine Spiegelung daran zu bemerken wäre, womit er zugleich auch noch verschiedene andere auf das Wesen und die Ursache dieser Spiegelung bezügliche Beobachtungen verband. Aus seinen Aufzeichnungen ergiebt sich nun unter Andern, dass er im J. 1794 im September an 19 Tagen, im October an 16 Tagen, im November an 8 Tagen und im December an 11 Tagen Spiegelung nach unten sah, wobei noch die Tage, an welchen es der trüben Witterung wegen zweifelhaft war, ausgelassen sind.

Was nun die Erklärung der Luftspiegelungen betrifft, so ist die richtige Idee dazu schon gegen das Ende des vorigen und zu Anfang dieses Jahrhunderts von mehreren Physikern ausgesprochen, aber vollständig entwickelt ist sie erst von Biot, welcher seiner ausführlichen mathematischen Bearbeitung*) auch noch eine Reihe eigener sehr lehrreicher Beobachtungen und Messungen voraufschickte, zu denen er durch die Umstände besonders begünstigt wurde, und die ihm dann eine sichere Grundlage der Theorie verschafften.

Sei *AB* (Fig. 3.) die Erdoberfläche, und es werde angenommen, dass unmittelbar über derselben, z. B. wegen grösserer Wärme des Bodens, die Luft dünner sei, als weiter oben. Dann wird sie vom Boden aus nach aufwärts, soweit der Einfluss des Bodens weicht, schnell an Dichte zunehmen, von da ab aber noch weiter nach oben wird, wenn nicht noch ein anderer Grund zu Unregelmässigkeiten vorhanden ist, der normale Zustand eintreten, d. h. sie wird mit wachsender Höhe an Dichte abnehmen, aber so langsam, dass dieses gegen die erste Zunahme kaum zu rechnen ist. Die Grenzfläche zwischen der unteren veränderlichen Schicht, und der oberen beinahe gleichförmigen sei *CD*. Betrachten wir nun den über *CD* liegenden hellen Punkt *P*, so pflanzt sich von da aus jeder Strahl innerhalb der obern Luft ziemlich geradlinig fort; wenn aber ein Strahl wie *PE* in die untere Schicht eindringt, so wird er in dieser gebeugt, und zwar so, dass er sich mehr und mehr der wagrechten Richung nähert, bis er — in *F* — die Erdoberfläche trifft. Ist nun ein Strahl wie *PG* schon von vorn herein beinahe wagrecht, so kann es sein, dass er, bevor er die Erdoberfläche trifft, ganz wagrecht wird — bei *H* — und dann muss er sich auf dem weitern Wege wieder aufwärts krümmen, und der Weg *HI* muss dieselbe

*) Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon. Paris 1810. Eine abgekürzte Bearbeitung von Brandes in Gilb. Ann. B. 47.

Gestalt haben, wie *HG*, so dass der Strahl nach seinem Austritte aus der Schicht bei *I* gerade denselben Winkel mit der Ebene *CD* bildet, wie vor seinem Eintritt bei *G*.

Dieser letztere Umstand ist es, welcher dem beschriebenen Vorgange eine gewisse Aehnlichkeit mit der Reflexion des Lichtes giebt, obwohl er von dieser seinem Wesen nach ganz verschieden ist, und nur auf Brechung beruht *). Demnach ist es eigentlich auch unrichtig, die hieraus entstehenden Erscheinungen Luftspiegelungen zu nennen, da dieser Name eine Reflexion voraussetzt; sie sind aber in der That den wahren Spiegelungen so ähnlich, dass man sie durch eine Vergleichung mit diesen wenigstens äusserlich am besten bezeichnen kann. Denken wir uns nämlich jetzt statt des einzelnen hellen Punktes *P* einen Gegenstand *PQ* (Fig. 3a), und nehmen an, *O* sei das Auge eines Beobachters, so gelangt von jedem Punkte des Gegenstandes erstens ein directer Strahl zum Auge, wie *PO* und *QO*; zweitens aber kann unter günstigen Umständen noch von jedem Punkte ein in die untere Schicht eingedrungener und weiterhin wieder ausgetretener Strahl zum Auge kommen, wie *PGIO* und *QKLO*, welche die Vorstellung von einem zweiten Gegenstande derselben Art hervorrufen. Diese Strahlen müssen sich aber unterwegs — bei *M* — schneiden, und beim Auge so ankommen, dass der von *P* ausgegangene Strahl tiefer liegt, als der von *Q* ausgegangene, und da wir den Gegenstand immer nach der Richtung der ankommenden Strahlen beurtheilen, so werden wir ihn an der Stelle *P' Q'* und in umgekehrter Stellung zu sehen glauben, also in ganz ähnlicher Weise, wie wenn *CD* eine Spiegelfläche wäre. Es ist übrigens nicht nothwendig, dass das Auge und der Gegenstand, wie bisher angenommen wurde, sich beide oberhalb der veränderlichen Schicht befinden. Reicht diese Schicht bis über sie hinaus, so tritt dadurch nur der Unterschied ein, dass auch die aufrechte Gestalt, welche wir sehen, sich nicht genau an der Stelle zeigt, wo der Gegenstand wirklich ist, sondern etwas tiefer.

Die vollständigen Untersuchungen von Biot haben nun zu folgenden Resultaten geführt. Sei *AB* (Fig. 4.) wiederum die Erdoberfläche, und zwar eine weite Strecke eines recht ebnen Bodens,

---

*) Soll eine Vergleichung zwischen dieser durch Brechung verursachten Zurücklenkung der Strahlen und der Reflexion stattfinden, so würde dazu noch am meisten die totale Reflexion, welche im Innern eines dichteren Mittels bei sehr schrägem Einfall vor sich geht, geeignet sein.

und in $O$ befinde sich das Auge eines Beobachters. Ein von $O$ aus schräge abwärts gehender Strahl wird, wenn er wenig geneigt ist, den Erdboden gar nicht erreichen, sondern wieder aufwärts gebogen werden, und unter diesen Strahlen sei $OC$ der tiefste, welcher gerade noch an der Erdoberfläche vorbei streift, ohne sie wirklich zu berühren und von ihr aufgefangen zu werden, so dass er seinen Weg über $C$ hinaus nach $D$ zu fortsetzen kann. Unterhalb des zweiten Theiles dieses Strahles wird nun durch die Theorie noch eine andere wichtige Curve bestimmt, welche jene in der Nähe von $C$ berührt und in der Figur durch $CE$ dargestellt ist, und welche mit $CD$ zusammen folgende Eigenschaften hat. Alle unter $CE$ gelegenen Punkte sind unfähig, irgend einen Strahl zum Auge in $O$ gelangen zu lassen und sind also für dieses durchaus unsichtbar. Von jedem Punkte zwischen $CE$ und $CD$ kommen dafür auf zwei verschiedenen Wegen Strahlen zum Auge, und diese Punkte erscheinen daher doppelt, wie in der vorigen Figur die Punkte $P$ und $Q$. Endlich von jedem Punkte oberhalb $CD$ erhält das Auge nur Strahlen von Einer Richtung, und diese Punkte kann es daher auch nur einfach sehen.

Nehmen wir nun z. B. an, zu Ende der Strecke $AB$ (Fig. 4.) befinde sich ein kleiner Hügel mit Häusern und Bäumen, welcher von jener Curve $CE$ in $F$ getroffen werde, so dass sein Gipfel zwischen $CE$ und $CD$ liege, so können wir aus dem Vorigen leicht schliessen, welcher Anblick sich dem Auge in der Richtung nach $B$ zu darbieten muss. Den Erdboden kann man nur bis $C$ sehen, indem die folgenden Punkte unter $CE$ liegen. Man würde daher $C$ für die Grenze des Horizontes halten, wenn man nicht noch weit hinter diesem Punkte den obern Theil des Hügels erblickte. In der Lücke zwischen beiden sieht man nun dicht unter dem letzteren sein umgekehrtes Bild mit den darauf befindlichen Häusern und Bäumen, und ausserdem an allen Stellen, die dadurch noch nicht ausgefüllt sind, das Bild des hinter dem Hügel sichtbaren Himmels. Dieses letztere stellt sich dem Auge als ein heller blauer Schein dar, welcher sich an den Hügel anschliesst und sein Bild umgiebt, und kann daher leicht die Vorstellung einer Wasserfläche erwecken, welche von $C$ ab beginnt, und aus welcher der obere Theil des Hügels als Insel hervorragt, — ganz so wie es die französische Armee in Aegypten und Büsch vor Bremen wirklich gesehen haben.

Wird die Beobachtung auf dem Meere angestellt, so ist $AB$ selbst schon eine Wasserfläche, und man kann daher das von $C$ ab beginnende Bild des Himmels nicht gut für ein zweites helleres

Wasser halten, sondern betrachtet $C$ wirklich als die Grenze des Horizontes, von wo ab die Himmelsfläche beginnt, und die noch sichtbaren oberen Theile von Gegenständen, die hinter $C$ liegen, scheinen mit ihrem Spiegelbilde in der Luft zu schweben, falls das letztere nicht bis zum scheinbaren Horizonte herabreicht. Zuweilen glaubt man aber auch Gegenstände, besonders ferne Küsten blos vom Horizonte losgelöst, in der Luft schweben zu sehen, ohne ein Bild darunter wahrnehmen zu können. Dieses beruht häufig auf einer Täuschung, indem man das Spiegelbild, welches sich dicht an die wahre Gestalt anschliesst, nur nicht von dieser unterscheiden kann; in manchen Fällen kommt es jedoch nach Biot's Erklärung daher, dass das Spiegelbild in seinen Längendimensionen unter Umständen viel kleiner, als die wahre Gestalt sein kann, und sich dann oft nicht mehr erkennen lässt.

Da der Zustand der Luft nie ganz beständig ist, und es besonders dann nicht sein kann, wenn die am stärksten verdünnte und also leichteste Luft am untersten liegt, weil diese dann immer das Bestreben äussert, nach oben zu steigen, und dadurch Bewegungen verursacht, so treffen die Strahlen, die von irgend einem Punkte aus durch die veränderliche Schicht zum Auge gehen, dieses nicht immer in derselben Richtung. Daher kommt es, dass die Bilder oft ein unbestimmtes, zitterndes Ansehen haben, was Monge mit der Spiegelung in einem etwas bewegten Wasser vergleicht. Dieser Umstand tritt auch oft bei der wahren Gestalt der Gegenstände ein, und verursacht selbst in solchen Fällen, wo gar keine Spiegelung stattfindet, das bekannte scheinbare Zittern der Luft, welches man an warmen Tagen häufig wahrnimmt. Es ist indessen alsdann nicht die Luft, welche zittert, denn davon würden wir gar nichts bemerken, eben so wenig wie wir die Luft selbst sehen können, sondern es scheinen nur wegen der veränderlichen Brechung der Lichtstrahlen in der bewegten ungleich dichten Luft die Ränder der Gegenstände zu zittern.

Im Bisherigen wurde angenommen, die Luft sei in der Nähe des Erdbodens wärmer, als weiter oben, und daraus wurden die unterhalb der Gegenstände erscheinenden Spiegelungen abgeleitet; demgemäss muss man nun auch für den entgegengesetzten Fall, wo die untere Luft am kältesten ist, und in einiger Höhe ein Uebergang zu merklich wärmerer Luft stattfindet, Spiegelungen nach oben erwarten. In der That kommen diese auch vor, doch scheinen die dazu nöthigen Bedingungen bei uns verhältnissmässig sehr selten einzutreten. Woltmann z. B. hat bei seinen vielen Beobachtungen,

welche ihm die Spiegelungen nach unten so oft zeigten, doch nur dreimal deutliche Spiegelungen nach oben wahrgenommen. Die vollständigste früher bekannte Erscheinung der Art, welche bis vor Kurzem noch ziemlich vereinzelt dastand, ist diejenige, welche der Professor Vince im J. 1798 an der englischen Küste zu Ramsgate beobachtet hat. Dieser bemerkte nämlich an einem sehr schwülen Nachmittage, als er die auf dem Meere sichtbaren Schiffe durch ein Fernrohr betrachtete, dass über jedem derselben ein mehr oder weniger vollständiges umgekehrtes Bild schwebte, und ebenso auch über fernen Klippen, und er konnte diese Bilder mehrere Stunden hindurch gleich deutlich erkennen. Zuweilen zeigte sich sogar über dem verkehrten Bilde noch ein zweites, welches dann wieder aufrecht stand. Dieses letztere lässt sich nach der Biot'schen Theorie ebenfalls erklären, doch kann es nur unter sehr günstigen Umständen erscheinen, und wird daher äusserst selten gesehen.

In neuerer Zeit sind unsere Erfahrungen über die Spiegelung nach oben bedeutend vermehrt durch Scoresby's Reisen auf den Wallfischfang, welche auch in anderer Beziehung für die Wissenschaft von grossem Nutzen gewesen sind. In den Polarmeeren verbreiten nämlich die grossen Eismassen eine enorme Kälte um sich, und können auch im Sommer durch die auf sie fallenden Sonnenstrahlen nur wenig erwärmt werden, da deren Wärme fast ganz durch das theilweise Schmelzen absorbirt wird. Die oberen Luftschichten dagegen erfahren während der Zeit, wo die Sonne Tag und Nacht am Himmel steht, von dieser eine bedeutende Wirkung, so dass an hellen und ruhigen Tagen fast immer der Zustand eintreten muss, dass die untere Luft kälter ist als die obere. Diese Gegenden sind daher für die Spiegelung nach oben besonders geeignet, wie sie überhaupt durch ihre starken Wärmedifferenzen die ungewöhnlichen Lichtbrechungen sehr begünstigen, und dadurch auch noch zu anderen merkwürdigen Erscheinungen Veranlassung geben. Diese letzteren wollen wir weiter unten betrachten, und vorläufig bei den Spiegelungen stehen bleiben, über welche hier einige Stellen von Scoresby folgen mögen.

„Am 19. Juni *) war das Wetter ruhig und klar, die Sonne warm und fast drückend. Die See reflectirte die Gegenstände so genau, wie ein Spiegel, indem ihre Oberfläche stundenlang von

*) Journal of a voyage to the Northern Whale-fishery, including researches and discoveries on the eastern coast of West-Greenland, made in the summer of 1822 etc. by W. Scoresby jun. Edinb. 1823. p. 117.

keinem Winde bewegt wurde. Die starke Wirkung der Sonnenstrahlen brachte bald eine so ungleiche Dichte in der Atmosphäre hervor, dass sich die durch diesen Umstand bedingten Erscheinungen in ausserordentlicher Weise zeigten...... Ueber einigen entfernten Schiffen schwebte ein umgekehrtes Bild in der Luft, zuweilen grösser als das Object selbst: dann befand es sich in einigen Beispielen in beträchtlicher Höhe über dem Schiffe; wenn es aber mit dem Schiffe in Berührung war, so fand man es immer kleiner, als das Original. Das Bild Eines Schiffes war mehrere Minuten lang deutlich zu sehen, obwohl das Object, zu dem es gehörte, ausserhalb des Gesichtsfeldes war. Ein Schiff war mit zwei Bildern gekrönt, das erste verkehrt, und das zweite, wie ich es nie vorher gesehen hatte, in seiner wahren Stellung." etc.

Den 18. Juli *). — Siehe hiezu Fig. 5. — **). Nachdem Scor. vorher gesagt hat, dass an dem vorigen Tage alle Gegenstände etwas undeutlich und verwirrt erschienen seien, fährt er fort: „Aber an diesem Abende, etwa um 9 Uhr, waren die Schiffe mit ihren wiederholten Bildern sehr schön und deutlich begrenzt, und besonders die letzteren, welche wie gewöhnlich in verkehrter Stellung in der Luft erschienen. Ueber einigen Fahrzeugen, deren Rumpfe hinter dem Horizonte waren, zeigten sich zwei, und über Einem Schiffe drei deutliche, verkehrte Bilder, jedes in einem besonderen, durch die Refraction erscheinenden Streifen Eis befindlich, eins über dem anderen, indem das unterste Bild eine Erhebung von mehr als der Höhe des Schiffsmastes über dem Mastkorbe des Originals hatte. Auch sah man von zwei Schiffen wohl begrenzte Bilder in umgekehrter Stellung, ohne dass die Schiffe, zu denen sie gehörten, sichtbar waren."

Noch verdient hier ein Fall, besonders wegen des darin obwaltenden merkwürdigen Zufalls, Erwähnung. Am 24. Juli nämlich erblickte Scor. durch sein Fernrohr in einer Richtung, wo kein wirkliches Schiff zu sehen war, das umgekehrte Bild eines solchen, welches in der Luft schwebte, und sich durch seine ausserordentliche Schärfe auszeichnete, so dass er es trotz der sehr grossen Entfernung in allen Einzelnheiten erkennen konnte. Dabei über-

*) A. a. O. pag. 164.

**) Bei dieser und der 7ten Figur muss bemerkt werden, dass nicht Alles, was sich darauf befindet, gleichzeitig und in einen so kleinen Raum zusammengedrängt gesehen wurde, sondern Scor. hat auf jeder solchen Platte möglichst viele Erscheinungen, die er während eines Tages an verschiedenen Punkten beobachtete, zusammengefasst.

zeugte er sich, dass das Bild zu dem Schiffe **seines Vaters** gehörte, obgleich er sonst gar nicht wusste, dass dieser sich in seiner Nähe befinde. Das Schiff kam nicht wirklich zum Vorschein, aber eine spätere Vergleichung der Tagebücher bestätigte seine Vermuthung vollständig, und ergab zugleich, dass das Schiff damals eine Entfernung von ihm gehabt hatte, die über doppelt so gross war, als die Weite seines Horizontes ohne Refraction.

Die im Vorigen erwähnte Thatsache, dass sich über manchen Schiffen zwei bis drei Bilder zeigten, welche alle **umgekehrt** waren, scheint der Theorie zu widersprechen, da nach dieser, wenn wirklich ein zweites Bild entsteht, es ein aufrechtes sein muss. Ich glaube aber, dass man durch eine geringe Erweiterung der Betrachtungsweise auch jene unter sich gleichartigen Bilder erklären kann. Bisher wurde immer stillschweigend angenommen, dass die Verdünnung der Luft von unten nach oben so geschehe, dass die Flächen gleicher Dichte durchweg horizontal seien. Diese Bedingung kann nun zwar unter günstigen Umständen sehr nahe, aber nie **vollkommen** erfüllt sein, sondern es werden immer kleine Krümmungen vorkommen, wodurch die Flächen an verschiedenen Stellen verschiedene Richtungen erhalten, und diese Abweichungen sind es, die jene Erscheinung veranlassen können. Sei z. B. *CDE* (Fig. 6.) eine solche Fläche, die bei *D* ihre Richtung ändere, so kann möglicherweise jeder der beiden Theile *ED* und *DC* von dem in *P* befindlichen Gegenstande ein Bild erzeugen, welches dem Auge in *O* sichtbar ist, und diese Bilder werden beide umgekehrt eins über dem anderen erscheinen, eben so, als wenn *ED* und *DC* zwei etwas gegen einander geneigte Spiegelflächen wären. Bedenkt man nun, welche grosse Ausdehnung die Fläche *EDC* haben muss, da die gespiegelten Gegenstände immer um mehrere Meilen vom Beobachter entfernt sind, indem Scor. ausdrücklich sagt*): „Und es muss bemerkt werden, dass diese Erscheinungen hauptsächlich teleskopisch waren, indem die Schiffe und ihre Bilder so entfernt waren, dass sie dem nackten Auge nur als unbestimmte Punkte erschienen;" — und erwägt man dazu, wie gering die Richtungsänderung nur zu sein braucht, um ein zweites getrenntes Bild möglich zu machen, so sieht man leicht, dass zwischen dem Gegenstande und dem Auge sehr gut mehrere solche Aenderungen stattfinden, und zu mehreren Bildern Veranlassung geben können.

Ausser diesen Spiegelungen zeigen sich in den Polarmeeren,

*) A. a. O. pag. 165.

wie schon oben erwähnt, noch andere von der unregelmässigen Brechung abhängige Erscheinungen. Dahin gehören zunächst die scheinbaren Gestaltveränderungen entfernter Gegenstände. Es kommt nämlich oft vor, dass die letzteren, besonders die in der Umgegend befindlichen Schiffe, selbst solche, die dem Beobachter noch nahe genug liegen, um sie unter gewöhnlichen Umständen mit blossen Augen recht gut erkennen zu können, ganz verzerrt erscheinen, indem einige Theile stark ausgedehnt und andere dafür wieder fast bis auf nichts zusammengedrückt sind, wie es in Fig. 7. an einigen Schiffen dargestellt ist. Häufig kommt dazu noch eine zitternde Bewegung der Ränder, welche das deutliche Erkennen noch mehr erschwert, so dass Scor. die Lichtbrechung in dieser Beziehung als eine unangenehme Belästigung der Schiffer bezeichnet, indem ihnen dadurch oft Beobachtungen, die für sie von der grössten Wichtigkeit wären, ganz unmöglich gemacht würden.

Noch merkwürdiger sind aber die Erscheinungen, welche sich unter gleichen Umständen bei den entferntesten Gegenständen, besonders bei den Eisbänken und Küsten, welche den Horizont begrenzen, zeigen. Diese nehmen dann in ihren einzelnen Theilen ganz neue, seltsame Gestalten an, die aber meistentheils eine gewisse Aehnlichkeit mit grossartigen Bauwerken haben, so dass das Ganze gewöhnlich das Ansehen einer entfernten prächtigen Stadt gewinnt. Die Beschreibungen, welche Scor. davon giebt, sind um so interessanter, als sie vollständige Seitenstücke zu denen bilden, welche wir über die räthselhaften *Fata Morgana* besitzen, aber ohne die störenden Phantasieausschmückungen. Es sind nachstehend einige Stellen der Art angeführt, wobei man auch die in Fig. 7. mitgetheilte Zeichnung von Scor. vergleichen kann.

„Die Berge *) längs der Küste nahmen die wundersamsten Formen an: das Ansehen von Schlössern mit luftigen Spitzen, Thürmen und Zinnen verwandelte sich in wenig Minuten in einen grossen Bogen oder eine romantische Brücke. Diese vielfachen oft schönen Verwandlungen liessen fast an die Wahrheit der Feengeschichten glauben. ...... Ich sah nie vorher eine so mannichfaltige und amüsante Erscheinung.“

„Am Abende **) — des 10. Juni — war es ruhig, bei glänzendem Sonnenscheine und unter vielen sonderbaren Erscheinungen der

*) An account of the Arctic regions with a history and description of the Northern Whale-fishery by W. Scoresby. Edinb. 1820. I, p. 386.

**) Journal of a voyage etc. p. 96.

ungleichen Refraction. Eishügel nahmen die Formen von Schlössern, Obelisken und Thürmen an, und das Land zeigte aussergewöhnliche Gestalten. An einigen Stellen war das ferne Eis so unregelmässig, und schien so voll von Spitzsäulen, dass es einem Walde von nackten Bäumen glich, an anderen hatte es den Charakter einer ausgedehnten Stadt voll von Kirchen, Schlössern und öffentlichen Gebäuden.“ etc.

„Der ganze Vorgang *) gleicht oft einem grossen und interessanten Phantasiespiele. Kaum lässt sich das Ansehen eines Gegenstandes vollständig prüfen und bestimmen, ehe er sich in etwas anderes verwandelt. Er ist vielleicht nach einander ein Schloss, eine Kathedrale oder ein Obelisk; dann, indem er sich ausdehnt und mit den benachbarten Bergen verbindet, überwölbt er die dazwischen liegenden Thäler, obgleich ihre Breite Meilen betragen mag, durch eine Brücke mit einem einzigen Bogen von dem prachtvollsten Ansehen.“

Was nun die Erklärung dieser sonderbaren Erscheinung betrifft, so glaube ich, dass man dieselbe unmittelbar an diejenige anschliessen kann, welche weiter oben von der mehrfachen umgekehrten Spiegelung gegeben wurde. Zur Erzeugung deutlich getrennter Bilder dürfen nämlich in den Flächen gleicher Dichte nur wenige und geringe Krümmungen vorkommen. Wird die Gleichförmigkeit der Richtung in ihnen noch weiter gestört, so dass sie sich mehr und mehr mit wellenförmigen Erhebungen und Vertiefungen bedecken, so ändern sich auch ihre Wirkungen auf das Licht, und in welcher Art dieses geschehen muss, kann man am leichtesten aus der Vergleichung mit einer bekannten anderen Erscheinung schliessen, bei der ziemlich ähnliche Umstände obwalten. Betrachtet man nämlich in einem Wasserspiegel bei Abend das Bild eines entfernten Lichtes, so zeigt sich dieses, wenn das Wasser ruhig ist, sehr gut begrenzt; ist aber die Wasserfläche etwas bewegt, so verwandelt es sich in einen senkrechten Lichtstreifen von bedeutender Länge. Dieser entsteht offenbar dadurch, dass man statt des sonstigen Einen Bildes jetzt sehr viele dergleichen sieht, deren jedes von einer besondern Welle reflectirt ist, und dass diese sich so dicht an einander schliessen, dass sie nicht mehr einzeln erkannt werden können, sondern einen zusammenhängenden Streifen bilden. Nun erhebt sich freilich die Frage, warum dieser Streifen gerade senkrecht sein muss und nicht auch jede andere Richtung haben kann,

*) A. a. O. pag. 167.

oder warum sich überhaupt ein Streifen, und nicht vielmehr ein kreisrunder Lichtfleck bildet; aber darauf lässt sich durch eine einfache geometrische Betrachtung antworten, von der wir indessen hier nur das Resultat anführen wollen. Denken wir uns statt des Lichtes einen einzelnen leuchtenden Punkt, so kommen bei ruhigem Wasser nur in Einer Richtung reflectirte Strahlen zum Auge, und diese sei als die Hauptrichtung bezeichnet. Bei etwas bewegtem Wasser erhält das Auge auch aus anderen von jener etwas abweichenden Richtungen reflectirte Strahlen, aber diese Abweichungen sind, wenn die Wellen sehr flach sind, und das Licht im Verhältniss zu seiner Höhe über der Wasserfläche sehr entfernt ist, nicht nach allen Seiten gleich gross, sondern nach oben und unten viel grösser, als nach rechts und links. Sei z. B. angenommen, das Licht und das Auge befinden sich gleich hoch, und ihre Entfernung von einander sei 100mal so lang als ihre Höhe über der Wasserfläche, so lässt sich zeigen, dass jene ersteren Abweichungen etwa 50mal grösser sind, als die letzteren. Alle diese Strahlen bringen nun im Auge den Eindruck eines grösseren hellen Raumes, statt des bei ruhigem Wasser gespiegelten Lichtpunktes hervor. Dieser Raum ist aber nicht kreisförmig, sondern in senkrechter Richtung 50mal länger, als in wagrechter, und bildet also einen schmalen senkrechten Streifen. Wenn die Wellen nicht, wie vorher angenommen wurde, sehr flach bleiben, sondern in ihrer Krümmung etwas zunehmen, so wird zwar dadurch auch jenes Verhältniss geändert, indem es geringer wird, aber der gespiegelte Lichtfleck behält doch noch immer eine stark in die Länge gezogene Gestalt.

Dasselbe lässt sich nun auf den oben bezeichneten Fall der Luftspiegelung übertragen, denn wenn auch bei diesem die Wege der Lichtstrahlen durch die verschiedenartigen Krümmungen noch viel mannichfaltiger werden, als bei der einfachen Reflexion, so wird doch im Allgemeinen die Tendenz vorwalten, ferner helle Punkte, die in diesen Fällen gewöhnlich mit ihren Spiegelbildern in Berührung bleiben, in senkrechte Streifen zu verwandeln. Denkt man sich nun dieses an einer den Horizont begrenzenden Eismasse ausgeführt, so kann man sich sehr wohl vorstellen, dass in der grossen Entfernung, bei der es sich nicht mehr um genaue Ausführung, sondern nur um Andeutung der Figuren handelt, die Streifen als Säulen, Obelisken und Thürme erscheinen können; ebenso ein grösseres in seiner ganzen Breite nach oben ausgedehntes Eisstück, von dem vielleicht einzelne Theile in noch höhere Spitzen ausgezogen sind, als ein mit Thürmen versehenes Schloss; ferner

das einfache Spiegelbild einer Eisbank, welches in der Luft schwebt, und sich vielleicht an beiden Seiten wieder an grössere Massen anschliesst, als eine Brücke oder ein anderer künstlicher Bogen u. s. w.; so dass man im Ganzen eine Stadt mit vielen ausgezeichneten Gebäuden in der Ferne zu sehen glaubt. — Dass dieser Anblick sich nach den Beschreibungen von Scor. häufig und schnell hinter einander ändert, bedarf kaum einer Erklärung, denn es versteht sich von selbst, dass der Zustand der Atmosphäre um so veränderlicher sein muss, je unregelmässiger er ist.

Kehren wir nun zu den *Fata Morgana* zurück, so können wir wohl aus der äussern Aehnlichkeit derselben mit den vorigen Erscheinungen auch auf eine Aehnlichkeit in der Entstehungsart schliessen. Demnach müssten wir annehmen, dass über der Meerenge bei Reggio aus irgend welchen, vielleicht lokalen Gründen zuweilen ein ähnlicher Zustand der Atmosphäre eintrete, wie er in den nordischen Gegenden so oft stattfindet, und dass sich dann die ferne Küste ebenso verwandele, wie dort die Eismassen. Diese Erklärung ist jedenfalls wahrscheinlicher, als die mitunter ausgesprochene Ansicht, dass das Ganze durch die Spiegelung der schräge gegenüberliegenden Stadt Messina hervorgebracht werde, wogegen man unter andern mit Recht eingewandt hat, dass die Bewohner von Reggio das einfache Bild einer Stadt, deren Lage und Ansehen ihnen aus der täglichen Anschauung gegenwärtig ist, nicht verkennen, und daraus nicht so wunderbare Gebilde machen würden, wie sie ihren *Fata Morgana* zuschreiben.

Schliesslich muss hier noch ein von den früheren abweichender Fall der Luftspiegelung erwähnt werden, obwohl er sehr selten vorkommt. Wir haben bisher nur von Spiegelungen nach unten und oben gesprochen, aber nicht von solchen nach der Seite, und es ist auch klar, dass jene ersteren in der Natur durchaus vorwalten müssen, denn da die bedeutendsten Temperaturdifferenzen an einander grenzender Luftschichten fast immer durch den erwärmenden oder erkältenden Einfluss des Erdbodens entstehen, so sind auch die Flächen gleicher Dichte diesem fast immer ziemlich parallel, und können daher nur senkrechte Spiegelungen verursachen. Unter besonderen Umständen kann aber auch wohl einmal eine regelmässige Lagerung ungleich dichter Luftschichten in einer anderen Richtung eintreten, und dadurch auch eine Spiegelung nach einer anderen mehr seitlichen Richtung hervorgebracht werden, wie man dergleichen in der That einige Male wahrgenommen hat. Die wichtigste unter diesen Beobachtungen ist die, welche Jurine und

und Soret auf dem Genfersee gemacht haben, indem sie neben einem etwa zwei Meilen entfernten Schiffe längere Zeit ein deutliches Spiegelbild mitsegeln sahen. Die Erklärung scheint sich, der dortigen Oertlichkeit gemäss, daraus zu ergeben, dass die Gebirge, welche ihre Schatten bis weit auf den See warfen, dadurch die Luft in der Nähe des Ufers kühl erhielten, während dieselbe weiterhin durch die Sonne stark erwärmt wurde, und dass das Schiff zufällig nahe an der Grenze des Schattens hinsegelte.

**Das Funkeln der Fixsterne.** Die Sterne leuchten uns nicht immer mit gleich ruhigem Lichte. Zuweilen, und besonders, wenn sie sich in der Nähe des Horizontes befinden, zeigen sie ein eigenthümliches Zittern, und zugleich ändert sich dabei ihre Lichtintensität und Farbe: einmal scheinen sie ganz matt, dann wieder sehr hell, bald spielen sie mehr in's Röthliche, bald mehr in's Bläuliche. Diese schnellen Wechsel im Lichte der Sterne sind bekannt unter dem Namen des Funkelns.

Was zunächst die zitternde Bewegung betrifft, so erklärt sich diese leicht aus dem Früheren. Wir wissen, dass die Sterne in der Nähe des Horizontes schon im ruhigen Zustande nicht genau an ihrer richtigen Stelle erscheinen, sondern durch die Einwirkung der Atmosphäre etwas gehoben sind. Wenn nun in der letzteren in den Gegenden, welche von den Strahlen des Sternes durchlaufen werden, irgend welche Veränderungen vorgehen, so werden dadurch gleich die Strahlen etwas anders gebrochen, und der scheinbare Standpunkt des Sternes verschoben. Mitunter ist diese Verschiebung merklich gross und längere Zeit andauernd, gewöhnlich aber ist sie sehr gering und nur momentan, indem gleich wieder eine andere Verschiebung folgt. Die Wirkung dieser Verschiebungen ist aber nicht bei allen Sternen gleich. Die Planeten, welche dem blossen Auge zwar fast so klein, wie die Fixsterne erscheinen, haben doch einen scheinbaren Durchmesser, der noch bedeutend grösser ist, als die gewöhnlichen Verschiebungen. Daher werden sie nicht ganz aus ihrer Stelle gerückt, sondern nur am Rande bald erweitert bald verengt, was man durch das Fernrohr als ein Zittern des Randes gewahr wird; der ganze Planet scheint aber still zu stehen. Die Fixsterne dagegen, welche nur als Punkte sichtbar sind, lassen jede kleine Ortsveränderung gleich als Verschiebung des ganzen Sternes deutlich erkennen, und bei ihnen ist daher das Funkeln viel stärker.

Mehr Schwierigkeit als in dem Zittern hat die Theorie in der

Veränderlichkeit der Intensität und der Farbe gefunden. In neuerer Zeit ist aber auch hierfür eine sehr vollsändige Erklärung von Arago gegeben *). Der Eindruck, den ein heller Punkt auf unser Auge macht, wird nicht blos durch einen einzigen in dasselbe eindringenden Strahl bewirkt, sondern es fallen sehr viele Strahlen auf die ganze Pupille, welche sich auf der Netzhaut wieder zu einem Punkte vereinigen. Wenn alle diese Strahlen auf ihrem ganzen Wege immer gemeinschaftlich durch dieselben Mittel gegangen sind, so entsteht das richtige Bild auf der Netzhaut. Ist dagegen ein Theil der Strahlen an irgend einer Stelle durch ein anderes Mittel gegangen, als der übrige Theil, so kann jener gegen diesen etwas beschleunigt oder verzögert sein, da sich die Lichtstrahlen nicht in allen Mitteln gleich schnell fortpflanzen. Man kann sich in Bezug auf die verschiedenen Mittel z. B. vorstellen, das Lichtbündel, welches auf die Pupille fällt, sei an einer Stelle gerade an der Grenzfläche zweier Luftmassen von etwas verschiedener Beschaffenheit vorbeigekommen, so dass einige der Strahlen durch die eine, die übrigen durch die andere gegangen seien. Ist nun durch solche Umstände eine Verschiedenheit des Weges verursacht, so treten die gewöhnlichen Interferenzerscheinungen ein. Beträgt die Verzögerung des einen Theils gegen den anderen z. B. gerade eine halbe Wellenlänge des Lichtes, so heben sich die Wirkungen beider gegenseitig auf, anstatt sich zu verstärken, während bei einer Verzögerung um eine ganze Wellenlänge das Gegentheil eintritt. Die Wellenlängen sind aber nicht für alle in dem weissen Lichte des Sternes enthaltenen Farben gleich gross, und es können sich daher bei einer bestimmten Verzögerung nicht alle Farben in gleichem Maasse aufheben. Jenachdem die Verzögerung die Hälfte der grössten oder der kleinsten vorkommenden Wellenlängen beträgt, oder vielleicht in der Mitte zwischen beiden liegt, zerstören sich vorzugsweise die einen oder die anderen äussersten Farben, oder die mittleren und mit ihnen der grösste Theil des Spectrums: und demgemäss nimmt das frühere Weiss eine blaue oder rothe Färbung an, oder es wird im Ganzen geschwächt.

Mit dieser Theorie, welche die Erscheinung sehr genügend erklärt, stimmt es auch überein, dass das Funkeln, wie schon oben bemerkt, in der Nähe des Horizontes stärker ist, als in grösserer Höhe, ebenso dass es sich in den Tropenländern weniger zeigt, als bei uns, indem dort die Erwärmung der Luft gleichmässiger ist,

*) S. Humboldt. Voyage aux etc. IV, p. 285.

ferner dass es nach Kämtz sehr stark ist, wenn in den höheren Regionen lebhafte Winde wehen, da diese offenbar die Veränderlichkeit im Zustande der Atmosphäre begünstigen. Weniger klar ist es, weshalb das Funkeln in kalten Winternächten besonders deutlich hervortritt; doch kann vielleicht gerade diese Thatsache dazu dienen, über das Verhalten der Atmosphäre bei strengem Froste irgend etwas Neues zu lehren.

## Erscheinungen, welche durch fremde, nur unter besonderen Umständen in der Atmosphäre vorhandene Körper hervorgebracht werden.

**Der Regenbogen.** Dieser ist in unseren Gegenden so häufig sichtbar, und erregt durch seine Schönheit jedesmal so sehr die allgemeine Aufmerksamkeit, dass eine vollständige Beschreibung hier unnöthig ist, und es sollen daher nur die Hauptgesichtspunkte hervorgehoben werden, auf die es bei der Erklärung ankommt.

Er zeigt sich überall, wo eine grosse Menge von Wassertropfen von der Sonne beschienen wird, was in der Natur besonders dann eintritt, wenn sich der Sonne gegenüber ein Regenschauer befindet. Seine Gestalt bezeichnet man gewöhnlich als Theil eines Kreises, dessen Centrum im Gegenpunkte der Sonne liegt, und dessen Radius $41^1/_2{}^0$ beträgt. Diese Angabe ist jedoch nicht genau und für manche Fälle sogar unrichtig, und man muss vielmehr, um zu einer allgemein gültigen Bestimmung zu gelangen, folgende Construction machen. Man denke sich so stehend, dass man die Sonne im Rücken hat, und beschreibe dann eine Kegelfläche, deren Spitze im eigenen Auge liegt, und deren Axe die Fortsetzung der geraden Linie von der Sonne zum Auge ist, und in welchem die Seiten mit der Axe einen Winkel von $41^1/_2{}^0$ bilden. Der Durchschnitt dieser Kegelfläche mit der von der Sonne beleuchteten Regenwand, oder überhaupt der Fläche, auf welcher der Bogen sich bildet, bestimmt die Gestalt des letzteren.

Hieraus ersieht man zunächst, dass der Regenbogen nicht ein an einer bestimmten Stelle der Atmosphäre befindlicher Farbenring ist, den man dort von allen Seiten her betrachten kann, sondern dass jeder Beobachter seinen eigenen Regenbogen sieht. Dasselbe gilt auch von vielen anderen optischen Naturerscheinungen, besonders von den Lichtkränzen und Höfen mit allen ihren Nebenerscheinungen, welche wir weiter unten betrachten werden.

Ferner kann man aus der obigen Bestimmung ersehen, wie die

Lage und Ausdehnung des Regenbogens vom Stande der Sonne abhängt. Ist diese gerade im Auf- oder Untergehen begriffen, so liegt auch ihr Gegenpunkt im Horizonte, und es kann daher in ebenen Gegenden der Regenbogen als ein voller Halbkreis erscheinen. Steht die Sonne höher, so befindet sich ihr Gegenpunkt unter dem Horizonte, und der Regenbogen kann sich nur als kleinerer Kreistheil über denselben erheben. Erreicht endlich die Sonne eine Höhe von $41^{1}/_{2}{}^{0}$ und darüber, so ist gar kein Regenbogen mehr möglich, weil die Kegelfläche gar nicht mehr den Himmel trifft, sondern ganz nach der Erde herabgeneigt ist. — Auf hohen Bergen, wo man zuweilen eine Regenwolke unter sich hat, finden diese Beschränkungen natürlich nicht statt, sondern dort kann man selbst beim höchsten Stande der Sonne einen Regenbogen sehen, der weit mehr als einen Halbkreis umfasst.

Die Breite des Regenbogens beträgt beinahe $2^{0}$, indem der Radius des innern Randes $40^{0}\ 30'$ und der des äussern $42^{0}\ 20'$ ist, und in dieser Zone bilden die Farben von Innen nach Aussen folgende Reihe: Violett, Dunkelblau, Hellblau, Grün, Gelb, Orange, Roth. Betrachtet man den Hintergrund, auf welchem der Bogen gezeichnet zu sein scheint, so bemerkt man einen deutlichen Unterschied zwischen dem Raume innerhalb des Bogens und dem äusseren. Der letztere zeigt ein dunkles Grau, von welchem sich die äusserste Farbe, das Roth, ziemlich scharf abgrenzt; der erstere dagegen ist zwar auch grau, aber merklich heller, besonders in der Nähe des Bogens, so dass auch der Anfang des Violett etwas verwaschen erscheint.

Ausser diesem Hauptbogen zeigt sich häufig noch der sogenannte Nebenregenbogen. Er läuft parallel neben jenem her, indem er einen Kreis um denselben Mittelpunkt, aber mit dem etwas grösseren Radius von ungefähr $52^{0}$ bildet. In ihm liegen die Farben in umgekehrter Ordnung, so dass er nach aussen mit Violett abschliesst, und auch der Hintergrund ist bei ihm nach Aussen etwas heller als nach Innen, woraus folgt, dass der Raum zwischen beiden Bogen die grösste Dunkelheit besitzen muss.

Um die Entstehung des Regenbogens mit allen bisher erwähnten Eigenschaften vollständig zu erklären und seine Nothwendigkeit zu erkennen, braucht man nur zu betrachten, was nach den bekannten Gesetzen der Optik aus dem Lichte wird, welches von der Sonne auf einen Wassertropfen fällt. Sei *AMDN* (Fig. 8.) der Querschnitt eines solchen Tropfens mit dem Mittelpunkte *C*, und *CS* die Richtung, in welcher die Sonne steht, so fallen auf die ganze

vordere Fläche *MAN* Strahlen in paralleler Richtung auf und erleiden nun theils hier, theils an der Hinterfläche verschiedene Brechungen und Reflexionen.

Zunächst wird von jedem auffallenden Strahle z. B. *SB* ein Theil sogleich an der Vorderfläche reflectirt, und die Richtung *BP*, in der dieses geschieht, hängt von der Lage des Punktes *B* auf der Kugelfläche ab, und zwar, wie man sich leicht überzeugen kann, in der Art, dass das von der ganzen Vorderfläche *MAN* reflectirte Licht ziemlich gleichförmig nach allen Richtungen zerstreut wird. Wenn also ein Beobachter vor einer beleuchteten Regenwand steht, so erhält er von jedem Tropfen einige solche Strahlen, und die ganze Wand müsste daher, wenn bloss dieses äusserlich reflectirte Licht wirkte, in einem gleichförmigen Grau erscheinen, welches aber wegen der grossen Verbreitung des Lichtes ziemlich dunkel sein würde.

Der grössere Theil des auf den Tropfen fallenden Lichtes dringt in das Innere desselben ein. Betrachten wir wieder den Strahl *SP*, so erleidet dieser bei seinem Eindringen eine Brechung, und geht etwa in der Richtung *BD* bis zur Hinterfläche. Dort findet wieder eine Theilung statt: ein Theil *DQ* tritt aus der Kugel hervor, um seinen Weg in der Luft fortzusetzen, der andere, auf welchen es uns hier ankommt, wird in der Richtung *DE* reflectirt. Im Punkte *E* wiederholt sich dieselbe Theilung; hier wollen wir aber den reflectirten Theil für jetzt ausser Acht lassen, und nur den Theil *EO* verfolgen, welcher aus dem Tropfen austritt. Um nun die Wirkung aller Strahlen, welche, wie *EO*, im Innern des Tropfens reflectirt sind, kennen zu lernen, müssen wir besonders auf die Richtungen achten, in welchen sie den Tropfen verlassen. Diese Richtungen bestimmen wir nach den Winkeln, welche sie mit der Richtung der einfallenden Strahlen bilden, also z. B. für den Strahl *EO* nach dem Winkel, welcher durch die Verlängerung der Linien *OE* und *SB* in dem Durchschnittspunkte *R* entsteht. Dieser Winkel heisse $\varphi$. Die Grösse desselben hängt ebenfalls, wie früher die Richtung des äusserlich reflectirten Strahles, von der Lage des Punktes *B* ab, wo der einfallende Strahl die Kugelfläche trifft, aber die Abhängigkeit ist hier nicht so einfach, wie dort, weil hier nicht bloss eine Reflexion, sondern ausserdem noch zwei Brechungen bei *B* und *E* stattgefunden haben. Betrachten wir der Reihe nach alle Strahlen, welche in den verschiedenen Punkten von *A* bis *M* einfallen, so ist für den Punkt *A* selbst $\varphi = 0$; für höher liegende Punkte wird $\varphi$ zuerst allmälig grösser, doch ist dieses Wachsen nicht

gleichmässig, sondern wird immer langsamer, je weiter der Einfallspunkt sich von *A* entfernt, bis es an einer gewissen Stelle *K* ganz aufhört, und sich von da an sogar in eine Abnahme verwandelt, so dass für Strahlen, die zwischen *K* und *M* einfallen, der Winkel $\varphi$ wieder kleiner ist als für die bei *K* einfallenden, wo er sein Maximum erreicht hatte.

Das innerlich reflectirte Licht wird also nicht, wie das äusserlich reflectirte, nach allen Richtungen zerstreut, sondern nur nach solchen, die nicht weiter, als um den Maximumwerth des Winkels $\varphi$, von der Richtung der ankommenden Strahlen abweichen, und dabei findet, wie es aus mathematischen Gesetzen folgt, zugleich der wichtige Umstand statt, dass in den äussersten Richtungen, wo $\varphi$ seinen grösstmöglichen Werth hat, wegen der Umkehr von Zunahme zu Abnahme, die dort stattfindet, die Menge der Strahlen ganz besonders gross ist. — Berechnet man nun jenen Maximumwerth des Winkels $\varphi$ nach dem bekannten Brechungsvermögen des Wassers, so findet man ihn im Mittel zu $41^1/_2{}^0$, gerade den Werth, welchen man als Radius des Regenbogens kennt, und durch diese Uebereinstimmung ist es unzweifelhaft, dass man die Erklärung des letzteren aus jener eigenthümlichen Vertheilung des innerlich reflectirten Lichtes ableiten muss, was auch in folgender Weise ganz leicht geschieht.

Denken wir uns wieder einen Beobachter, welcher vor einer ausgedehnten von der Sonne beleuchteten Regenwand steht, und untersuchen, welchen Eindruck das von dort kommende innerlich reflectirte Licht auf ihn machen muss. Nicht von allen Tropfen kann solches Licht zu seinem Auge gelangen, sondern das hängt von ihrer Lage ab, und die Grenze bildet in dieser Beziehung eben jene Kegelfläche, welche uns oben zur Bestimmung der Gestalt des Regenbogens diente, und deren Seiten mit der Axe den Winkel $41^1/_2{}^0$ bilden. Die in unmittelbarer Nähe der Fläche befindlichen Tropfen senden sehr viele, die übrigen eingeschlossenen Tropfen wenigstens einige, alle ausserhalb liegenden dagegen gar keine innerlich reflectirten Strahlen zum Auge. Es muss also auf der Wand ein matt erleuchtetes Kreissegment erscheinen, welches von einem hellen Rande und weiterhin von einem dunklen Raume umgeben ist.

Auf diese Art würde man freilich nur einen ziemlich schmalen Regenbogen erhalten, wenig breiter als die Sonnenscheibe, durch deren Strahlen er erzeugt wird, und mit dieser müsste er auch in seiner Farbe gleich und also weiss sein. Es ist indessen im Vorigen noch ein wesentlicher Umstand unberücksichtigt geblieben.

Da nämlich die verschiedenen in dem weissen Sonnenlichte enthaltenen Farben ungleich stark gebrochen werden, so hat das Maximum des Winkels $\varphi$ für jede Farbe einen besonderen Werth, und die oben angeführte Grösse $41^1/_2{}^0$ ist nur der Mittelwerth. Demnach bildet jede Farbe für sich eine Figur der Art, wie sie vorher beschrieben wurde, und nur die Radien der hellen Bogen sind verschieden. Indem nun alle diese Figuren gleichzeitig auf derselben Regenwand erscheinen, so decken sich die inneren matt erleuchteten Räume, und aus der Mischung aller Farben entsteht ein schwaches Grau; die hellen Ränder dagegen ordnen sich neben einander, indem sie zwar theilweise über einander greifen, aber sich nicht vollständig decken, und es entsteht dadurch eine breite Farbenzone, welche inwendig von einem helleren Grau begrenzt wird als auswendig, ganz so, wie es beim Regenbogen stattfindet.

Ebenso vollständig lässt sich der zweite Regenbogen erklären. Er verdankt seinen Ursprung demjenigen Lichte, welches erst nach zweimaliger innerer Reflexion aus dem Tropfen hervortritt. Betrachten wir nämlich einen unterhalb $A$ (Fig. 9.) in $B'$ einfallenden Strahl $S'B'$, welcher theilweise in der Richtung $B'D'$ eindringt, und dann theilweise in der Richtung $D'E'$ reflectirt wird, und verfolgen wir diesmal von $E'$ ab nicht den Theil, welcher daselbst austritt, sondern den, welcher abermals nach $F'$ reflectirt, und erst dort in der Richtung $F'O'$ herausgelassen wird, so lassen sich in Bezug auf diese doppelt reflectirten Strahlen ähnliche Schlüsse ziehen, wie bei den einfach reflectirten, und man gelangt dadurch zu folgenden Resultaten. Wenn man sich eine eben solche Kegelfläche construirt denkt, wie oben, nur dass darin statt des Winkels von $41^1/_2{}^0$ ein anderer von $52^0$ genommen ist, so können alle Tropfen innerhalb derselben keine doppelt reflectirten Strahlen zum Auge gelangen lassen, sondern nur die ausserhalb befindlichen, und die stärkste Wirkung findet wiederum in der Nähe der Fläche selbst statt. Hieraus übersieht man, wie sich der zweite Bogen mit umgekehrter Farbenfolge bilden kann, und dass er auswendig ein helleres Grau haben muss, als inwendig.

Durch eine Fortsetzung derselben Betrachtungen wird man noch weiter zu einem dritten und vierten Bogen dieser Art geführt, aber diese Bogen nehmen der Reihe nach sehr schnell an Intensität ab, und schon der dritte ist so schwach, dass man ihn nur selten wahrgenommen hat, um so mehr, als auch seine Lage, — $40^0$ von der Sonne, — für die Entstehung und Beobachtung sehr ungünstig ist.

Es würde also unnöthig sein, diese Wirkungen noch weiter zu verfolgen.

Als den Begründer der Theorie des Regenbogens sah man früher gewöhnlich Antonio de Dominis an, dessen Abhandlung 1611 zu Venedig herausgegeben ist. Zu Anfange dieses Jahrhunderts hat aber der Italiener Venturi eine viel ältere Erklärung aufgefunden, in einer Schrift des deutschen Mönches Theodorich aus Freiburg vom J. 1311, von der sich ein Manuscript zu Basel und ein anderes, wiewohl weniger vollständiges zu Leipzig befindet. Theodorich beschreibt und zeichnet darin ganz richtig, welche Brechungen und Reflexionen im Innern der Tropfen vorgehen, und wie sich die Wege der verschieden gefärbten Strahlen unterscheiden müssen, damit der Haupt- und Nebenregenbogen entstehe, was für jene Zeit wahrlich bewundernswürdig ist. Die Gründe, weshalb die Strahlen in einer bestimmten Richtung besonders stark reflectirt werden, und weshalb diese Richtung für die einzelnen Farben verschieden ist, konnte er natürlich noch nicht angeben, und diese Vervollständigungen der Theorie blieben Cartesius und Newton vorbehalten, nachdem die Gesetze der Brechung und der Farbenzerstreuung ermittelt waren.

Als eine entscheidende Bestätigung der Theorie, wenn es einer solchen überhaupt bedarf, kann die Beobachtung dienen, welche Biot und nach ihm noch andere Physiker gemacht haben, dass sich das Licht beider Regenbogen als vollständig polarisirt erweist, und dadurch ein Zeugniss von der mit ihm vorgegangenen Reflexion ablegt.

Wenn die Sonne sehr tief steht und vielleicht eben im Auf- oder Untergehen begriffen ist, so erscheint sie uns roth, indem aus ihrem Lichte auf dem weiten Wege durch die Atmosphäre die violetten und blauen Strahlen grossentheils verlöscht sind. Das muss natürlich auch auf die Farben des Regenbogens Einfluss haben, und in der That erscheint ein solcher, wenn er sich gerade um diese Zeit bildet, bedeutend schmaler als sonst, und manchmal enthält er nur Roth, Gelb und ein wenig Grün.

Befindet sich in der Nähe des Beobachters eine recht ruhige Wasserfläche, so zeigt sich darin ein klares Spiegelbild der Sonne, und dieses kann nun seinerseits, wie die Sonne selbst, das Entstehen eines oder auch zweier Regenbogen veranlassen, und man hat unter solchen Umständen zuweilen vier verschiedene Bogen gesehen, zwei zur Sonne, und zwei zu ihrem Bilde gehörige.

Dieselbe Rolle wie die Sonne kann natürlich auch der Mond, besonders als Vollmond, spielen. Das Mondlicht ist aber im Vergleich zum Sonnenlichte so ausserordentlich schwach, dass der Mondregenbogen kaum erkennbar ist, und daher kommt es, dass man ihn nur selten wahrnimmt, und dann gewöhnlich die Farben nicht unterscheiden kann, sondern nur einen weissen oder gelblichen Schein sieht. Mitunter hat man jedoch auch prismatische Farben beobachtet.

In dem Namen des Regenbogen liegt die Vorstellung, als ob die Erscheinung zu ihrem Entstehen nothwendig eines Regens bedürfe. Es ist aber schon oben gesagt, dass sie sich überall zeigen kann, wo man Gelegenheit hat, viele Wassertropfen der Sonne gegenüber zu beobachten. So kann man z. B. oft bei Wasserfällen, Springbrunnen, Mühlrädern und dergleichen die farbigen Bogen dicht vor sich sehen, und manchmal zeigen sie sich sogar am Erdboden. Wenn z. B. eine Wiese des Morgens mit unzähligen Thautropfen bedeckt ist, welche von der Sonne beschienen werden, so können auch diese einen Regenbogen hervorbringen. Hier erscheint er dann aber nicht in Kreisgestalt, sondern als eine mit der convexen Seite dem Beobachter zugekehrte Hyperbel, wie sie dem Durchschnitte der Kegelfläche mit der Ebene der Wiese entspricht.

In allem Bisherigen wurde nur die Haupterscheinung des Regenbogens betrachtet, welche er jedesmal ohne wesentliche Veränderungen zeigt; es kommt indessen noch eine interessante Nebenerscheinung vor, die nur unter besonderen Umständen eintritt, und nach diesen auch ihr Wesen ändert, nämlich die sogenannten secundären oder überzähligen Bogen.

Sie bestehen darin, dass der Hauptregenbogen nach Innen, und zuweilen auch der Nebenregenbogen nach Aussen, nicht mit dem Violett abschliesst, sondern jenseit desselben noch andere Farben erkennen lässt. Die Reihenfolge der letzteren ist nicht immer gleich: in einigen Fällen hat man ziemlich vollständige Wiederholungen des ganzen Regenbogens, nur auf einen engeren Raum zusammengedrängt, gesehen, in anderen sind nur einzelne Farben aus dem Grau hervorgetreten, am häufigsten aber ist die Anordnung folgende. An das Violett schliesst sich ein neues Roth an, welches theilweise mit jenem zusammenfällt, und durch die Vermischung Purpur giebt, und darauf folgt Grün, dann wieder Purpur, Grün und so zuweilen 3- oder 4mal hinter einander. Langwith beobachtete auf diese Weise neben dem vollständigen primären Regenbogen noch drei secundäre Farbenreihen nebst dem Anfange ei-

ner vierten, und fand dieselben zusammengenommen etwa so breit, wie den primären Bogen allein *). Er sagt auch, dass man die secundären Bogen immer nur am oberen Theile des primären sehe, indem sie nach beiden Seiten hin allmälig matter werden, und lange bevor sie den Fuss erreichen, ganz verschwinden. Diese Bemerkung ist auch durch viele spätere Beobachter bestätigt, und mir ist nur Eine Ausnahme bekannt, welche in neuester Zeit von Bravais wahrgenommen wurde, indem er von zwei an einem Regenbogen sichtbaren secundären Farbenreihen die eine bis zum Horizonte hinab verfolgen konnte **).

Von den wahrscheinlichen Ursachen der secundären Regenbogen ist in diesem Bande schon einmal die Rede gewesen, indem der Herr Verf. der ersten Abhandlung nach Auseinandersetzung seiner eigenen Theorie auch die sonstigen Erklärungsarten in den §§ 41—43 mit den wichtigsten Originalstellen angeführt hat. Ich will daher nur Eine derselben, nämlich die von Th. Young aus der Interferenz des Lichtes abgeleitete, noch einmal erwähnen, indem sich daran eine von Airy ausgeführte eigenthümliche Behandlung der ganzen Regenbogentheorie anschliesst, welche hier nicht übergangen werden darf.

Aus der obigen Erklärung des Regenbogens ist bekannt, dass unter allen auf die Oberfläche des Tropfens $AMDN$ (Fig. 8.) treffenden Sonnenstrahlen diejenigen, welche in einem gewissen Abstande $AK$ vom Punkte $A$ auffallen, nach ihrer inneren Reflexion am weitesten von der Richtung der ankommenden Strahlen abweichen —den grössten Winkel $\varphi$ bilden—. Sowohl die zwischen $A$ und $K$, als auch die zwischen $K$ und $M$ auffallenden Strahlen bilden kleinere Winkel $\varphi$. Betrachten wir daher einen Punkt der Regenwand, welcher einem solchen kleineren Winkel $\varphi$ entspricht, so erhalten wir von da aus Strahlen, die jenen beiden Gruppen angehören, und diese müssen, da sie innerhalb der Tropfen verschiedene Wege durchlaufen haben, nothwendig interferiren. Wenn man sich den Winkel $\varphi$ von seinem Maximumwerthe aus allmälig abnehmend denkt, so wird dabei für die entsprechenden Strahlen aus beiden Gruppen der Wegunterschied immer grösser, und sie müssen sich daher abwechselnd verstärken und schwächen.

Die daraus entstehenden Wirkungen lassen sich besonders durch eine graphische Darstellung, wie sie Airy in der weiter unten zu

*) Siehe die wörtliche Beschreibung auf S. 163. dieses Bandes.

**) Annuaire météorologique de la France pour 1849. p. 331.

erwähnenden Arbeit angewandt hat, leicht anschaulich machen. Die Abscissenaxe in Fig. 15. soll die verschiedenen Werthe des Winkels $\varphi$ bestimmen und zwar so, dass der Punkt 0 dem Maximumwerthe dieses Winkels für irgend eine zur Betrachtung ausgewählte Farbe, z. B. für das Roth, entspricht, und von hier aus nach links die Zunahme und nach rechts die Abnahme des Winkels gerechnet wird. Die Curven stellen dann durch ihre Ordinaten die bei den verschiedenen Werthen von $\varphi$ stattfindende Intensität des rothen Lichtes dar, wie man sie erhält, jenachdem man die eine oder die andere Betrachtungsweise anwendet.

Die punktirte Curve giebt die Intensität nach der gewöhnlichen, im Obigen aus einander gesetzten Theorie. Bei 0, — d. h. in dem Abstande vom Gegenpunkte der Sonne, wo das Roth im primären Regenbogen seinen Platz hat, — ist die Intensität dieser Farbe am grössten, und zwar, streng genommen, gegen die an anderen Punkten stattfindende, unendlich gross. Von da aus nach rechts, — d. h. beim Regenbogen nach inwendig, — senkt sich die Curve anfangs sehr schnell, und dann langsamer, während sie sich nach links hin gar nicht fortsetzt, wodurch das matte allmälig abnehmende Licht innerhalb des Regenbogens, und die Dunkelheit ausserhalb desselben angedeutet wird.

Die schwach ausgezogene Curve stellt die Lichtintensität dar, welche man erhält, wenn man mit Th. Young die Interferenz berücksichtigt. Auch hier findet man die Intensität bei 0 unendlich gross, und von da nach rechts hin abnehmend; aber die Abnahme geschieht nicht, wie vorher, stetig, sondern unter abwechselndem Sinken und Steigen. Es giebt also rechts von 0 noch eine Reihe von Stellen, in welchen das Roth zwar nicht so intensiv ist, wie bei 0, aber doch gegen ihre Umgebung mit besonderer Lebhaftigkeit hervortritt. Wir wollen diese als secundäre Lichstellen bezeichnen, im Gegensatze zu der bei 0 liegenden, welche die primäre heisse. Derselbe Wechsel von Hell und Dunkel findet nun auch bei den übrigen Farben statt, und während die primären Lichtstellen aller Farben zusammen den primären Regenbogen bilden, können aus den secundären Lichtstellen unter günstigen Umständen, die weiter unten noch näher bezeichnet werden sollen, secundäre Bogen entstehen.

Diese eigenthümliche Vertheilung der Helligkeit leitete Th. Young aus der von ihm verfochtenen Undulationstheorie des Lichtes ab *); doch hat er dabei noch nicht alle Consequenzen dieser

*) Gilb. Ann. XXXIX.

Theorie durchgeführt. Er beschränkte sich nämlich darauf, die aus ihr folgende Interferenz anzuwenden, ohne im Uebrigen die alte Erklärung zu ändern, welche auf der Vorstellung beruht, dass das Licht sich strahlenförmig fortpflanze, und dabei den gewöhnlichen Brechungs- und Reflexionsgesetzen folge. Der Begriff der Lichtstrahlen hat aber in der Undulationstheorie keine reelle Bedeutung, sondern wird nur zur leichteren Anschauung und Rechnung beibehalten. Streng genommen muss man die Wirkungen des Lichtes immer aus der Betrachtung seiner Wellenflächen ableiten, denn wenn auch in den meisten Fällen beide Betrachtungsweisen zu demselben Resultate führen, so kommen doch mitunter Abweichungen vor, die nicht vernachlässigt werden dürfen. Es war daher interessant, auch die Entstehung des Regenbogens so zu verfolgen, dass man die Form der Lichtwellen unmittelbar nach ihrem Austritte aus den Tropfen festzustellen und daraus die Wirkungen auf unser Auge zu bestimmen suchte.

Diese Art der Behandlung hat Airy angewandt *) und ist dabei zu einem Ergebnisse gelangt, welches, wenn es auch das Wesen der früheren Erklärung nicht ändert, doch quantitativ etwas von derselben abweicht. Danach liegt die primäre Lichtstelle irgend einer Farbe nicht in der Richtung, welche dem oben erwähnten Maximumwerthe des Winkels $\varphi$ entspricht, sondern bei einem etwas kleineren Werthe von $\varphi$, und die Intensität ist daselbst nicht unendlich gross, sondern hat eine bestimmte Stärke. Die weitere Vertheilung des Lichtes ist dann aber ganz ähnlich wie bei der Young'schen Theorie, indem ebenfalls neben jener Stelle noch mehrere secundäre Lichtstellen liegen, welche der Reihe nach an Helle abnehmen. Diese Vertheilung ist durch die stark ausgezogene Curve (Fig. 15.) dargestellt, welche bei noch weiterer Fortsetzung nach rechts hin eine ähnliche Reihe von Kuppen bilden würde, wie die schwach ausgezogene. Die so veränderte Lage der Lichtstellen ist durch spätere Messungen von Miller **) und Galle ***) bestätigt, und man muss daher die Airy'sche Behandlungsart wohl als die eigentlich richtige ansehen.

---

*) Transact. of the Cambridge Phil. Soc. Vol. VI. pag. 379. und Pogg. Ann. Ergänzungsbund (LI.) S. 232.

**) Phil. Magaz. Ser. III. Vol. XVIII. p. 520; Trans. of the Cambr. phil. soc. Vol. VII. P. III. und Pogg. Ann. LIII. S. 214.

***) Pogg. Ann. LXIII. S. 342.

Es fragt sich nun noch, unter welchen Umständen aus den secundären Lichtstellen, welche man bei Betrachtung eines einzelnen Tropfens und einer einzelnen Farbe findet, vollständige secundäre Regenbögen entstehen können. Dazu sind zwei Bedingungen erforderlich. Erstens müssen die Regentropfen sehr klein sein. Ie grösser diese nämlich sind, desto enger liegen die secundären Lichtstellen unter einander und mit der primären zusammen, und dadurch wird ihr Sichtbarwerden verhindert. Beim Roth z. B., welches im primären Regenbogen den äussersten Platz einnimmt, muss die erste secundäre Lichtstelle beinahe so weit von jener primären entfernt sein, als der ganze übrige primäre Regenbogen breit ist, sonst würde das erste secundäre Roth etwa mit dem primären Gelb oder Grün zusammenfallen und dadurch verschwinden, und ähnliche Vermischungen würden auch bei den übrigen Farben stattfinden. Damit sich der erste secundäre Bogen ganz vom primären sondere, oder sich doch nur mit dem Violet desselben etwas vermische, müssen die Durchmesser der Tropfen kleiner als $^1/_{70}$ Zoll sein, und in diesem Falle stimmt auch die von der Theorie gegebene Breite der secundären Bogen ziemlich gut mit der von Langwith beobachteten überein.

Die zweite Bedingung ist, dass die Tropfen alle ziemlich gleich gross seien, denn bei verschiedenen Tropfen haben die secundären Lichtstellen verschiedene Abstände, und erleiden daher eine allgemeine Vermischung, wodurch ein unbestimmtes Grau entsteht.

Aus diesen Bedingungen ist es erklärlich, warum man nicht bei jedem Regenbogen auch die secundären Bogen sieht. Ferner lässt sich erkennen, warum die letzteren, wenn sie erscheinen, sich fast immer nur an den oberen Theilen des Bogens zeigen. Man kann nämlich annehmen, dass die Tropfen in den höheren Regionen bei ihrer Bildung oft noch alle so klein sind, wie es jene erste Bedingung verlangt, während sie beim Fallen durch die feuchte Luft mehr und mehr anwachsen, indem sich immer neuer Wasserdunst an ihren Oberflächen niederschlägt. Dabei scheint aber eine andere Schwierigkeit einzutreten. Wenn nämlich die Tropfen während ihres Falles grösser werden, so sollte man dem Vorigen nach erwarten, dass die secundären Bogen sich an den unteren Theilen immer enger an den primären anschliessen, und endlich ganz in ihm verschwinden würden, während man aus der Erfahrung weiss, dass sie vom Gipfel aus nach beiden Seiten parallel neben ihm herlaufen, und nur an Deutlichkeit nach unten zu immer

mehr verlieren. Ich glaube indessen, dass man diesen Einwand dadurch vermeiden kann, dass man annimmt, dass in den unteren Regionen nicht blos die von oben kommenden Tropfen grösser werden, sondern auch neue kleine Tropfen entstehen, und daher die Summe der dort vorhandenen Tropfen nicht sowohl die erste Bedingung der Kleinheit, als vielmehr die zweite der Gleichförmigkeit unerfüllt lässt, wodurch jene unbestimmte Mischung entstehen muss.

Wenn man statt einer Regenwand einen dichten von der Sonne beschienenen Nebel vor sich hat, was in Gebirgen besonders im Spätsommer und Herbst des Morgens häufig vorkommt, so gewahrt man auf demselben mitunter einen hellen Bogen, der einige Aehnlichkeit mit dem Regenbogen hat. Er ist aber bedeutend schwächer als dieser, erscheint meistens weiss und höchstens am äusseren Rande etwas röthlich, und hat in den Fällen, wo man Messungen anstellen konnte, immer kleinere Radien gezeigt als der Regenbogen, und zwar verschieden zwischen den Grenzen 33° und 41°. Bravais, der dieser Erscheinung eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet hat, ist zu einer sehr einfachen und natürlichen Erklärung gelangt *), wodurch sie auf den gewöhnlichen Regenbogen zurückgeführt und somit der ihr beigelegte Name eines weissen Regenbogens gerechtfertigt wird.

Da die Strahlen, welche den gewöhnlichen Regenbogen bilden, nicht durch den Mittelpunkt der Tropfen gehen, so sind zur Entstehung desselben auch nicht vollständig ausgefüllte Wasserkugeln nothwendig, sondern sie können inwendig hohl sein. Der hohle Raum darf aber im Verhältniss zur Dicke der Wasserschicht nicht zu gross sein, sondern wenn man den Radius der innern Kugelfläche gleich 1 setzt, so muss der der äusseren wenigstens 1,55 betragen. Ist dieses nicht der Fall, so werden die Strahlen, welche den Regenbogen hervorbringen würden, an der inneren Fläche aufgefangen und dadurch sein Entstehen verhindert; aber ein Theil derjenigen Strahlen, welche dazu beitragen, den Raum innerhalb des Regenbogens heller erscheinen zu lassen, als den äusseren, kann dabei in seinem Wege noch ungestört sein, und dieser bewirkt dann die Entstehung eines Ringes, der etwas heller ist, als der übrige Hintergrund. Bravais zeigt durch seine Rechnungen, dass die Möglichkeit, einen solchen Ring zu bilden, beginnt, wenn der

---

*) Journ. de l'école polytechnique Cah. 30. und Ann. de chim. et de phys. III. S. T. XXI. p. 348.

äussere Radius den Werth 1,38 überschreitet. Nimmt man also an, dass in jenen schweren Nebeln die Bläschen meistens so dick seien, dass ihr äusserer Radius mehr als 1,38 betrage, aber noch nicht 1,55 erreiche, so folgt daraus, dass auf ihnen zwar nicht der vollkommene, farbige, wohl aber der weisse Regenbogen entstehen könne.

**Der Hof mit seinen Nebenerscheinungen.** Unter dem Namen von Höfen pflegt man im gemeinen Leben alle Lichtkreise zu verstehen, welche sich am Himmel um die Sonne oder den Mond zeigen. Man darf diese Kreise aber nicht alle als gleichartig betrachten. Sie bilden sich zwar sämmtlich in Wolken und Nebeln, aber diese selbst zerfallen in zwei wesentlich verschiedene Classen, von denen die eine wahrscheinlich aus Wasserbläschen, die andere aus Eiskrystallen besteht. In ihrem gewöhnlichsten Vorkommen lassen sich die Wolken beider Classen schon durch das blosse Ansehen unterscheiden, indem die letzteren, welche dann *Cirri* oder *Cirrostrati* genannt werden, sehr hoch schweben und glänzend weisse Schäfchen oder weit hingezogene Streifen bilden, während die ersteren uns näher sind, und meistens eine mehr abgerundete Gestalt zeigen, in welcher sie *Cumuli* heissen, obwohl auch sie flockenförmig zerrissen oder in lange Streifen geordnet sein können. Jede dieser beiden Classen von Wolken oder Nebeln erzeugt eigenthümliche Lichterscheinungen.

In den aus Bläschen bestehenden sieht man, wenn sie unter der Sonne oder dem Monde hinziehen, und dünn genug sind, um das Licht in hinlänglicher Stärke durchscheinen zu lassen, farbige Ringe von 1$^0$ bis 6$^0$ Halbmesser, in welchen besonders die nach Aussen hin abschliessende rothe Farbe vorherrscht. In den aus Eisnadeln bestehenden dagegen bilden sich viel grössere und complicirtere Figuren, von denen die Ringe um die Sonne nur einen Theil ausmachen. Der kleinste unter den letzteren hat einen Radius von 22$^0$, und weicht auch in der Farbenfolge dadurch von den vorigen ab, dass er das Roth inwendig hat.

Da demnach diese beiden Erscheinungen sowohl durch ihr Ansehen, als auch durch die Bedingungen ihres Entstehens ganz ververschieden sind, so ist es unzweckmässig, für beide denselben Namen zu gebrauchen. Manche Autoren haben sie daher als kleinere und grössere Höfe unterschieden, Kaemtz dagegen hat den Namen Hof — *halo* — nur für die letzteren beibehalten, und die ersteren Lichtkränze — *coronae* — genannt, und dieser Be-

zeichnung wollen auch wir uns anschliessen. — Wir wenden uns nun zunächst zur Betrachtung des Hofes.

Wenn derselbe sich mit einiger Vollständigkeit bildet, so bietet er eine solche Mannichfaltigkeit von Ringen um die Sonne, Kreisen durch dieselbe, Nebensonnen und bogenförmigen Ansätzen dar, dass man ihn zu den auffallendsten und wunderbarsten Naturerscheinungen zählt. Aber in dieser Weise erblickt man ihn sehr selten, und ganz vollständig, mit allen ihm angehörenden Theilen, wird er vielleicht nie gesehen, indem es fraglich ist, ob die verschiedenen Umstände, welche für die einzelnen Nebenerscheinungen günstig sind, alle gleichzeitig stattfinden können. Manche der letzteren sind überhaupt auch noch so selten beobachtet und beschrieben, dass wir über ihre Gestalt und Lage noch ziemlich ungewiss sind.

Ganz anders ist es mit den Haupttheilen des Hofes. Als solche kann man nämlich bezeichnen den oben erwähnten Ring von 22° Halbmesser, ferner zwei an den Enden des horizontalen Durchmessers befindliche Nebensonnen oder Nebenmonde, und zwei ihn aus einem höchsten und niedrigsten Punkte berührende Bogen. Diese sind nicht so selten, sondern lassen sich theils einzeln, theils in Gemeinschaft ziemlich oft wahrnehmen, viel öfter, als man vielleicht glaubt, wenn man nicht mit Aufmerksamkeit auf sie geachtet hat. Als Beleg können z. B. die Beobachtungen von Galle dienen *), welcher in Zeit von 19 Monaten 78mal den Ring von 22°, 45 Nebensonnen oder Nebenmonde und 28 Berührungsbogen gesehen hat.

Es würde nun, bevor wir auf das Wesen der Erscheinung näher eingehen, zunächst nöthig sein, einige besonders vollständige Höfe, wie sie zu verschiedenen Zeiten gesehen wurden, zu beschreiben. In dieser Beziehung kann ich aber wieder auf einen früheren Aufsatz dieses Bandes verweisen, in welchem Hr. Kuhse mehrere der wichtigsten Phänomene der Art nach den Originalbeschreibungen zusammengestellt hat, und ich werde daher im Folgenden die verschiedenen Theile des Hofes nur einzeln, wie im Verlaufe der Betrachtungen an sie die Reihe kommt, anführen. Die wichtigsten dieser Theile finden sich auf Fig. 14. angedeutet; doch muss dabei bemerkt werden, dass sie nur der klaren Uebersicht wegen so zusammengestellt sind, indem man einerseits in der Wirklichkeit nie alle dort gezeichneten Theile gleichzeitig und mit solcher Vollständigkeit gesehen hat, und andererseits dort wiederum mehrere Gestalten fehlen, die man zuweilen wahrgenommen hat,

---

*) Pogg. Ann. B. 49, S. 3.

die aber wegen der Seltenheit ihres Vorkommens noch kein recht sicheres Bild gestatten. Ausser dieser Figur werde ich mich auch auf die zu dem vorher erwähnten Aufsatze gehörigen (Tafel II — IV.) beziehen, welche die Erscheinungen darstellen, wie sie wirklich beobachtet sind.

Eine Erklärung des Hofes wurde zuerst von Cartesius versucht. Er nahm schon das Vorhandensein von Eiskörperchen dabei zu Hülfe, ging aber nicht genau genug auf die Sache ein. Sie wurde indessen bald von Huygens weiter ausgeführt. Dieser meinte, die Körperchen beständen aus einem undurchsichtigen Schneekerne, umgeben von einer Wasserhülle, und hätten theils die Gestalt von Kugeln, theils von Cylindern, welche letzteren so schwebten, dass ihre Axen senkrecht ständen. Obwohl diese Ansicht jedenfalls unrichtig ist, so wusste er daraus doch die Erscheinungen mit solchem Geschicke abzuleiten, dass man, als Mariotte die richtige Idee über die Eistheilchen aussprach, dass sie Krystalle mit übereinstimmenden Winkeln wären, wenig darauf achtete, indem man sich durch die Huygens'sche Erklärung schon befriedigt fühlte. Erst in neuerer Zeit wurde Mariotte's Gedanke wieder aufgenommen, aber dann auch kurz nach einander von Venturi, Fraunhofer, Babinet und besonders von Brandes *), Galle **) und Bravais ***) so erfolgreich behandelt, dass jetzt die wichtigeren, mit einiger Regelmässigkeit wiederkehrenden Theile des Hofes fast alle im Wesentlichen ausser Zweifel sind, und auch von der seltener vorkommenden Erscheinungen schon manche sinnreiche Erklärungsversuche vorliegen, die freilich weniger zuverlässig sind.

Dass die Höfe wirklich ihre Entstehung kleinen Eiskörpern verdanken, ist durch die Umstände, unter welchen sie erscheinen, und ihr ganzes Wesen schon so wahrscheinlich, dass in dieser Beziehung alle Erklärungen von Cartesius ab übereinstimmen. Es giebt aber auch Fälle, wo man sich durch den unmittelbaren Augenschein davon überzeugen kann. Man sieht nämlich zuweilen, besonders in den Polargegenden, aber an kalten Wintertagen auch bei uns, die Atmosphäre mit unzähligen Eisflittern angefüllt, welche so klein sind, dass man sie fast nur durch ihr Blinkern in der Sonne wahr-

---

*) Gehler's phys. Wörterb. neue Ausgabe Art. Hof.
**) Pogg. Ann. B. 49.
***) Journ. de l'école polyt. Cah. 31.

nehmen kann. Unter diesen Umständen bemerkte nun Kaemtz *) mehrfach, dass die hellen Punkte nicht überall erschienen, sondern einen Bogen bildeten, und durch Messungen überzeugte er sich, dass dieser dem Ringe von 22° angehörte. Ferner beobachtete Scoresby bei einer seiner Reisen auf den Wallfischfang **) an einem sehr kalten Tage kleine Wolken, aus welchen ein Schauer von Eisnadeln herabfiel; zugleich sah er zwei Nebensonnen, und fand, dass diese und der dazu gehörige Ring besonders dann lebhaft wurden, wenn jene Wolken mit ihrem Eisregen durch sie hindurch zogen, so dass es offenbar die Eistheilchen waren, welche den Lichteffect hervorbrachten. — Hiermit hängt es auch zusammen, dass die Höfe im Allgemeinen häufiger in kalten als in warmen Gegenden, und häufiger im Winter als im Sommer vorzukommen scheinen.

Die nächste Frage ist nun, welche Gestalt die in der Atmosphäre vorkommenden Eiskrystalle haben; aber darüber lässt sich schwer entscheiden, denn die Schneeflocken, die man bisher beobachtet hat, zeigen so mannichfaltige und meistens so wunderbar zusammengesetzte Figuren, dass sich daraus die Gestalt der einzelnen Theilchen, aus denen sie bestehen, nicht mit Sicherheit schliessen lässt. Soviel sieht man aber deutlich, dass unter den Krystallwinkeln besonders solche von 60° und 120° vorherrschen, und man scheint als einfachste Gestalt eine dreiseitige oder sechsseitige Säule annehmen zu können, die oben und unten durch Flächen begrenzt ist, die gegen die Axe senkrecht stehen, und also mit den Seitenflächen rechte Winkel bilden.

Sei $ABCDEF$ (Fig. 10.) der Querschnitt einer solchen sechsseitigen Säule, in welchem vorausgesetzt wird, dass die Winkel alle 120° betragen, während die Seiten nicht nothwendig unter einander gleich zu sein brauchen, so kann man je drei dieser Seiten, welche abwechselnd auf einander folgen wie $AB$, $CD$ und $EF$, als Theile der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks $HIK$ ansehen. Daraus folgt, dass alle Brechungen und Reflexionen, welche in einer regelmässigen dreiseitigen Säule stattfinden können, auch in einer sechsseitigen möglich sind. Wir können uns daher der Einfachheit wegen vorläufig auf die Betrachtung von dreiseitigen Prismen beschränken, ohne mit Bestimmtheit voraus zu setzen, dass solche wirklich vorhanden seien.

*) Meteorol. B. 3, S. 118.
**) Journ. of a voyage etc.

Um die Wirkungen derselben auf das Licht zu verfolgen, wollen wir zuerst die Bedingung stellen, dass sie so liegen, dass ihre Axen gegen die ankommenden Sonnenstrahlen perpendikulär seien*). Betrachten wir nun lauter Prismen, deren Axen parallel sind, und zwar in einer Richtung, die der vorigen Bedingung entspricht, so besteht bei diesen die Verschiedenheit der Lage nur noch in einer verschiedenen Drehung um jene Axenrichtung, und es mögen *HIK*, *H'I'K'* und *H''I''K''* (Fig. 11.) die senkrechten Querschnitte dreier solcher Prismen sein. Sei *SA* ein Sonnenstrahl, welcher auf das erste auffällt, so wird er bei seinem Eintritte in der Richtung *AB* und bei seinem Austritte nach *BO* gebrochen, so dass er im Ganzen um den Winkel *ONP*, welcher $\varphi$ heisse, aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird. Dieser Ablenkungswinkel ist es, auf den es hier ankommt. Er ist nicht in allen Lagen des Prisma's gleich gross. Wenn sich ein Prisma um seine Axe dreht, und man verfolgt, wie sich dabei die Ablenkung ändert, so findet man, dass sie bei einer gewissen Stellung des Prisma's einen Minimumwerth hat, so dass sie, mag man das Prisma von hier aus nach der einen oder nach der andern Seite drehen, in beiden Fällen wächst. Diese Stellung ist in dem mittelsten Dreiecke der Fig. 11. angedeutet und wird dadurch bestimmt, dass der innere Theil *A'B'* des Strahles der Seite *I'H'* parallel läuft. Das erste und dritte Dreieck der Figur weichen in ihren Stellungen nach beiden Seiten von jener mittleren ab, und daher sind die Winkel $\varphi$ und $\varphi''$ beide grösser als $\varphi'$.

Ist die erste Bedingung, dass die Axen der Prismen perpendikulär gegen die Sonnenstrahlen stehen, nicht erfüllt, und müssen also die Strahlen schräg hindurch gehen, so wird auch durch diesen Umstand die Ablenkung vergrössert. Wenn man daher ein Prisma sich allmälig um eine solche schiefe Richtung der Axe drehen lässt, so findet sich zwar auch hier eine Lage, in der die Ablenkung am kleinsten ist, aber dieser kleinste Werth ist grösser als der oben erhaltene, $\varphi'$. Man kann also allgemein sagen: unter allen Prismen von beliebigen Lagen bringt dasjenige, dessen Axe senkrecht gegen die Strahlen steht, und wel-

*) Es soll im Folgenden der Kürze wegen immer nur von den Wirkungen der Sonnenstrahlen die Rede sein. Natürlich kann der Mond dieselben Erscheinungen hervorbringen, nur dass die Mondhöfe wegen der Schwäche des Lichtes im Allgemeinen matter, farbloser und weniger vollständig ausfallen, als die Sonnenhöfe.

ches ausserdem die oben bezeichnete Stellung hat, das Minimum der Ablenkung hervor.

Dieses Minimum hat dieselbe Eigenschaft, wie das beim Regenbogen vorkommende Maximum, dass nämlich, wenn sehr viele Prismen von verschiedenen Lagen zugleich wirken, nach derjenigen Richtung, welche dem Minimum $\varphi'$ entspricht, ganz besonders viele Strahlen gebrochen werden.

Demgemäss kann man nun schliessen, welche Wirkung eintreten muss, wenn in der Atmosphäre vor der Sonne unzählige prismatische Eiskörperchen schweben, deren Stellungen ganz willkürlich sind, oder die in fortwährender Bewegung und Drehung begriffen sind. Von solchen Stellen des Himmels, deren Abstand von der Sonne gerade dem Winkel $\varphi'$ entspricht, werden wir sehr viele gebrochene Strahlen erhalten, von den entfernteren Stellen wenigstens einige, und von den näher liegenden gar keine. Da dieselbe Lichtvertheilung an allen Seiten der Sonne gleichmässig stattfinden muss, so ist die dadurch bedingte Erscheinung ein um die Sonne gehender Ring mit dem Radius $\varphi'$, dessen äussere Umgebung einen helleren Hintergrund bildet, als die innere.

Hierbei ist nun wieder noch nicht berücksichtigt, dass die verschiedenen Farben in verschiedenem Verhältnisse gebrochen werden, und daher der Winkel $\varphi'$ nicht für alle denselben Werth hat. Für die rothe ist er am kleinsten und beträgt etwa 22°, während er für die anderen bis über 23° wächst. Es muss also aus dem dunklen Raume zuerst ein rother Ring hervortreten, hinter diesen, zum Theil noch mit ihm zusammenfallend, ein oranger, dann ein gelber, grüner u. s. f. folgen. Der innere Rand des Ringes wird somit roth sein, und dieses Roth um so reiner und deutlicher erscheinen, als es mit keiner fremden Farbe vermischt ist, während an jeder Stelle, wo eine der folgenden Farben ihre grösste Intensität hat, zugleich auch noch ziemlich viel Licht von den vorhergehenden vorhanden ist.

Diese durch die Theorie gegebenen Resultate werden durch die Erfahrung vollkommen bestätigt. So enthalten z. B. die auf den Tafeln II — IV. gegebenen Figuren fast alle den Ring von 22°, und auch die Farbenfolge in demselben entspricht immer der obigen Angabe, falls nicht, wie es besonders bei Mondhöfen zuweilen vorkommt, das Licht zu schwach ist, um überhaupt Farben erkennen zu lassen.

Eine einfache Erweiterung der vorstehenden Betrachtungen führt auch zu den diesem Ringe angehörigen Nebensonnen und bogenförmigen Ansätzen. Soll der Ring in allen seinen Theilen

gleich hell erscheinen, so müssen die Eisprismen ziemlich gleichmässig in allen möglichen Richtungen liegen. Sobald eine bestimmte Lage vorwaltet, muss auch eine vermehrte Helle an einzelnen Punkten entstehen. Ein solches Vorwalten lässt sich in der Natur besonders für zwei Lagen erwarten.

Die einfachste Annahme ist, dass die Säulen ein Bestreben haben, sich mit ihren Axen senkrecht zu stellen. Dieses könnte z. B. dadurch verursacht sein, dass sie im Verhältniss zu ihrer Länge sehr schmal wären, denn alsdann würden sie sich bei ruhiger Luft, während sie in einem allmäligen Herabsinken begriffen wären, des Luftwiderstandes wegen so stellen, dass sie nach der Längenrichtung fielen. Nehmen wir also an, es kämen in der Atmosphäre in senkrechter Richtung mehr Säulen vor, als in irgend einer anderen, so folgt daraus, dass zwei Stellen rechts und links von der Sonne heller erscheinen müssen, als der übrige Ring. Diese Punkte brauchen aber nicht dem Ringe selbst anzugehören. Wenn die Sonne etwas hoch steht und also ihre Strahlen schräge herabkommen, so sind die Axen der senkrechten Prismen gegen die letzteren nicht perpendikulär, und die kleinste Ablenkung für diese Axenrichtung ist somit grösser, als das absolute Minimum $\varphi'$. Daher kommt es, dass man die Nebensonnen oft etwas ausserhalb des Ringes erblickt, und zwar um so weiter, je höher die Sonne steht. In den Figuren auf Tafel II und III sind sie immer in den Ring gezeichnet, in denen auf Tafel IV dagegen liegen sie ausserhalb desselben. Die Farben in den Nebensonnen sind ebenso geordnet, wie im Ringe, das Roth nach der Sonne zu. Ausserdem aber zeigen sich noch helle, in wagrechter Richtung nach aussen gehende Schweife, welche dadurch entstehen, dass auch diejenigen senkrechten Prismen, die nicht gerade so gedreht sind, dass sie die kleinstmögliche Ablenkung geben, doch ihrer grossen Menge wegen eine bedeutend stärkere Helle verursachen, als der übrige umgebende Raum besitzt.

Zuweilen sieht man auch Nebensonnen allein ohne den Ring. Dann muss man schliessen, dass die Eissäulen in so überwiegender Menge die senkrechte Richtung haben, dass man die Wirkung der übrigen nicht mehr bemerken kann, was um so leichter möglich ist, da die letztere sich über einen grossen Ring vertheilt, während sich die Wirkung der vertikalen Säulen auf zwei Punkte concentrirt.

Die zweite nahe liegende Annahme ist, dass unter den Prismen die horizontale Lage vorwalte. Diese Annahme unterscheidet sich von der vorigen besonders dadurch, dass die vertikale

Richtung eine einzige ist, in dem Worte horizontal aber noch unendlich viele Richtungen nach allen Himmelsgegenden befasst sind. Daher kommt es, dass dort, wenn wir von den Schweifen, die nicht von den Strahlen kleinster Ablenkung herrühren, absehen, nur zwei einzelne helle Flecke, hier dagegen zwei ausgedehnte Bogen entstehen.

Unter den verschiedenen horizontalen Richtungen ist nämlich nur Eine, welche gegen die Sonnenstrahlen perpendikulär ist. Die Prismen dieser Richtung gehören mit zu denen, welche den gewöhnlichen Ring *CED* (Fig. 12.) um die Sonne *S* bilden, und zwar gehören sie zu seinem obersten und untersten Punkte *C* und *D*, welche daher auch besonders hell erscheinen. Für jede andere horizontale Richtung der Axe ist die kleinstmögliche Ablenkung grösser als $\varphi'$, und die durch solche Prismen bewirkte Erleuchtung fällt also ausserhalb des Ringes. Der in der Richtung *SE* liegende helle Raum erscheint, anstatt in *E*, etwa in *F*, und da dieser Abstand *EF* immer grösser wird, je weiter der Punkt nach rechts oder links von *C* abweicht, so sieht man, dass alle diese hellen Räume zusammen einen Berührungsbogen *GH* bilden müssen. Dasselbe findet auch unten bei *D* statt, doch hat im Allgemeinen der Bogen *KI* eine andere Krümmung, als der obere. Auch ändern beide ihre Gestalt mit der Höhe der Sonne. Die Berührungspunkte *C* und *D* haben den stärksten Glanz, so dass man sie mitunter als Nebensonnen bezeichnet hat, und dieser erhöhte Glanz findet auch manchmal statt, ohne dass die Bogen weiter ausgebildet sind. In den Figuren auf Taf. III. sind die oberen Bogen überall klar gezeichnet, während unten nur ein unbestimmter Glanz angedeutet ist. In Fig. 1 Tafel IV. ist es umgekehrt, und nach der Beschreibung von Lowitz soll der Glanz des oberen Theiles so blendend gewesen sein, wie bei der Sonne selbst.

Was nun die physischen Gründe dafür, dass die Prismen mit besonderer Vorliebe die horizontale Stellung wählen sollten, betrifft, so sind diese allerdings nicht so ersichtlich, wie für die vertikale. Man kann zwar, wie Babinet bei einer anderen Gelegenheit thut*), annehmen, dass neben solchen Säulen, die in der Axenrichtung am meisten ausgedehnt sind, auch solche vorkommen, deren Axen verhältnissmässig sehr kurz sind, und die also die Gestalt von dünnen Tafeln haben. Diese würden durch den blossen Luftwiderstand gezwungen sein, sich mit ihren breiten Grundflächen

*) S. Pogg. Ann. B. 41.

vertikal und daher mit den Axen horizontal zu stellen. Solche Tafeln sind aber für unseren Fall wenig anwendbar, weil ihre Seitenflächen, welche die Brechung hervorbringen sollen, zu schmal sind. Venturi und besonders Galle haben dagegen die Idee ausgeführt, dass man sich die Säulen an den oberen und unteren Enden zugespitzt denken müsse, und zwar durch Flächen, welche ebenfalls theilweise unter Winkeln von 60° oder nahe 60° gegen einander geneigt seien. Die Kanten dieser Winkel würden, wie es verlangt wird, horizontal liegen, während die Axen der Säulen die oben vorausgesetzte vertikale Stellung beibehalten könnten. Aber auch gegen diese Annahme lässt sich Manches einwenden. Wir müssen somit vorläufig die Thatsache, dass ein Vorwalten der horizontalen Lage entweder der ganzen Säulen oder doch einzelner Winkelkanten häufig stattfinde, aus der Erscheinung der Berührungsbogen als erwiesen ansehen und es den weiteren Forschungen überlassen, die Ursachen dieses Umstandes zu ermitteln.

Die bis jetzt betrachteten Theile des Hofes, bilden in Bezug auf die Erklärung eine in sich abgeschlossene Gruppe von Erscheinungen. Man sieht sie z. B. in der Figur 3, Tafel II. gerade vollständig dargestellt, nur dass der unterste Theil durch den Horizont verdeckt wird.

Dieselbe Gruppe wiederholt sich nun im Hofe noch einmal im grösseren Maassstabe. Nämlich ein etwa doppelt so grosser Ring — von 47° Halbmesser — oben fast immer mit einem Berührungsbogen, und an den Endpunkten des horizontalen Durchmessers wenigstens zuweilen mit Nebensonnen versehen, während von einem unteren Berührungsbogen kaum die Rede sein kann, weil gewöhnlich der ganze untere Theil der Figur unter dem Horizonte liegt. Diese Erscheinungen sind im Allgemeinen schwächer, und zeigen sich viel seltener, als die der ersten Gruppe. Galle führt unter seinen vielen Beobachtungen keine der Art an, und Kaemtz *) hat den grossen Ring in 5 Jahren nur zweimal gesehen. Die Zahl der überhaupt bekannten Fälle, in welchen sie wahrgenommen sind, ist jedoch noch bedeutend genug. Man sieht sie vollständig in Fig. 2, Taf. II. und mit Ausnahme der Nebensonnen auch Fig. 1 und 2, Taf. III. und Fig. 1, Taf. IV.

Die Erklärung dieser Erscheinungen haben manche Physiker aus solchen Strahlen abgeleitet, welche zwei Prismen mit Winkeln von 60° durchdrungen haben, sei's dass beide in einem gemein-

*) Meteorol. B. 3, S. 127.

schaftlichen grossen Krystalle zusammenhängen, oder dass sie einzeln schweben. Da indessen dem Obigen nach die Grundflächen der Krystalle mit den Seitenflächen wahrscheinlich rechte Winkel bilden, so liegt es nahe, diese in derselben Weise zu betrachten, wie vorher die Winkel von 60°; und dabei zeigt sich in der That, dass das Minimum der Ablenkung bei einem brechenden Winkel von 90° gerade den Werth besitzt, den man als Halbmesser des zweiten Ringes gefunden hat, nämlich 47°. Demnach kann man wohl mit ziemlicher Sicherheit annehmen, dass die ganze zweite Gruppe von Erscheinungen ebenso aus den vorkommenden rechten Winkeln erklärt werden muss, wie die erste Gruppe aus den Winkeln von 60°.

Während im Vorigen immer von der Brechung in den Eiskrystallen die Rede war, drängt sich von selbst die Frage auf, ob nicht auch die an ihren Oberflächen stattfindende Reflexion zu eigenthümlichen Erscheinungen Veranlassung giebt; und wirklich kommen einige solche im Hofe vor. Ziemlich häufig ist der sogenannte weisse Horizontalkreis: ein farbloser Kreis, welcher durch die Sonne gehend nach beiden Seiten in horizontaler Richtung fortläuft, und manchmal den ganzen Himmel umgiebt. Er findet sich in fast allen Figuren der Tafeln II — IV. In diesem Kreise sind die bisher betrachteten und alle noch weiter unten zu erwähnenden Nebensonnen gelegen, wenn sie vorkommen, und er heisst daher auch der Nebensonnenkreis. Er erklärt sich aus der Reflexion auf den Seitenflächen vertikaler Säulen, wenn diese in überwiegender Menge vorhanden sind. Jede senkrechte Fläche giebt als Spiegelbild der Sonne einen hellen Punkt, der mit dieser in gleicher Höhe liegt, und wenn solche Punkte in grosser Anzahl sichtbar sind, so verbinden sie sich zu einem zusammenhängenden horizontalen Kreise. Dass dieser weiss sein muss, ergiebt sich hieraus von selbst, indem die Reflexion keine Farbenzerstreuung verursachen kann.

Eine andere Erscheinung dieser Art zeigt sich zuweilen beim Auf- und Untergange und überhaupt bei niedrigem Stande der Sonne, und besteht in einem weissen Lichtstreifen in vertikaler Richtung, der entweder von der Sonne aufwärts oder durch sie hindurch nach oben und unten gehen kann. Selbst wenn sie einige Grade unter dem Horizonte steht, kann der helle Streifen über demselben sichtbar sein. Galle hat diesen Streifen in 19 Monaten 7mal gesehen, und in den kalten Zonen kommt er noch häufiger vor. Manchmal ist er mit dem vorerwähnten Horizontalkreise verbunden, und gewährt dann den sonderbaren Anblick eines durch die Sonne gehenden Kreuzes, was natürlich in früheren Zeiten, wo die Höfe, wie

alle seltenen Himmelserscheinungen, dem Aberglauben anheim fielen, zu mancherlei Deutungen Veranlassung geben konnte. Fig. 3, Taf. III. zeigt ein solches Kreuz.

Die Erklärung des Vertikalstreifens hat einige Schwierigkeiten gemacht. Es genügt dazu nämlich nicht, wie in der vorigen Erklärung die vertikale, so hier die horizontale Lage unter den Eissäulen als vorwaltend anzunehmen, sondern dann müsste man gleich die Richtung noch näher dahin bestimmen, dass sie horizontal und zugleich gegen die Sonnenstrahlen perpendikulär sei, und dazu lässt sich kein denkbarer Grund finden. Fraunhofer hat bei diesem Streifen, wie auch bei dem Horizontalkreise, das bei den übrigen Theilen des Hofes angewandte Erklärungsprincip ganz verlassen, und ein anderes gesucht, aber solche Trennung ist bei dem unverkennbaren Zusammenhange aller dieser Erscheinungen unter einander nicht wohl zulässig. Galle, welcher zu den Eiskrystallen zurückkehrte, nahm an, dass die Reflexion an den oberen und unteren Grundflächen von vertikalen Säulen geschehe, und diese Idee hat Bravais noch weiter ausgeführt. Wenn alle Säulen genau senkrecht und somit ihre Grundflächen genau horizontal wären, so würden alle Sonnenstrahlen an ihnen in gleicher Richtung reflectirt werden, und es könnte sich dann unter günstigen Umständen ein vollständiges Spiegelbild der Sonne zeigen; ist dagegen jene Richtung nur die vorherrschende, so muss eine ähnliche Wirkung entsehen, wie auf einer etwas unruhigen Wasserfläche, auf der auch die horizontale Lage etwas gestört ist, aber doch noch vorherrscht. Wie sich hier das Bild eines Lichtes in einen langegezogenen senkrechten Streifen verwandelt, so kann sich auch dort ein solcher bilden, und zwar über und unter der Sonne, weil die unteren und oberen Grundflächen der Säulen in gleicher Weise wirken. Wenn die Sonne etwas hoch steht, so können die von den Grundflächen reflectirten Strahlen nicht mehr zum Auge eines Beobachters an der Erdoberfläche gelangen, falls die Säulen nicht sehr von der senkrechten Stellung abweichen. Es sind zwar dann noch solche Strahlen für ihn sichtbar, die wiederholte Reflexionen an mehreren verschiedenen Grundflächen erlitten haben, so das die Lichterscheinung vielleicht noch nicht ganz aufhört; aber jedenfalls sieht man doch, dass ein tiefer Stand der Sonne für dieselbe am günstigsten ist. — Einige Male hat man zugleich mit einem Vertikalstreifen auch eine oder selbst zwei dicht bei der Sonne befindliche Nebensonnen gesehen, doch sind diese Beobachtungen noch zu isolirt und unvollständig, um ein sicheres Urtheil darüber gewinnen zu können, ob sie wirklich mit

dem hier betrachteten Streifen zusammengehören oder vielleicht ganz anderer Natur sind.

Die übrigen bei den Höfen vorkommenden Erscheinungen sind meistens sehr selten. Bei manchen unter ihnen reichen die wenigen bekannten Beobachtungen noch nicht hin, um ihre Gestalt und Lage hinlänglich festzustellen, und dadurch eine zuverlässige Erklärung möglich zu machen, und andere sind wenigstens von untergeordnetem Interesse. Wir wollen sie daher nur noch kurz erwähnen.

Dahin gehören mehrere Theile des von Lowitz beschriebenen Phänomens Fig. 1, Taf. IV., nämlich die Ansatzbogen der Nebensonnen *xi* und *yk*, die seitlichen Berührungsbogen des zweiten Ringes *tt* und *vv* *), die beiden schrägen Bogen *dmhn* und *dlho*, welche von anderen Beobachtern so gezeichnet werden, dass sie durch die Sonne gehen**), und endlich die Verdoppelung des innern Ringes. Lowitz hat diese Gestalt so aufgefasst, als ob sie aus zwei sich schneidenden Kreisen bestanden hätte, doch scheint er sich, nach mehreren ähnlichen Beobachtungen zu schliessen, darin geirrt zu haben und der Ring selbst, wie gewöhnlich, kreisförmig, ausserdem aber noch von einer ellipsenartigen Figur umgeben gewesen zu sein, wie es z. B. in Fig. 3, Taf. IV. stattfindet.

Ferner hat man noch einige andere Ringe um die Sonne als die von 22° und 47°***), und verschiedene Kreise, deren Mittelpunkte im Zenith zu liegen schienen, wahrgenommen, doch stehen diese Beobachtungen meistens noch sehr vereinzelt da.

Endlich müssen ausser den vier schon betrachteten noch eine Reihe anderer Nebensonnen erwähnt werden. Sie fallen mit Ausnahme einiger seltener vorkommender alle in den Nebensonnenkreis, und wenn ihre Abstände in demselben von der Sonne auch nicht immer gleich angegeben werden, so scheinen sie sich doch, den meisten Beobachtungen, nach in folgende drei Classen zu fügen. 1) Zwei zu beiden Seiten der Sonne in einem Abstande von 90° — 100° wie in Fig. 1, Taf. III, 2) zwei andere in einem Abstande von 120° wie in Fig. 1, Taf. IV. und 3) eine der Sonne gegenüber, welche daher auch Gegensonne genannt wird, wie in Fig. 1, Taf. III u. Fig. 1, Taf. IV †). Unter den Erklärungen finde ich die von Bravais angewandte am natürlichsten, nach welcher

*) In Fig. 14. bei H und H'.

**) Wie GI und GI' in Fig. 14.

***) Z. B. den durch E und E' (Fig. 14.) gehenden.

†) In Fig. 14. sind diese Nebensonnen bei E, E', F, F' und G angedeutet.

die Nebensonnen durch Strahlen gebildet werden, die mehrfache Reflexionen an den Seitenflächen gewisser Winkel und ausserdem vielleicht noch Brechungen erfahren haben. Betrachten wir z. B. in einem dreiseitigen Prima *HIK* (Fig. 13.) alle Strahlen, die wie *SA* in die Fläche *HI* eindringen, an den Flächen *HK* und *IK* reflectirt werden, und dann wieder aus *HI* austreten, so lässt sich zeigen, dass unter diesen ein Maximum der Ablenkung vorkommt, dem wie gewöhnlich eine stärkere Lichtintensität entspricht. Dieses Maximum beträgt für Prismen, deren Axen gegen die Sonnenstrahlen perpendikulär sind, 98°, und ist für andere Stellungen der Axen kleiner. Bilden ferner die Flächen, an welchen die Reflexion geschieht, einen rechten Winkel, so erhält man nicht nur ein Maximum der Ablenkung, sondern alle Strahlen erleiden die gemeinsame Ablenkung von 180°, und in ähnlicher Weise kann man, wenn jener Winkel 120° beträgt, z. B. in sechsseitigen Säulen, unter besonderen Annahmen die Ablenkung von 120° erhalten. Diese Ablenkungswinkel sind aber nur bei solchen Prismen, deren Axen gegen die Sonnenstrahlen perpendikulär stehen, absolut zu nehmen, d. h. so dass sie sich auf einen grössten Kreis des Himmels beziehen; für senkrechte Prismen z. B. müssen sie nach Graden des durch die Sonne gehenden Horizontalkreises gemessen werden. Nehmen wir also wieder die senkrechte Richtung unter den Prismen als vorwaltend an, so geben uns die drei erwähnten Fälle der Reflexion gerade jene drei Classen von Nebensonnen.

**Die Lichtkränze und das Nebelbild.** Die Kränze unterscheiden sich, wie schon oben erwähnt, besonders dadurch von den Höfen, dass sie nur aus Ringen um die Sonne oder den Mond bestehen, und diese viel kleiner sind als die dort vorkommenden, und eine umgekehrte Farbenfolge haben, indem das Roth nach Aussen gelegen ist. Man bemerkt sie beim Monde häufiger als bei der Sonne, was aber nur daher kommt, dass die letztere durch ihren eigenen Glanz zu sehr blendet, um in ihrer Nähe Farben zu unterscheiden. Man muss sich daher so stellen, dass die Sonnenscheibe dem Auge verdeckt ist, oder auf irgend eine Weise das ganze Licht schwächen, was z. B. dadurch geschehen kann, dass man den Himmel anstatt direct, in einer spiegelnden Fläche betrachtet, wozu Kaemtz einen hinten geschwärzten Glasspiegel vorschlägt. Wie häufig die Erscheinung ist, ergiebt sich unter andern aus folgender Stelle in Kaemtz's Meteorologie *); „Wofern die Wolken nicht so dicht

*) Bd. 3. S. 92.

sind, dass die von der Sonne kommenden Strahlen nicht mehr hindurchzudringen vermögen, zeigen alle Wolken mit Ausnahme der *Cirri* und *Cirrostrati* von geringer Dicke Spuren von Lichtkränzen."

Auch dieses Phänomen ist in Bezug auf die Vollständigkeit, mit der es erscheint, ungemein veränderlich. Vorzugsweise vollständig wurde es von Newton im Juni 1692 gesehen. Es bestand aus drei Ringen um die Sonne, deren Farben nachstehende Reihenfolge bildeten. Im ersten: blasses Blau, Weiss, Roth; im zweiten: Purpur, Blau, Grün, blasses Gelb, Roth; im dritten: blasses Blau und Roth. Der Durchmesser des mittleren Ringes bis zum Roth an beiden Seiten war $9\frac{1}{3}^0$, Die beiden anderen Durchmesser hatte er nicht Zeit zu messen, doch schien der des ersten Ringes $5^0$ bis $6^0$ und der des dritten $12^0$ zu betragen. Gewöhnlich erblickt man nur einen oder höchstens noch einen zweiten beinahe doppelt so grossen Ring, welche hauptsächlich roth erscheinen, und nur innerhalb des ersten noch etwas Blau, und zwischen beiden Grün erkennen lassen.

Die Erklärung der Kränze ist, obwohl die richtige Idee dazu schon früher ausgesprochen war, doch mit der gehörigen Vollständigkeit erst von Fraunhofer *) entwickelt.

Sie beruht auf der Lichtbeugung. Wenn das von einem leuchtenden Punkte ausgehende Licht auf seinem Wege einen sehr kleinen runden Körper trifft, so sollte sich hinter diesem eigentlich nur ein sehr enger Schattenkegel bilden. Statt dessen entstehen aber ganz andere Wirkungen, die weit über die Grenzen des Schattenkegels hinausgehen, und zwar um so weiter, je kleiner das Körperchen ist. In der Richtung nämlich, welche die Axe des Schattenkegels bilden sollte, findet gerade eine besonders starke Lichtintensität statt, und der Raum um diese Richtung lässt sich in beinahe kegelförmige Schichten theilen, die, wenn man es mit einfarbigem Lichte zu thun hat, abwechselnd hell und dunkel sind, und wenn das einfallende Licht weiss war, einen Wechsel verschiedener Farben darbieten, die aber nur in den ersten Schichten recht deutlich hervortreten, und weiterhin allmälig unkenntlich werden.

Betrachtet nun ein Beobachter ein solches Körperchen von verschiedenen Richtungen aus, die aber noch innerhalb der ersten von jenen Kegelschichten liegen, so erscheint es ihm mit verschiedener Helle und Farbe. Befinden sich dagegen zwischen ihm und dem Lichtpunkte sehr viele solche Körperchen, so kann er jene Verschiedenheiten gleichzeitig neben einander übersehen. Jedes Körperchen zeigt

*) Schumacher's astronom. Abhandlungen, Heft 3.

die Farbe, die ihm nach seiner Stellung zum Auge und nach seiner Grösse zukommt, und wenn sie alle gleich gross sind, so ordnen sich diese Farbenpunkte so regelmässig, dass sie concentrische Farbenringe um den Lichtpunkt bilden, die um so grösser ausfallen, je kleiner die Körperchen sind. Fraunhofer verschaffte sich diesen Anblick dadurch, dass er aus Stanniol sehr viele gleich grosse runde Blättchen schnitt, diese zwischen zwei Glasplatten legte und das Ganze vor das Objectiv eines Fernrohrs stellte, welches auf den Lichtpunkt gerichtet war, und in ähnlicher Weise wandte er sodann auch statt der Stanniolblättchen kleine Glaskügelchen an. Noch einfacher gelangt man dahin, wenn man eine Glasplatte mit Lycopodiumpulver bestreut, indem dieses aus Körnern von ziemlich gleicher Grösse besteht. Blickt man dann durch das Glas nach einem etwas entfernt stehenden Lichte, so sieht man dieses von deutlichen Ringen umgeben, deren Farben in der gewöhnlichen Reihenfolge abwechseln, und zwar so, dass das Roth in jedem Ringe nach aussen liegt.

Mit diesen Versuchen stimmt nun die Bildung der Lichtkränze in der Natur genau überein. Die runden Körper sind hier die in den Wolken enthaltenen Dampfbläschen, und je mehr diese an Grösse untereinander gleich sind, desto vollständiger und deutlicher müssen sich die Ringe zeigen *).

Wenn man diese Erklärung als richtig anerkannt hat, so hat man in ihr umgekehrt ein Mittel, jedesmal aus den Radien der Lichtkränze auf die Grösse der Dampfbläschen in den Wolken zu schliessen. Kaemtz, der sich um diesen Gegenstand durch viele Messungen besonders verdient gemacht hat **), ist zu dem Resultate gelangt, dass die Durchmesser der Bläschen in unseren Gegenden unter verschiedenen Umständen etwa zwischen 0,0004 und 0,002 pariser Zoll veränderlich sein können, und dass sie im Allgemeinen in den wärmeren Jahreszeiten kleiner sind als in den kälteren, indem er folgende Mittelwerthe erhalten hat:

---

*) Die äussere Grösse des Bläschens ist wohl zu unterscheiden von der Dicke des Häutchens, von der früher die Rede gewesen ist. Wenn man z. B. annimmt, dass unter gewissen Witterungsumständen alle Bläschen bei ihrer ersten Entstehung gleich gewesen, nachher aber in Bezug auf ihre Wassermenge mehr oder weniger angewachsen seien, so ist leicht zu sehen, dass die dadurch entstandenen Unterschiede im Verhältniss zur Dicke des Häutchens schon bedeutend sein können, während sie im Verhältniss zum ganzen Durchmesser des Bläschens noch gering sind.

**) Siehe Meteorol. B. 3, S. 99 u. f.

im Winter 0,00095
— Frühling 0,00072
— Sommer 0,00061
— Herbst 0,00090.

Mit den Lichtkränzen in unmittelbarem Zusammenhange steht noch eine andere Erscheinung, die besonders in Gebirgsgegenden ziemlich häufig vorkommt, und auf die zuerst Bouguer aufmerksam gemacht hat, der sie auf seiner Bergreise in Amerika mehrmals und darunter einmal mit seltener Vollständigkeit und Schönheit beobachtet hat. Es traf sich nämlich, dass, während im Osten die Sonne klar aufging, im Westen, etwa 30 Schritt von ihm und seinen Begleitern, eine Wolke stand, vor der noch ein schwacher wenig ausgebreiteter Nebel schwebte, der nur in einigen Schritten Entfernung zu bemerken war. Auf dieser Wolke sah nun jeder seinen eigenen Schatten so bestimmt, dass er die verschiedenen Theile desselben unterscheiden konnte, ohne jedoch den Schatten eines der anderen Reisegefährten wahrnehmen zu können. Um den Schatten seines Kopfes sah jeder mehrere concentrische Ringe, nämlich zuerst drei mit Radien von etwa 3°, 5½° und 8½°, welche ganz das Ansehen der Lichtkränze hatten, und ausserdem noch einen weissen von 33½° Radius, der offenbar der früher erwähnte weisse Regenbogen war, und daher hier nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht.

Noch vollständiger ist dieses Phänomen von Scoresby*) gesehen, dem ausserhalb des Regenbogens, der in diesem Falle sogar Farben zeigte, noch ein fünfter weisslicher Ring erschien, der unzweifelhaft der Nebenregenbogen war. Ausserdem hat man es, obwohl meistens mit weniger Ringen, seit Bouguer noch ziemlich oft beobachtet, besonders in Gebirgen. Auf dem Brocken ist es unter dem sonderbaren Namen Brockengespenst bekannt, wobei jedoch vorausgesetzt zu sein scheint, dass der Beobachter ausser seinem eigenen Schatten noch den des Bergrückens sieht, auf welchem er steht. Die meisten Reisenden nennen es Nebenbild, während Kaemtz es mit dem Namen Gegensonne bezeichnet hat.

Was nun zunächst den Umstand betrifft, dass jeder Beobachter nur seinen eigenen Schatten, und ausserdem vielleicht noch die von ganz nahe befindlichen oder sehr grossen Gegenständen wahrnimmt, so lässt sich dieser leicht erklären. Der Schatten bildet sich näm-

*) Journ. of a voyage etc.

lich nicht blos an der Oberfläche der Wolke, sondern dringt tief in dieselbe ein. Wenn man nun diesen Schattenkegel gerade in der Richtung betrachtet, in welcher er in die Wolke eindringt, wie es jeder bei seinem eigenen Schatten thut, so sieht man in dieser Richtung nur verdunkelte, in anderen dagegen nur helle Bläschen, und muss daher den Unterschied von Dunkelheit und Helle deutlich erkennen. Bei einem entfernteren Schatten dagegen, den man schräge betrachtet, sieht man vor und hinter den beschatteten Bläschen noch so viele beleuchtete, das man den durch jene verursachten Mangel an Licht kaum oder gar nicht bemerken kann.

Bei der Erklärung der bunten Ringe um den Schatten muss uns besonders die Aehnlichkeit, welche sie mit den Lichtkränzen haben, leiten. Der enge Zusammenhang zwischen diesen beiden Erscheinungen ist noch besonders von Kaemtz *) ausser Zweifel gesetzt, welcher sich nicht damit begnügte, blos ihre Aehnlichkeit zu bestätigen, sondern sie auch nach der Grösse der Radien verglich, und fand, dass diese, so veränderlich sie unter verschiedenen Umständen ist, doch bei beiden, wenn sie sich unter gleichen Umständen bilden, übereinstimmt. Er hatte nämlich mehrmals Gelegenheit, in einem und demselben Nebel, der bei seinem Standpunkte vorbeizog, beide Ringsysteme zu beobachten und zu messen, und dann fand er immer ihre Radien so nahe gleich, als man es bei der Schwierigkeit der Messungen irgend erwarten konnte.

Fraunhofer suchte schon gleich nach seiner Erklärung der Lichtkränze, auch die des Nebelbildes auf dieselbe zurückzuführen, und zeigte, dass dieses ganz leicht geschehen könne, wenn man vorher nachgewiesen habe, dass eine Wolke oder ein Nebel in der Richtung, welche den ankommenden Strahlen direct entgegengesetzt ist, viel mehr Licht reflectire, als in den andern Richtungen. Diesen Nachweis hat er aber nicht geliefert, denn wenn er sagt **): „Ein auf ein Dunstkügelchen vertikal auffallender Strahl, der in dasselbe eindringt, und demnach durch den Mittelpunkt des Kügelchens geht, wird an der zweiten Fläche im Innern des Kügelchens reflectirt, und geht in derselben Richtung wieder zurück aus dem Dunstkügelchen.... Für Strahlen, welche sich einem vertikalen Auffallswinkel nähern, geschieht auch noch eine theilweise Zurückwerfung; doch werden diese um soviel mehr zerstreut, je grösser der Auffallswinkel ist,“ so ist da-

*) Meterol. B. 3, S. 111.
**) Schumacher's astron. Abh. H. 3, S. 62.

mit gar nichts gewonnen, denn es lässt sich durch genauere Betrachtungen zeigen, dass bei dem von einer soliden Wasserkugel äusserlich reflectirten Lichte, und ebenso bei dem, welches nur eine innere Reflexion erlitten hat, in der den ankommenden Strahlen entgegengesetzten Richtung durchaus keine überwiegende Intensität stattfindet. Geht man in der Betrachtung noch weiter, wie Fraunhofer, so findet man bei dem zweimal innerlich reflectirten Lichte sogar, dass von diesem gar keine Strahlen nach der bezeichneten Richtung gehen, wie es aus der Erklärung des Nebenregenbogens bekannt ist. Von der dritten inneren Reflexion gehen zwar Strahlen dorthin, aber wieder nicht in überwiegender Intensität. Erst bei der vierten und den folgenden Reflexionen kann dieses letztere stattfinden. Nimmt man nun alles von der Kugel reflectirte Licht zusammen, so ist in diesem der Theil, welcher vier und mehrere Reflexionen erlitten hat, verhältnissmässig sehr unbedeutend, und es wird daher das in ihm stattfindende Vorwalten jener Richtung in dem ganzen Lichte wenig bemerkbar sein.

Demnach ist in der Erklärung eine Lücke geblieben, doch glaube ich, dass diese durch ein Resultat, welches ich in einer früheren Arbeit*) gewonnen habe, ausgefüllt wird. Nimmt man nämlich statt der soliden Wasserkugeln Dampfbläschen als die Bestandtheile der Wolke an, so wird von diesen allerdings die obige Bedingung erfüllt, aber nicht mittelst der äusseren und der ersten inneren Reflexion, sondern erst mittelst der zweiten, dritten und der folgenden Reflexionen. Meine Rechnungen beziehen sich freilich nur auf sehr feine Bläschen, und finden daher auf die in der Wolke vorkommenden dickeren keine genaue Anwendung, aber sie können wenigstens als Maassstab für die Beurtheilung dienen. Es haben sich dabei für das gesammte Licht, welches ein von der Sonne beleuchtetes Bläschen reflectirt, unter andern folgende Zahlen ergeben:

| $\varphi$ | I | $\varphi$ | |
|---|---|---|---|
| 150° | 0,0876 | 175° | 0,1261 |
| 160° | 0,0907 | 178° | 0,2000 |
| 170° | 0,1021 | 179° | 0,3232 |
| | | 180° | 1,9267 |

wo $\varphi$ den Winkel bedeutet, den die reflectirten Strahlen mit der Fortsetzung der ankommenden bilden, und I die Intensität, welche

*) Crelle's Journ. B. 36.

in der durch den entsprechenden Werth von $\varphi$ bestimmten Richtung stattfindet. Man sieht aus dieser Tabelle, dass bei $\varphi = 180^0$, also in der Richtung, auf die es hier ankommt, welche den ankommenden Strahlen direct entgegengesetzt ist, oder noch genauer, welche gerade nach dem Mittelpunkte der Sonnenscheibe zurückgeht, eine so überwiegende Intensität vorhanden ist, dass schon die um $1^0$ davon abweichenden Strahlen 6mal schwächer sind, während weiterhin die Abnahme langsamer vor sich geht.

Wenn man nun demgemäss die senkrechte Reflexion auf den Bläschen als besonders stark annimmt, so könnte man vielleicht erwarten, auf der Wolke, der Sonne gegenüber, einen ausgezeichnet hellen Fleck zu sehen. Diesen verdeckt aber jeder Beobachter durch den Schatten seines eigenen Kopfes, und er kann nur in der Umgegend desselben noch eine etwas vermehrte Helle wahrnehmen, die nach Aussen hin allmälig abnimmt. Ausserdem müssen aber die Ringe entstehen, und zwar auf doppelte Weise. Erstens wird das ankommende Licht durch die vordersten Bläschen der Wolke, oder in dem von Bouguer beobachteten Falle auch schon durch diejenigen, welche den vor der Wolke schwebenden Nebel bildeten, theilweise gebeugt. Dieses gebeugte Licht wird dann, wie alles andere, auf den folgenden Bläschen grossentheils reflectirt, und zwar besonders stark in den Richtungen, welche den gebeugten Strahlen entgegengesetzt sind, und in diesen gelangt es zum Auge. Zweitens ist dasjenige Licht, welches, ohne vorher eine Veränderung zu erleiden, in die Wolke eindringt und dort senkrecht reflectirt wird, auf seinem Rückwege denselben Beugungsgründen unterworfen, welche sich beim vorigen auf dem Hinwege geltend machten, und kann dadurch ebenfalls in schräger Richtung zum Auge des Beobachters gelangen. Beide Beugungen vor und nach der Reflexion wirken nun natürlich in gleicher Weise, und erzeugen zusammen den Eindruck von Ringen, welche ganz den Lichtkränzen ähnlich sind, die entstehen würden, wenn dieselben Bläschen, die hier die Beugung verursacht haben, vor der Sonne schwebten.

**Das Wasserziehen der Sonne.** Zuweilen bei niedrigem Stande der Sonne, und wenn der Himmel oder wenigstens der Theil desselben, wo die Sonne sich befindet, ziemlich bewölkt ist, aber zwischen den Wolken doch einzelne Lücken vorkommen, welche die Sonnenstrahlen durchlassen, kann man die dadurch erleuchteten Theile der Atmosphäre als helle Streifen, die von den Wolken in der Richtung der Sonnenstrahlen nach der Erdoberfläche gehen, in dem übrigen dunkleren Raume deutlich unterscheiden. Man sagt

dann bei uns, die Sonne ziehe Wasser, während die Franzosen diese Streifen mit dem Namen „rayons crépusculaires" bezeichnen.

Die Erscheinung hat nichts Ausserordentliches. Der in der Luft schwebende bläschenförmige Wasserdampf und der etwa in ihr befindliche Staub reflectirt das auffallende Licht, und wird dadurch selbst etwas leuchtend. Bei hohem Stande der Sonne nun ist die ganze Atmosphäre zu hell, um jenes schwache Licht zu bemerken. Wenn die Sonne aber nahe beim Horizonte steht, und daher die nicht direct von ihr beleuchteten Theile der Atmosphäre ziemlich dunkel sind, treten jene Streifen, die dann auch wegen ihrer schrägen Richtung eine grössere Ausdehnung haben, klarer hervor; ganz ähnlich wie man in einem dunklen Zimmer, in welches durch kleine Oeffnungen etwas Sonnenlicht eintritt, deutliche Streifen von leuchtenden Sonnenstäubchen sieht.

Bemerkenswerth ist aber die Gestalt, welche diese Streifen in der Atmosphäre anzunehmen scheinen, indem dabei eine eigenthümliche optische Täuschung stattfindet, die zuerst Smith *) richtig erkannt und erklärt hat. Erstens nämlich scheinen die Streifen, welche in der Wirklichkeit unter einander parallel sind, sich nach der Ferne hin zu verengen, wie wir es auch bei anderen parallelen Linien, z. B. bei langen Alleen oft beobachten. Zweitens versetzen wir sie aber auch häufig, zumal wenn sie bei sehr niedrigem Stande der Sonne über uns fortgehen, an das Himmelsgewölbe, wodurch sie ihre geradlinige Richtung verlieren, und die Gestalt von Bogen annehmen, die von der Sonne nach dem Gegenpunkte derselben hin gehen, welcher sich an der gegenüber liegenden Seite ebenso tief unter dem Horizonte befindet, wie die Sonne selbst über demselben. In der vollen Ausdehnung über den ganzen Himmel lassen sich diese Bogen freilich nicht erkennen, wohl aber kann man oft die von der Sonne aus divergirenden und die nach dem Gegenpunkte convergirenden Theile derselben sehen. Die letzteren sind gewöhnlich schwächer als die ersteren, und werden daher seltener bemerkt, doch sagt Arago **): „Pendant un séjour de deux mois à la petite île de Formentera, j'ai vu moi-même, une vingtaine de fois, tant le matin que le soir la convergence, que Smith a signalée et expliquée le premier." Dass wir die Streifen im Zenith nicht gewahr werden, liegt wohl

*) Vollständiger Lehrbegriff der Optik nach R. Smith's Englischen ausgearbeitet von Kaestner. Altenburg 1755. S. 419.

**) Ann. de chim. et de phys. 1e S. T. XXX. p. 430.

theils in ihrer dort stattfindenden grösseren scheinbaren Breitenausdehnung, theils darin, dass wir sie dort nahe senkrecht ansehen, und daher unsere Gesichtsslinie sie auf einem viel kürzeren Wege durchschneidet, als da, wo wir sie schräge gegen ihre Längenrichtung betrachten.

Man hält diese Erscheinung häufig für ein Vorzeichen von Regen, was auch theoretisch nicht ohne Grund ist, indem einerseits nach Kaemtz *) die eigenthümliche Wolkenbildung, durch welche sie veranlasst wird, an schönen Tagen nicht leicht vorkommen kann, und andererseits auch wohl zu ihrem deutlichen Hervortreten eine bedeutende Menge bläschenförmigen Wasserdampfes in der Atmosphäre nothwendig ist.

---

## Das Nordlicht.

Schon bei den bisherigen Erscheinungen sind wir auf manche Lücken und Unsicherheiten in der Erklärung gestossen; die letzte aber, zu der wir uns jetzt wenden, und welche durch ihre Schönheit besonders anzieht, müssen wir überhaupt noch als unerklärt betrachten. Die vielen alten und neuen Beobachtungen des Nordlichtes haben nur vermocht, einige Anknüpfungspunkte an andere bekannte Naturerscheinungen als sicher festzustellen. Alle Versuche, von hier aus nach der einen oder der anderen Richtung ein Paar Schritte in der Erklärung weiter zu gehen, sind theils zu wenig gelungen, theils noch zu wenig bewährt, um auf ein Bürgerrecht in der Wissenschaft Anspruch machen zu können. Wir müssen uns daher gerade bei dieser Erscheinung, über die wohl unter allen hier erwähnten am meisten geschrieben ist und noch geschrieben werden wird, darauf beschränken, ihr äusseres Auftreten und einige an ihr wahrgenommene Eigenthümlichkeiten darzustellen.

Der Lichtglanz, welcher dieses Phänomen bildet, erscheint bei uns immer am nördlichen Theile des Himmels, und zeigt sich in den weiter nach Norden gelegenen Ländern häufiger und schöner, als in denen von geringerer Breite; daher hat es den Namen Nordlicht erhalten. Es liess sich aber im Voraus erwarten, dass die südlichen Polarländer den nördlichen in dieser Beziehung nicht nachstehen würden, und in der That haben dortige Reisende dasselbe

*) Met. III. S. 50.

Licht gesehen, und haben es dort **Südlicht** genannt. Seitdem fasst man zuweilen auch beide unter dem Namen **Polarlicht** zusammen.

Der Anblick des Nordlichtes ist ausserordentlich verschieden und veränderlich. Nur der erste Anfang, und gewissermaassen die Grundlage des Ganzen, ein dunkles Segment von einem hellen Rande eingefasst, werden wenigsten meistentheils in ziemlich gleicher Weise angeführt. Für die Fälle aber, wo es sich weiter entwickelt und in seiner vollen Pracht erscheint, sind die Beschreibungen der verschiedenen Beobachter sehr von einander abweichend, was man sich aus der Reichhaltigkeit der Erscheinung und den schnellen in ihr vorkommenden Wechseln, so wie aus der Mannichfaltigkeit, mit der die einzelnen Nordlichter sich von einander unterscheiden, erklären muss. Es ist indessen nicht rathsam, diese verschiedenen Beschreibungen in eine zu verschmelzen, sondern man muss hier, wie bei allen noch unerklärten Naturerscheinungen, die einzelnen Beschreibungen so viel wie möglich in ihrer ursprünglichen Form festhalten, um nicht durch eine andere Fassung unwillkürlich manches Fremdartige hineinzubringen, was besonders leicht möglich ist, wenn die neue Fassung unter dem Einflusse einer schon vorher angenommenen Erklärungsidee entsteht. Ich werde daher, da es hier zu weit führen würde, mehrere Beschreibungen neben einander zu stellen, meistens wörtlich derjenigen folgen, welche **Argelander** aus seinen sämmtlichen Beobachtungen abstrahirt hat*), nachdem er, durch seinen Wohnort und Beruf als Prof. der Astron. zu Åbo in Finnland begünstigt, während der 8 Jahre von 1823 — 31 eine Anzahl von 162 Nordlichtern gesehen, in ihrem Verlaufe verfolgt und in ihren Grundzügen beschrieben hatte.

„Ein eigenthümliches schmutziges Ansehen des nördlichen Himmels in der Nähe des Horizontes verkündet dem aufmerksamen und geübten Beobachter meistens schon im Voraus das Erscheinen eines Nordlichtes. Bald wird die Farbe dunkler und es zeigt sich ein Zirkelsegment von geringerer oder grösserer Ausdehnung, mit einem lichten Saume eingefasst. Das Segment hat vollkommen das Ansehen einer dunklen Wolkenbank, und man ist daher nicht wenig erstaunt, nicht nur mit Hülfe des Fernrohrs die Sterne ungeschwächt durchscheinen zu sehen, sondern hellere sogar mit blossen Augen darin zu erkennen. Man wird nun versucht, die ganze Erschei-

*) Vorträge aus dem Gebiete der Naturwissenschaften und der Oeconomie, gehalten in der phys. öcon. Gesellschaft zu Königsberg. I. Königsb. 1834.

nung aus dem Contraste mit dem hellen Saume zu erklären. Aber nicht nur die Unwahrscheinlichkeit dieser Annahme bei der häufig sehr grossen Ausdehnung des Segmentes und der Schwäche des Lichtscheines, so wie das früher, ehe noch das Ganze sich gebildet hätte, bemerkte dunklere Ansehen dieser Gegend des Himmels, sondern auch der Umstand, dass, wenn das Nordlicht sich bei heller Dämmerung zeigt, diese innerhalb des Lichtscheines bei weitem braunröthlicher erscheint, als ausserhalb, und allmälig in die dunkle Basis übergeht, und der, dass, wenn über dem Lichtsaume noch ein Lichtbogen entsteht, dann das Aussehen der Gegend zwischen diesen beiden Helligkeiten sich durchaus nicht von dem des Himmels unterscheidet, — dies alles zeugt für die Realität der Erscheinung, und nöthigt uns, das Dasein einer wirklichen Materie anzunehmen. An dieses Segment, oder die Basis, schliesst sich der Lichtsaum überall an. Er ist von einer glänzend weissen, etwas in's Bläuliche fallenden Farbe, jedoch, so lange noch die Dämmerung vorhanden, wahrscheinlich durch die Verschmelzung der Farben, mehr gelblich, und bei sehr heller Dämmerung zuweilen in's Grünliche spielend. Seine Breite ist verschieden von einer bis zu vier, sechs und mehreren Vollmondsbreiten; der untere Rand ist meistentheils ziemlich scharf begrenzt, der obere nur dann, wenn die Breite gering ist, mit dem Zunehmen derselben wird er immer verwaschener, bis bei einer sehr grossen Breite durchaus keine Begrenzung mehr zu erkennen ist, sondern der Schein allmälig in das Licht des Himmels verfliesst. Dann ist die Helligkeit, die er verbreitet, auch sehr stark; und während ein geringerer seine Wirkung hauptsächlich nur auf den nördlichen Horizont äussert, verbreiten die stärkeren ein Licht über die ganze Gegend, dem gleich, das der Vollmond bis eine halbe Stunde nach dem Aufgange zu Wege bringt. Eben so verschieden als die Breite ist auch die Ausdehnung des Saumes. Ich habe sie zuweilen nur 25° bis 30°, zu anderen Zeiten bis nahe 180° gefunden, und demgemäss auch die Höhe über dem Horizonte von 2° oder 3° bis 10°, 12° und mehreren Graden."

Wenn man die Lage dieser Figur näher untersucht, so stellt sich dabei ein merkwürdiger Umstand heraus, der den ersten Fingerzeig für die Natur des Nordlichtes giebt. Der höchste Punkt des Bogens befindet sich nämlich nicht genau im geographischen Norden, sondern in der Richtung, nach welcher die Magnetnadel weis't, also nach dem magnetischen Nordpol zu, der für uns nach NNW. liegt. Diese Richtung, ist jedoch nicht immer genau eingehalten, sondern es kommen merkliche Abweichungen davon vor,

welche besonders in der Nähe des magnetischen Poles bedeutend werden. Ueber die Grösse und selbst über den Sinn der Abweichungen lässt sich kein strenges Gesetz angeben, doch scheinen sie auch nicht ganz willkürlich zu sein, sondern für bestimmte Orte der Erde eine gewisse Gleichmässigkeit zu besitzen. So liegen z. B. in Finnland und Lapland nach den Berichten von Argelander und Bravais die Nordlichter gewöhnlich bis 10° und darüber westlich vom magnetischen Meridiane.

„So ist der Anfang eines jeden Nordlichtes, und häufig bleibt das Ansehn ungefähr dasselbe während mehrerer Stunden, ohne dass neue Erscheinungen sich zeigten. Indess herrscht keineswegs vollkommene Ruhe darin. Im Gegentheil ist die ganze Figur in fortwährender Bewegung, sie erhebt oder senkt sich, zieht nach Osten oder Westen, zwar nicht heftig, aber doch so, dass man nach Verlauf einiger Zeit den Unterschied deutlich merken kann. Plötzlicher und merklicher sind die Aenderungen der Gestalt, indem bald an der einen oder anderen Stelle Basis und Lichtsaum aus der regelmässigen Form ausweichen, bald das Licht einen Eingriff in die Basis macht, und dann diese breitere und hellere Lichtmasse sich fortbewegt. Am heftigsten aber werden sie, wenn das Nordlicht sich weiter ausbildet und Strahlen zu schiessen anfängt. Dann sieht man den Lichtsaum an einer Stelle bedeutend heller werden, in die Basis eingreifen, und es steigt ein heller Schein von der Farbe des Lichtsaumes in die Höhe, ungefähr halb so breit als der Vollmond, selten breiter, in der Mitte heller, nach beiden Seiten schwächer, aber deutlich vom Himmelsraume sich abschneidend. Mit Blitzesschnelle schiesst er auf, oft bis an den halben Himmel, zuweilen noch höher; oben züngelnd und in mehrere schwache Strahlen zerspalten, nimmt er die Figur eines Strahlenbüschels an. Meistens erhebt er sich senkrecht, selten in einer gegen den Horizont geneigten Richtung; sich bald verlängernd, bald verkürzend, behält er doch im Ganzen oft während mehrerer Minuten seine Gestalt bei, aber selten bleibt er auf derselben Stelle, sondern bewegt sich langsam nach Osten oder Westen, zuweilen wie vom Winde bewegt sich krümmend. Allmälig wird er blasser und verschwindet endlich, um anderen Strahlen Platz zu machen, die dasselbe Spiel von vorn anfangen. Wenn nun nicht einer, sondern 5, 6 Strahlenbüschel an verschiedenen Stellen aufsteigen, wenn endlich gar aus der ganzen Länge des Saumes dicht an einander sich Strahlen erheben, sich entweder nach einer Seite alle bewegen, oder in verschiedenen Richtungen von und gegen einander ziehen, wenn diese

sich bis zum Zenith erheben, und sich nun so durchdringen, dass man ihre Anfänge nicht mehr unterscheiden kann, wenn das Verschwinden und Wiedererscheinen so heftig geschieht, dass der ganze nördliche Himmel wie von zuckenden Flammen erfüllt ist, die von dem bläulich Weissen durch alle Abstufungen der Farben bis in's Purpurrothe spielen, wenn diese gar durch das Zenith und bis in den halben südlichen Himmel ziehen; dann gewährt das Nordlicht einen Anblick, den die Phantasie sich wohl malen, aber die Sprache nicht beschreiben kann. Staunend und entzückt sieht der Beobachter dem herrlichen Schauspiele zu, das in ewig verschiedenen Formen sich erneuert. — Nur eine Stelle des Himmels in der Nähe des Zeniths und in der Richtung, nach welcher die frei schwebende Magnetnadel zeigt, theilt nicht die allgemeine Beweglichkeit und Veränderlichkeit. In mattem Lichte glänzt sie ruhig fort, gleichsam der Pol der ganzen Erscheinung, und darum die Krone genannt. An ihrer Beharrlichkeit scheitert die Wuth der Strahlen; wie diese auch von allen Seiten auf sie einstürzen, sie vermögen sie nicht zu durchbrechen. Sie allein gewährt dem Beobachter einen festen Anhalt; wo sonst er seine Augen hinwendet, immer Neues und Neues gewahrt er, und nicht fassen kann er die ganze Herrlichkeit. Erst wenn nach oft mehrstündiger Dauer allmälig wieder Ruhe eintritt, wenn die Farben nach und nach verschwinden, und die einzelnen Strahlen sich wieder unterscheiden und verfolgen lassen, immer kürzer werden und endlich ganz aufhören, — erst dann kommt er von seinem Entzücken zurück, und erhält wieder Fassung zu prüfen, was er sieht. Die Pracht des Flammenmeeres ist verschwunden, und nur blasses Lichtgewölke, einem Rauche ähnlich, erinnert noch daran; in langsamer Bewegung schwebt er auf und ab, hin und wieder, erhebt sich endlich immer mehr, und wird immer schwächer, bis er einem unscheinbaren weisslichen Dunste gleicht, und zuletzt steht nur die Basis und der Lichtsaum noch da, anfangs noch in unregelmässiger Form und chaotisch durch einander gemengt, allmälig wieder regelmässig sich gestaltend. Nach kurzer Dauer bilden sich wieder neue Strahlen, aber die Kraft ist gebrochen, der Stoff verbraucht; nur hin und wieder erscheinen sie, nicht vermögend, sich über einige Grade zu erheben, verschwinden bald, um zuweilen wieder neuen Platz zu machen, bis endlich Basis und Lichtsaum immer schwächer werden, und endlich auch diese von der Bläue des Himmels nicht mehr zu unterscheiden sind.“

„Doch erreichen nur wenige Nordlichter die eben beschriebene

vollkommene Ausbildung; die Krone habe ich nur bei dreien gesehen, bei wenigen anderen erhoben sich die Strahlen bis zu einer Höhe von 60° oder 70° und spielten verschiedene Farben. Meistentheils erhebt sich, nachdem das Nordlicht einige Male Strahlen geschossen hat, das an den Enden der Basis gelagerte unregelmässige Gewölk, und überzieht in wenigen Augenblicken den ganzen Himmel mit einem dichten Schleier. Dann bricht sich zuweilen das Gewölk späterhin wieder, und in den Wolkenspalten sieht man noch lange den Lichtschimmer, auch wohl einzelne Strahlen...... Noch giebt es eine von der gewöhnlichen etwas abweichende Form, die häufiger vorkommt. Es bildet sich nämlich in einiger Höhe über dem Lichtsaume ein neuer Lichtbogen. Er ist gewöhnlich mit dem Saume und der Basis concentrisch...... Dieser Bogen ist meistentheils schmaler als der Lichtsaum, an beiden Seiten scharf begrenzt und von lebhaftem Glanze. Er bietet im Ganzen dieselben Erscheinungen dar, wie der Lichtsaum, das Auf- und Absteigen, das allmälige Sich-verschieben nach einer oder der anderen Seite, das Strahlenschiessen. Nur kommen aus diesem mehrere Strahlen hervor, meistentheils dicht bei einander, und der ganze Lichtbogen scheint sich in Strahlen aufzulösen; oder diese sind kürzer, verschwinden schneller, der Bogen nimmt rasch seine regelmässige Gestalt an, und die Dunkelheit, die auf das Dasein einer ihm zugehörigen Basis schliessen liesse, findet sich nie. Einen schönen Anblick gewährt es, wenn aus dem Saume und dem Bogen zugleich Strahlen aufsteigen; die ersteren schiessen dann nur bis zum Bogen, diejenigen aus diesem höher hinauf und erst, wenn er sich ganz aufgelös't hat, vermischen sie sich unter einander."

Was nun die Zeit betrifft, in welcher die Nordlichter am häufigsten erscheinen, so kommt es da zunächst auf die Tageszeit an. In dieser Beziehung ist man noch nicht ganz sicher. Die Thatsache, dass man zuweilen Nordlichter an sehr entfernten Orten z. B. in Nordamerika und Europa, wo doch die Tageszeit so verschieden ist, gleichzeitig gesehen hat, scheint dafür zu sprechen, dass das Nordlicht nicht gerade an bestimmte Stunden der Nacht gebunden sei. Eben darauf deutet der Umstand, dass man zuweilen das Flimmern des Nordlichtes schon deutlich gesehen hat, ehe noch die Tageshelle verschwunden war, und dass mehrere Beobachter auch bei Tage bemerkt haben, dass die Wolken sich zu ähnlichen Gestalten ordneten, wie das Nordlicht zeigt, und dann auch die Magnetnadel in dieselbe Unruhe gerieth, die wie wir später sehen werden, bei Nordlichtern stattfindet, so dass man ein solches Wolkengebilde für

ein wirkliches Nordlicht halten musste, dessen Leuchten nur durch die Helle des Tages überstrahlt war. Auf der andern Seite hat aber die Erfahrung doch eine bestimmte Zeit als die gewöhnlichste erkannt. Nämlich für den Beginn und die Periode des grössten Glanzes die erste Hälfte der Nacht. Argelander, nachdem er gesagt hat, dass er ein Entstehen noch während der Tageshelle nie bemerkt habe, fährt fort: „Statt dessen beobachten wir ihr Entstehen immer erst während oder noch öfter nach Aufhören der Dämmerung, ihr Verschwinden gewöhnlich schon vor dem Grauen des Morgens. Jedoch scheinen auch nicht alle Theile der Nacht ihrem Entstehen gleich günstig zu sein, sondern hauptsächlich das erste Viertel derselben, und besonders die Zeit 3 bis 4 Stunden nach Untergang der Sonne. Seltener bilden sie sich erst gegen Mitternacht, und nach derselben habe ich nur einmal eins entstehen sehn, sowie auch nur einmal in der ersten halben Stunde nach Sonnenuntergang."

In Bezug auf die Jahreszeiten ist der Winter schon wegen der grösseren Dauer seiner Nächte dem Erscheinen günstiger als der Sommer, und wirklich zeigt er auch bei weitem mehr Nordlichter als dieser. Es sind aber nicht gerade die Monate mit den längsten Nächten, welche sich darin am meisten hervorthun, sondern eine grosse Anzahl von Erfahrungen hat mit ziemlicher Sicherheit herausgestellt, dass in der Nähe der beiden Tag- und Nachtgleichen die Häufigkeit am grössten ist.

Neben den jährlichen Perioden scheinen auch noch viel grössere stattzufinden. Aus den aufgezeichneten Beobachtungen ergiebt sich nämlich, dass im vorigen Jahrhunderte, besonders gegen die Mitte desselben, die Nordlichter sehr häufig waren, in der zweiten Hälfte dagegen abnahmen, und im letzten Jahrzehend, so wie in den ersten Jahrzehenden dieses Jahrhunderts fast ganz verschwunden zu sein schienen. Seitdem aber haben sie sich wieder vermehrt, so dass sie jetzt zu einer bedeutenden Häufigkeit angewachsen sind. Diese schnelle Zunahme lässt sich selbst in dem kurzen Zeitraume der oben angeführten Beobachtungen von Argelander schon deutlich erkennen. In den einzelnen Jahren von 1823 bis 31 hat er nämlich der Reihe nach gesehen 3, 4, 17, 10, 15, 31, 32, 50 Nordlichter. Hansteen glaubt seit dem Jahre 502 vor Chr. Geb. 24 solcher Perioden, wie die des vorigen Jahrhunderts, nachweisen zu können, doch kann diese Bestimmung bei den wenigen und lückenhaften Angaben, die wir aus alten Zeiten besitzen, natürlich nur ziemlich unsicher sein.

Ueber die Höhe der Nordlichter ist man sehr verschiedener Ansicht gewesen. Zur Berechnung derselben bediente man sich hauptsächlich solcher Fälle, wo ein und dasselbe Nordlicht an verschiedenen Orten, wo möglich an solchen, die beinahe auf gleichem Meridiane liegen, beobachtet und die scheinbare Höhe des Bogens am Himmel gemessen war. Aus dem Unterschiede dieser scheinbaren Höhen, in Verbindung mit der Entfernung der beiden Orte von einander, bestimmte man dann die wahre Höhe. Dabei blieb aber der grosse Uebelstand, dass der Bogen nicht feststeht, sondern selbst bei ruhigen Nordlichtern sich allmälich hebt und senkt, und bei den bis zum Strahlenschiessen entwickelten, welche durch ihre Schönheit die Aufmerksamkeit besonders auf sich ziehen, die Messung vollends unmöglich wird. Hierin mag es wohl seinen Grund haben, dass die Resultate, welche dieses Verfahren gegeben hat, gänzlich von einander abweichen. Aus älteren Beobachtungen hatte man geschlossen, dass die Höhe der Nordlichter gewöhnlich über 100 geogr. Meilen betrage, und diese Ansicht war im vorigen Jahrhunderte ziemlich allgemein geltend. Spätere Beobachtungen reducirten die Höhe auf 20 bis 30 Meilen, andere auf 1 bis 2 Meilen, und bei einem Nordlichte, welches an zwei Orten in Schottland beobachtet war, fand man sogar nur eine Höhe von etwa 4000 Fuss.

Diese verschiedenen Angaben würden uns also noch in voller Ungewissheit lassen, doch giebt es einige besondere Umstände, welche unser Urtheil unterstützen können, und darauf hindeuten, dass die Nordlichter in der Region hoher Wolken, und zuweilen selbst noch niedriger ihren Sitz haben. Mehrere zuverlässige Beobachter haben bei verschiedenen Nordlichtern aus der Art, wie sie die über den Himmel zerstreuten Wolken beleuchteten, erkannt, dass sie sich in der Nähe einiger derselben befinden mussten, zuweilen wurden die Wolken sogar von unten beleuchtet, und in einem Falle hat Franklin deutlich gesehen, wie eine von dem Nordlichte ausgesandte Lichtmasse unter den Wolken, welche den Himmel bedeckten, dahin zog. Noch wichtiger, nicht blos für die vorliegende Frage, sondern für das ganze Wesen des Nordlichtes scheinen mir die von Wrangel gemachten Bemerkungen zu sein*), dass, wenn das Licht sich bis in die Nähe des Zenith erstreckte, es die Gestalt

*) Phys. Beobachtungen des Capitänlieutenant Baron von Wrangel während seiner Reise auf dem Eismeere in den J. 1821, 22, 23 herausgegeben u. bearbeitet von G. F. Parrot. Berlin 1827.

von lichten Wolken annahm, die dann, indem ihr Leuchten nach und nach aufhörte, weisslich blieben, und oft noch am folgenden Tage als wirkliche kleine krause Wolken zu sehen waren, und dass ferner, wenn Nordlichtsäulen beim Monde vorbei schossen, sich Höfe grösserer Art in ihnen bildeten. Hiernach würden die Nordlichter sich nicht blos in der Region der Wolken befinden, sondern müssten wirklich aus Gewölk oder Nebel und zwar von der Art der *Cirri* oder *Cirrostrati* bestehen, die durch irgend einen physischen Process leuchtend gemacht würden.

Damit stimmen auch gewisse an den Wolken gemachte Beobachtungen überein. Es wurde schon oben erwähnt, dass diese zuweilen ziemlich vollständig die Form eines Nordlichtes annehmen, und sich dann auch durch die Wirkung auf die Magnetnadel als solches bewähren, und mit dieser Erscheinung sind auch wahrscheinlich die Polarstreifen, — *bandes polaires,* — verwandt, welche gar nicht selten und nach Humboldt*) in den Tropen noch viel häufiger als in der gemässigten und kalten Zone wahrgenommen werden. Sie bestehen darin, dass die hohen Federwolken sich in mehr oder weniger regelmässige Reihen ordnen, die wenigstens anfangs dem magnetischen Meridiane ziemlich parallel laufen. Es liegt nahe anzunehmen, dass bei der Bildung dieser Streifen dieselbe richtende Kraft obwalte, welche dem Nordlichte seine Gestalt und Lage giebt.

Zuweilen will man beim Nordlichte ein Geräusch gehört haben, welches ähnlich dem Rauschen beim Aufrollen eines Stückes Seidenzeug, oder dem Zischen der vom Winde gepeitschten Flamme einer Feuersbrunst sein soll. Dieses Geräusch wird aber von so vielen anderen Beobachtern ganz geleugnet, dass seine Existenz vorläufig dahingestellt bleiben muss.

Endlich muss noch eine Haupteigenschaft des Nordlichtes, sein Einfluss auf die Magnetnadel, erwähnt werden, auf den schon einige Mal hingedeutet wurde. Der Zusammenhang des Nordlichtes mit dem Erdmagnetismus stellt sich schon dadurch heraus, dass es bei der Anordnung seiner Gestalt und Lage nicht den geographischen Richtungen, sondern der Magnetnadel folgt. Umgekehrt wirkt es aber auch seinerseits mit merklicher Kraft auf die Richtung der letzteren, oder es tritt wenigstens gleichzeitig mit ihm eine solche ungewöhnliche Kraft ein. Die Declinationsnadel nämlich, welche sonst zwischen engen Grenzen langsam hin- und herschwankt, wird beim

*) Kosmos I. p. 441.

Entstehen eines Nordlichtes sehr unruhig, und weicht oft bedeutend nach der einen oder andern Seite von ihrer mittleren Richtung ab. Diese Wirkung ist auch nicht blos auf die horizontale Stellung der Nadel beschränkt, sondern die Neigung der Inclinationsnadel, und selbst die Intensität des Magnetismus erleiden ebenfalls merkliche Veränderungen, und es bedarf oft noch längerer Zeit nach Beendigung des Nordlichtes, bis die Nadel ganz in ihren gewöhnlichen Zustand zurückkehren kann.

In Bezug auf die Erklärung des Nordlichtes ist es nun gewiss besonders der zuletzt berührte Zusammenhang mit dem Erdmagnetismus, den man als Hauptmoment im Auge behalten muss. Dabei ist es indessen noch zweifelhaft, ob man an eine rein magnetische oder an eine elektrische Wirkung zu denken hat, indem die Wechselwirkung zwischen Elektricität und Magnetismus bekannt ist. Ausserdem sind auch wohl noch einige im Vorigen enthaltene Angaben geeignet, auf den richtigen Weg zu führen, wozu ich besonders diejenigen rechne, welche als Grundlage der Erscheinung eine eigenthümliche Wolkenbildung vermuthen lassen. Die vollständige Entwickelung eines Naturprozesses, der gerade diese grossartige und complicirte Lichterscheinung mit allen ihren Eigenthümlichkeiten zur Folge haben muss, bleibt indessen noch eine Aufgabe für die Zukunft, und ich glaube daher auf die einzelnen bis jetzt gemachten Erklärungsversuche, wenn sie auch nicht ohne Interesse sind, und schon manchen glücklichen Gedanken enthalten mögen, in dieser allgemeinen Darstellung nicht näher eingehen zu dürfen.

---

## IX.

# Miscellen.

In der Abhandlung Nr. VII. S. 261 ff. habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass bei Lambert's Beobachtungen des Dämmerungsphänomens jedenfalls das Zodiakallicht mit eine Rolle gespielt hat, und habe die Vermuthung ausgesprochen, dass dies auch bei Lacaille's Beobachtungen, die Biot anführt, der Fall gewesen ist. Eine vollständige Bestätigung hat diese von mir ausgesprochene Vermuthung jetzt durch einen Fund des Herrn Doctor W. Schlesicke (gegenwärtig in Berlin) erhalten, welcher die betreffende Abhandlung von Lacaille in den Mém. de l'Acad. de Paris, die mir, als ich den Aufsatz Nr. VII. schrieb, nicht zu Gebote standen, selbst nachgesehen hat, und mir darüber die folgende in mehreren Beziehungen interessante Mittheilung macht, die ich den geehrten Lesern dieser Zeitschrift nicht vorenthalten darf:

„Am meisten interessant war mir die, wie es mir scheint, unzweideutige Bestätigung Ihrer Ansicht, dass bei dem Dämmerungsphänomene das Zodiakallicht einen merkwürdigen Einfluss übe. Die mir freistehende Benutzung der Königl. Bibliothek setzte mich nämlich in den Stand, Lacaille's eigenen Bericht über seine am 16. und 17. April 1751 gemachten Dämmerungsbeobachtungen nachzulesen. Dieselben sind offenbar in der Nähe des Caps der guten Hoffnung gemacht; da Lacaille Rio Janeiro am 25. Februar 1751 verlassen hatte und bereits am 19. April 1751 auf dem Cap landete. Dass aber auch wenigstens bei der ersteren am 16. April gemachten Beobachtung das Zodiakallicht sichtbar gewesen sei, sagt Lacaille ausdrücklich in der betreffenden Stelle, welche sich in den Mém. de l'Acad. année 1751 unter dem Titel: „„Diverses observations astronomi-

„„ques et physiques, faites au cap de Bonne-espérance pen-
„„dant les années 1751 et 1752 et partie de 1753. Par. M.
„„l'Abbé de la Caille. Article XIII. Sur la longueur des Cré-
„„puscules"" findet. Unmittelbar hinter den auch von Ihnen angeführten Worten, mit denen dieser Artikel beginnt, heist es:
„„....... le 16 avril, de 16°. 38'; le 17 de 17°. 13'. Le 16
„„Avril, la lumière zodiacale étoit ètendue sur toute la constel-
„„lation du Taureau et des Gémeaux; elle se perdoit dans la
„„voie lactée. J'ai remarqué en général sans en prendre cepen-
„„dant des mesures particulières, qu'au cap de Bonne-espérance
„„et encore plus à l'Isle de France, la lumière zodiacale étoit
„„extraordinairement claire et longue. Les habitans la remar-
„„quent tres bien et la croient une vraie lumière du crepuscule,
„„on ne peut même les en abuser.""

Dadurch bestätigt sich also Ihre Vermuthung für die Beobachtung vom 16. April auf das Vollständigste und zugleich wird es sehr wahrscheinlich, dass das Zodiakallicht auch am 17. April sichtbar war, die Erwähnung desselben aber von Lacaille unterlassen wurde, weil es vielleicht weniger hervortrat, und von geringerer Ausdehnung war.

Diese Mittheilung scheint mir Vieles zur Bestätigung Ihrer interessanten Hypothese beizutragen". So weit Herr Doctor Schlesicke.

Der Herausgeber.

---

# Verbesserungen.

S. 367 Z. 8 von oben lies: Taf. VII — XII statt Taf. VII — XI.
— 380 — 11 — — ist hinter dem Worte Stellen das Wort aber zu streichen.
— 381 — 12 — — lies: zu betrachten sei, st. zu betrachten.
— 407 — 11 — — — miraillou statt miraillu.
— 401 — 1 — — ist das Wort und zu streichen.
— 420 — 2 — — statt vollsändige lies: vollständige.

---

Druck von C. P. Melzer in Leipzig.

*Fig. 5.*



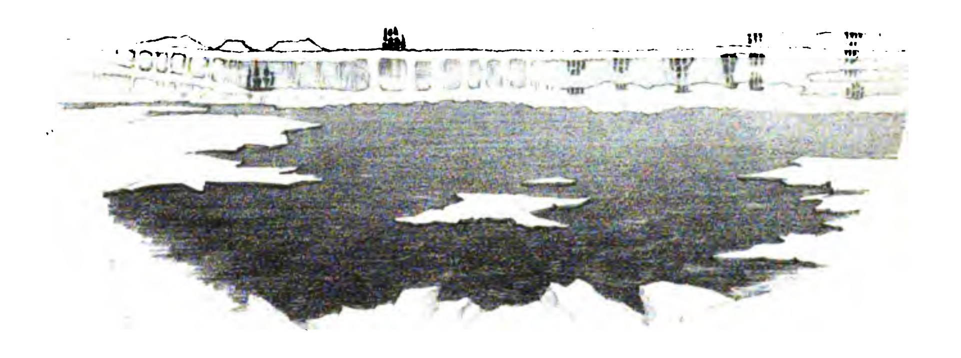
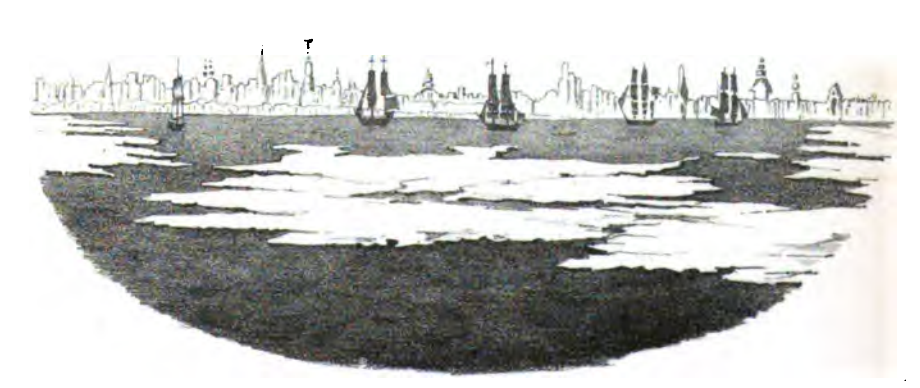


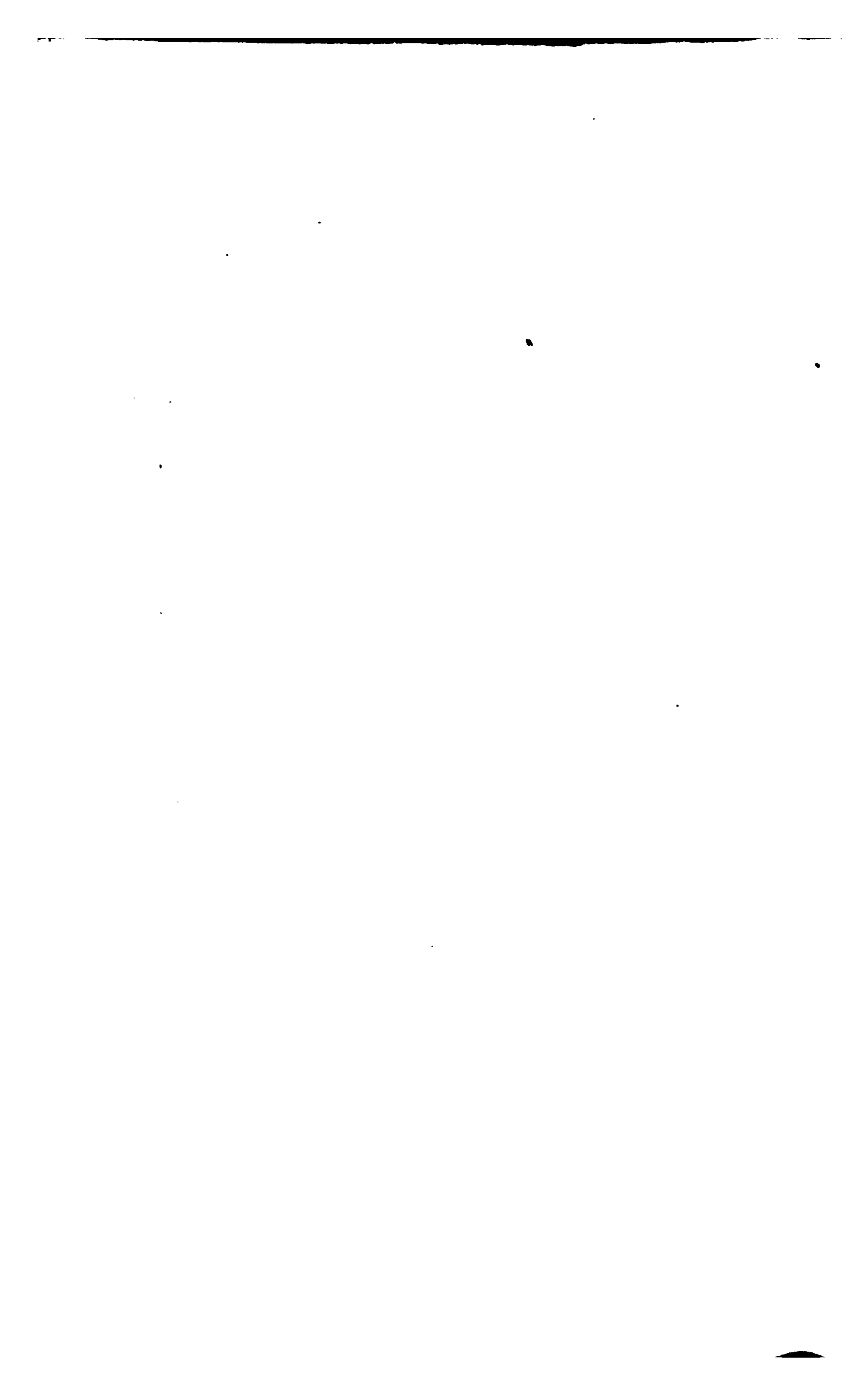
*Fig. 7.*

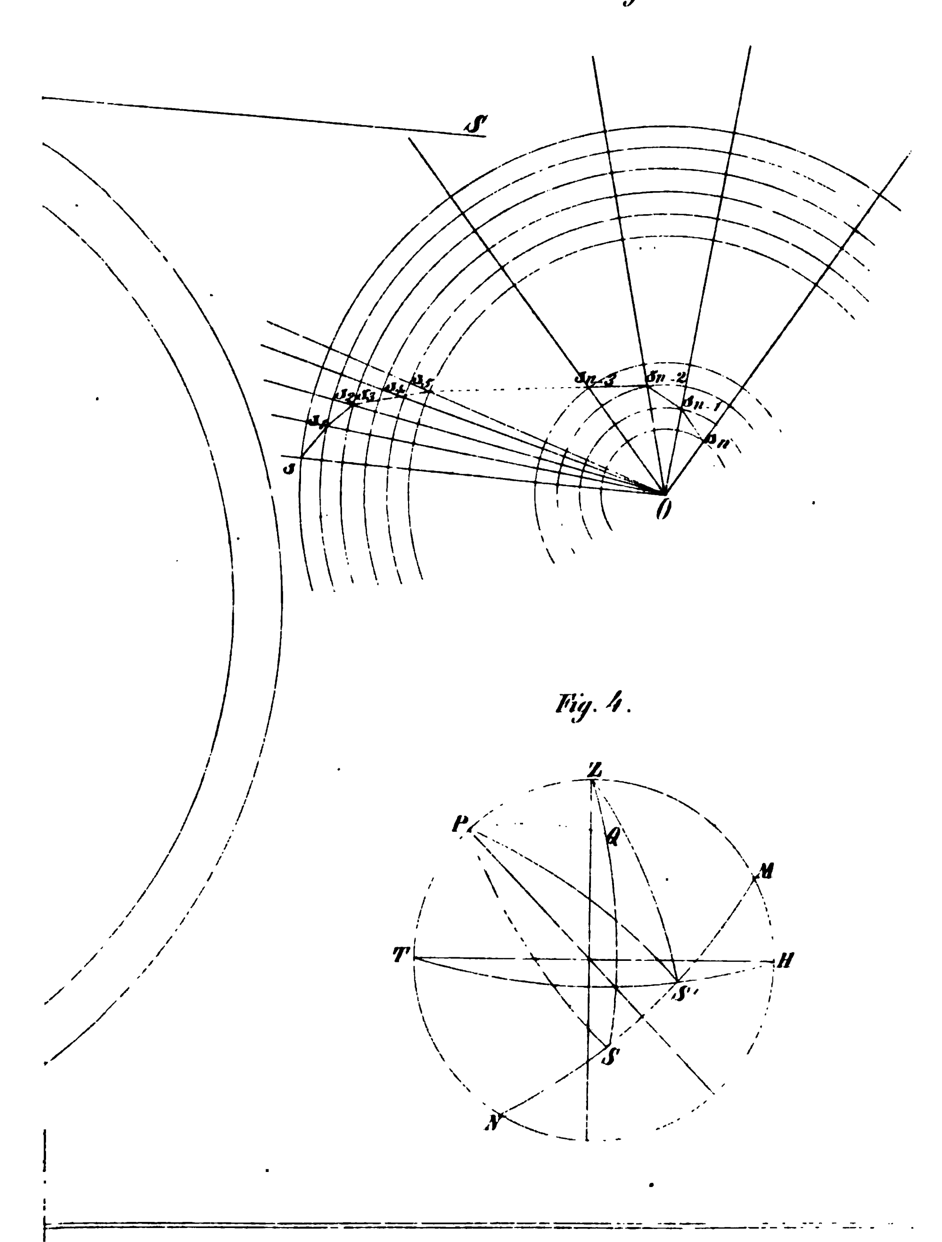




Th






Fig. 1.
S
s
s₁
s₂
s₃
s₄
s₅
sn-3
sn-2
sn-1
sn
O
Fig. 4.
Z
P
Q
M
T
H
S'
S
N









Theil

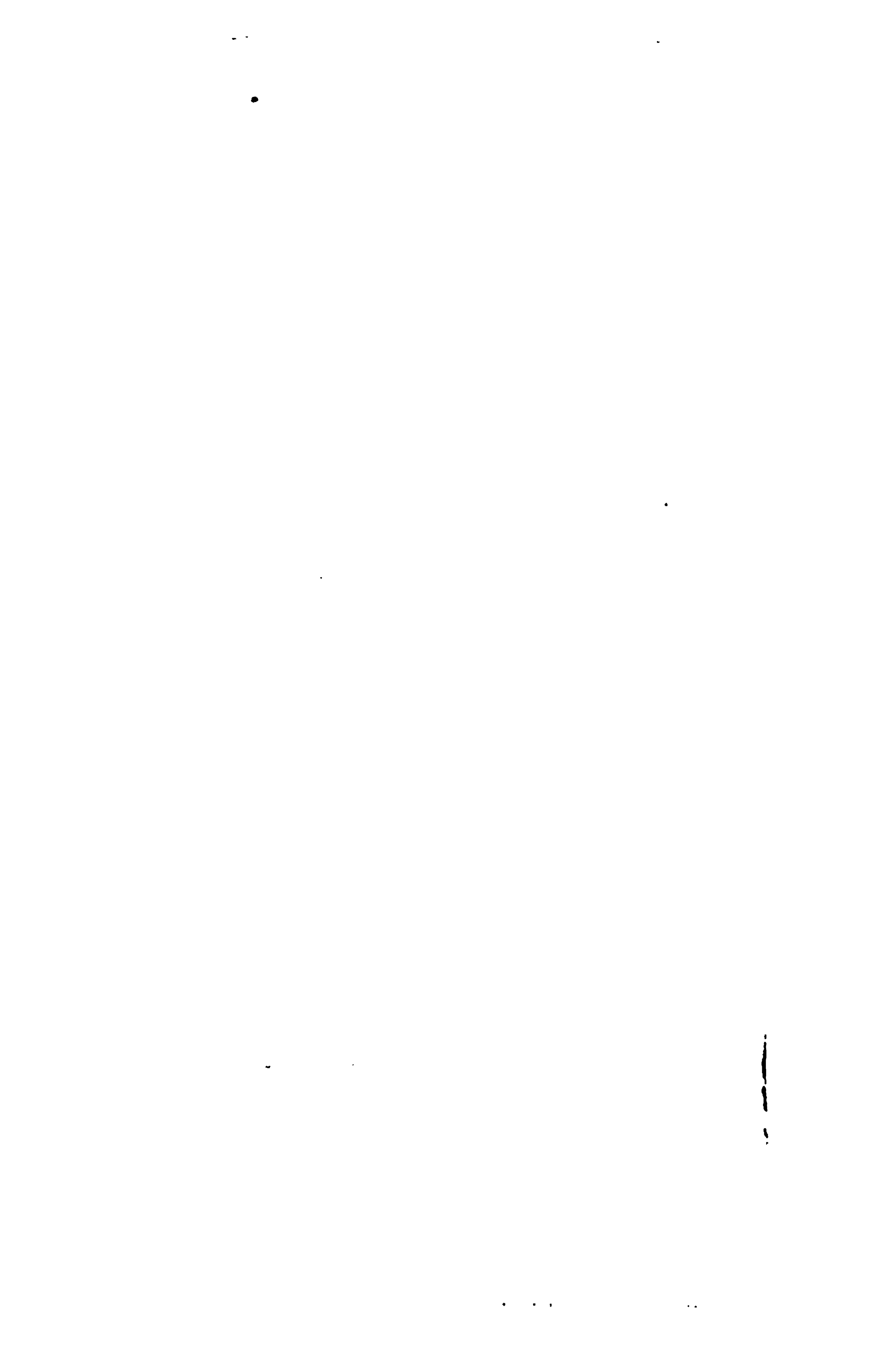


*Fig. 5.*

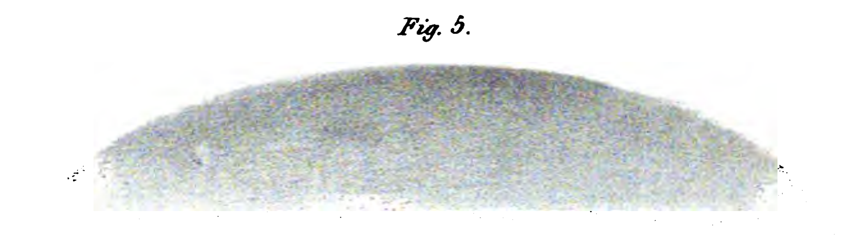
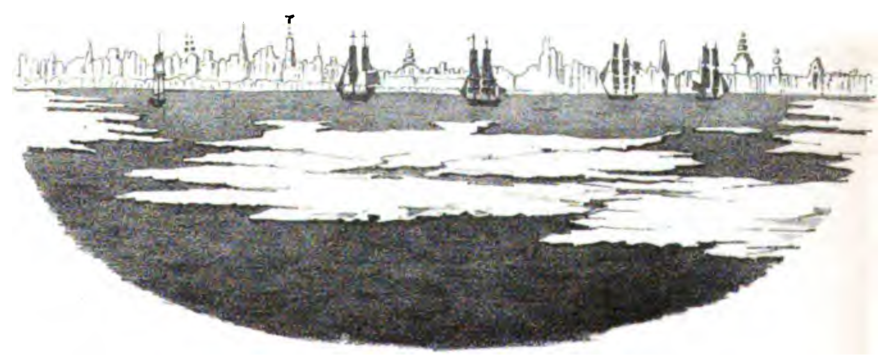




*Fig. 7.*









Thei

G

Beiträ

